

Problema 1

Si consideri un cilindro cavo sottile di raggio R e altezza infinita su cui è distribuita uniformemente una carica con densità superficiale costante $\sigma > 0$.

- 1) Calcolare il campo elettrico (modulo, direzione e verso) sia all'interno che all'esterno del cilindro;
- 2) Una carica puntiforme q viene spostata da un punto $P_1 = (\rho_1, \theta, z)$ ad un punto $P_2 = (\rho_2, \theta, z)$ (entrambi esterni al cilindro). Calcolare la variazione di energia potenziale elettrica della carica.

Problema 2

Sulle armature di superficie A di un condensatore piano è presente una carica, rispettivamente, Q (armatura inferiore) e $-Q$ (armatura superiore), con $Q > 0$. La distanza tra le armature è d . Una carica puntiforme q di massa m , inizialmente in quiete a metà distanza tra le armature, viene lasciata libera di muoversi.

Determinare:

- 1) l'accelerazione della carica puntiforme (modulo, direzione e verso);
- 2) la velocità con cui la carica arriva sull'armatura.

Problema 3

Una carica puntiforme q di massa m si muove di moto circolare uniforme (in senso antiorario) in un campo magnetico uniforme. Sapendo che la carica ha un'energia cinetica K e che il raggio della traiettoria è R , determinare:

- 1) il campo magnetico (modulo, direzione e verso);
- 2) il tempo impiegato dalla carica a descrivere 10 giri completi.

Problema 4

Un filo rettilineo infinito è percorso da una corrente i . Una spira quadrata, con due lati paralleli al filo, si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato, con accelerazione \mathbf{a} , in direzione ortogonale al filo. Sapendo che il lato della spira è lungo l , che la posizione e la velocità iniziali sono, rispettivamente, ρ_0 e v_0 , calcolare:

- 1) il flusso del campo magnetico \mathbf{B} attraverso la spira in funzione del tempo;
- 2) la f.e.m. indotta nella spira.

Problema 5

Due solenoidi infiniti coassiali di raggi R_1 e R_2 , con $R_1 < R_2$, sono percorsi, rispettivamente, da corrente $i_1=2$ ampère e $i_2=-4$ ampère (i_2 circola in verso opposto a i_1). Il numero di spire per unità di lunghezza dei due solenoidi è $n_1=50$ spire/metro e $n_2=25$ spire/metro. Calcolare:

- 1) il campo magnetico in tutto lo spazio;
- 2) una carica puntiforme q di massa m inizia a muoversi tra i due solenoidi con velocità iniziale $v_0=10$ m/s parallela all'asse dei due solenoidi stessi. Determinare la traiettoria seguita dalla particella e la velocità con cui è percorsa.

Soluzioni

Problema 1

1) Data la simmetria cilindrica del problema adottiamo le coordinate cilindriche. Per motivi di simmetria il campo elettrico può avere solo componente lungo $\hat{\rho}$ e può dipendere solo da ρ ma non da θ e z (si veda la lezione sul campo generato da un filo rettilineo infinito uniformemente carico), ossia

$$\mathbf{E} = E_\rho(\rho)\hat{\rho}$$

Per determinare il valore di $E_\rho(\rho)$ basta applicare il teorema di Gauss ad un cilindro di raggio ρ coassiale con quello dato.

$$E_\rho(\rho) = 0 \text{ per } \rho < R \quad E_\rho(\rho) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 \rho} \text{ per } \rho \geq R$$

2) La variazione di energia potenziale elettrostatica è data da

$$\Delta U = q\Delta V$$

dove

$$\Delta V = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \log\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$$

Problema 2

1) Il campo elettrico all'interno del condensatore è

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{\mathbf{z}} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \hat{\mathbf{z}}$$

con l'asse z ortogonale alle armature e orientato verso l'alto. L'accelerazione della carica è

$$\mathbf{a} = \frac{qE}{m} = \frac{qQ}{\varepsilon_0 Am} \hat{\mathbf{z}}$$

2) La velocità con cui la carica raggiunge l'armatura è

$$v = \sqrt{ad} = \sqrt{\frac{qQd}{\varepsilon_0 mA}}$$

Problema 3

1) Poiché il moto della carica è circolare uniforme, il campo magnetico \mathbf{B} deve essere ortogonale alla velocità e quindi al piano in cui giace la traiettoria. Dal senso di rotazione segue che il verso del campo è entrante nel piano della traiettoria. Il modulo si ottiene applicando la seconda legge di Newton

$$qvB = m \frac{v^2}{R}$$

da cui

$$B = \frac{mv}{qR}$$

ma $v = \sqrt{2K/m}$ e quindi

$$B = \frac{\sqrt{2mK}}{qR}$$

2) il moto è circolare uniforme, quindi il periodo è

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \pi R \sqrt{\frac{2m}{K}}$$

il tempo impiegato dalla carica a compiere 10 giri è semplicemente $\Delta t = 10T$

Problema 4

1) Il filo infinito genera un campo magnetico \mathbf{B}

$$\mathbf{B}(\rho) = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \hat{\theta}$$

quindi il flusso attraverso la spira è

$$\Phi(B) = \int \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \log \left(\frac{\rho(t) + l}{\rho(t)} \right) = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \log \left(\frac{\rho_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 + l}{\rho_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2} \right)$$

2) la f.e.m. indotta si ottiene applicando la legge di Faraday,

$$\mathcal{E}_{in} = - \frac{d\Phi(B)}{dt} = \frac{\mu_0 i l^2}{2\pi} \frac{v_0 + at}{(\rho_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 + l)(\rho_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2)}$$

Problema 5

1) Ricordando che il campo magnetico generato da un solenoide infinito percorso da corrente i è nullo fuori e uniforme dentro, con modulo $B = \mu_0 n i$, direzione parallela all'asse del solenoide e verso dato dalla regola della mano destra, si ottiene che:

$$B = 0 \text{ per } r > R_2 \quad B = \mu_0 n_2 i_2 = 1.26 \cdot 10^{-4} T \text{ per } R_1 \leq r \leq R_2 \quad B = \mu_0 (n_2 i_2 - n_1 i_1) = 0 \text{ per } r < R_1$$

2) Applicando la legge di Lorentz $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ si ottiene che la forza esercitata dal campo magnetico presente tra i due solenoidi sulla carica è nulla, dato che \mathbf{B} e \mathbf{v}_0 sono paralleli. Quindi la carica si muove di moto rettilineo uniforme parallelamente all'asse dei solenoidi con velocità \mathbf{v}_0 .