Fisica per Scienze Biologiche - Corso B

2^a prova in itinere - 8/4/2010

Problema 1

Un capo di un filo ideale di lunghezza $l = 50$ cm è legato ad un punto materiale di massa $m = 200$ g, mentre l'altro è fissato ad un perno conficcato in un piano piano orizzontale liscio. Partendo da fermo e a distanza l dal perno, il punto materiale inizia a muoversi sul piano di moto circolare uniformemente accelerato con accelerazione angolare $\alpha = 0.2\ rad/s^2$. Trascurando gli attriti e sapendo che il filo può sopportare una tensione massima $T_{max} = 10$ N oltre la quale si rompe, determinare:

1) la velocità angolare massima ω_{max} oltre la quale il filo si spezza;

2) l'istante in cui viene raggiunta;

3) il moto del punto materiale (traiettoria e velocità) dopo la rottura del filo.

Problema 2

Due molle ideali hanno un estremo fissato al muro e l'altro ad un corpo di massa, rispettivamente, m_1 e m_2. Il corpo 1 oscilla con un periodo T_1 pari alla metà del periodo del corpo 2 T_2 ($T_1 = 0.5T_2$).
Determinare:

1) il rapporto k_1/k_2 tra le costanti elastiche delle due molle nell'ipotesi che $m_1 = m_2$;

2) il rapporto m_2/m_1 assumendo che $k_1 = k_2$.

Problema 3

Un corpo di massa m_1 scivola lungo la guida mostrata in figura partendo da fermo da un'altezza h dal suolo. Trascurando gli attriti, determinare:

1) l'energia meccanica del corpo;

2) la velocità della scatola di massa $m_2 = m_1$, inizialmente in quiete, dopo l'urto elastico con il corpo di massa m_1;

3) la legge oraria della scatola dal momento in cui quest'ultima entra in contatto, rimanendovi attaccata, con la molla ideale mostrata in figura di costante elastica k e inizialmente nella sua posizione di riposo.

Problema 4

Si considerino due sfere uguali di raggio R e densità ρ_s. Le due sfere vengono lasciate cadere da ferme in due liquidi con viscosità diverse, rispettivamente, η_1 e η_2 ma con la stessa densità $\rho_l = \rho_s/2$. La velocià limite della prima sfera è $v_1 = 4.5$ cm/s. Determinare:

1) l'accelearazione iniziale delle due sfere a_1 e a_2;

2) la velocità limite v_2 della seconda sfera sapendo che la viscosità η_2 del secondo liquido è più grande del 50% rispetto alla viscosità η_1 del primo.

Soluzioni

Problema 1

1) applicando la seconda legge di Newton e considerando solo la componente radiale

$$m\left(\omega^2 l\right) = T$$

da cui segue che la massima velocità angolare è

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{T_{max}}{lm}} = 10\ rad/s$$

2) l'istante t_* in cui viene raggiunta è

$$t_* = \frac{\omega_{max}}{\alpha} = 50\ s$$

3) dopo la rottura del filo, il punto materiale si muove di moto rettilineo uniforme lungo la retta tangente alla circonferenza nel punto occupato dal corpo all'istante in cui il filo si rompe, con velocità

$$v = \omega_{max} l = 5\ m/s$$

Problema 2

1) il periodo di un oscillatore armonico è $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, quindi il rapporto delle costanti elastiche è

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = 4$$

2) dalla relazione ottenuta al punto precedente segue immediatamente che nel caso $k_1 = k_2$,

$$\frac{m_2}{m_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = 4$$

Problema 3

1) L'energia meccanica E è la somma dell'energia potenziale gravitazionale e dell'energia cinetica. Inizialmente il corpo è fermo e quindi

$$E = m_1 g h$$

2) nell'urto si conservano sia la quantità di moto che l'energia cinetica totale dei due corpi. Ricordando che la scatola è inizialmente in quiete e che i due corpi hanno la stessa massa,

$$\mathbf{v_{1,in}} = \mathbf{v_{1,fin}} + \mathbf{v_{2,fin}}$$

$${v_{1,in}}^2 = {v_{1,fin}}^2 + {v_{2,fin}}^2$$

da cui si ottiene che il primo corpo dopo l'urto si ferma e il secondo si muove con la stessa velocità che aveva il primo $\mathbf{v_{2,fin}} = \mathbf{v_{1,in}}$. Non rimane che detereminare la velocità con cui il primo corpo urta la scatola, risultato che si ottiene dalla conservazione dell'energia

$$v_{1,in} = \sqrt{2gh}$$

3) Prendendo l'origine delle coordinate in corrispondenza della posizione di riposo della molla e applicando la seconda legge di Newton, si ottiene

$$(m_2)\ddot{x} = -kx$$

da cui

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$$

La soluzione di questa equazione differenziale è

$$x(t) = Asin(\omega t + \phi), \qquad \dot{x(t)} = A\omega cos(\omega t + \phi)$$

dove A e ϕ sono due costanti da determinare imponendo le condizioni iniziali, ossia posizione e velocità all'istante $t^* = 0$ in cui la scatola entra in contatto con la molla

$$x(t^*) = 0, \qquad \dot{x(t^*)} = v_{2,fin}$$

da cui

$$A = \frac{v_{2,fin}}{\omega} = \sqrt{\frac{2ghm_2}{k}}, \qquad \phi = 0$$

quindi la legge oraria è

$$x(t) = \sqrt{\frac{2ghm_2}{k}} sin\left(\sqrt{\frac{k}{m_2}}t\right)$$

Problema 4

1) Poiché inizialmente le sfere sono ferme, nell'istante in cui vengono lasciate cadere la forza viscosa è nulla, quindi nell'applicare la seconda legge di Newton si devono considerare solo la forza di gravità e la spinta di Archimede.

$$ma = -mg + \rho_l gV, \qquad \rho_s V a = -\rho_s V g + \rho_l gV$$

da cui

$$a = \left(\frac{\rho_l}{\rho_s} - 1\right) g = -\frac{g}{2} = -4.9 m/s^2$$

l'accelerazione iniziale delle due sfere è la stessa.

2) La forza viscosa F_ν su una sfera è data dalla legge di Stokes: $F_\nu = 6\pi\eta Rv$. Quando la sfera raggiunge la velocità limite la risultante delle forze che agiscono su di essa è nulla

$$-mg + \rho_l gV + 6\pi\eta Rv = 0$$

da cui

$$\eta v = \frac{2}{9} gR^2 (\rho_s - \rho_l)$$

applicando questa relazione ad entrambe le sfere ricordando che sono uguali e che i due liquidi hanno la stessa densità, segue che

$$\eta_1 v_1 = \eta_2 v_2$$

quindi

$$v_2 = \frac{\eta_1}{\eta_2} v_1 = \frac{v_1}{1.50} = 0.03 m/s$$