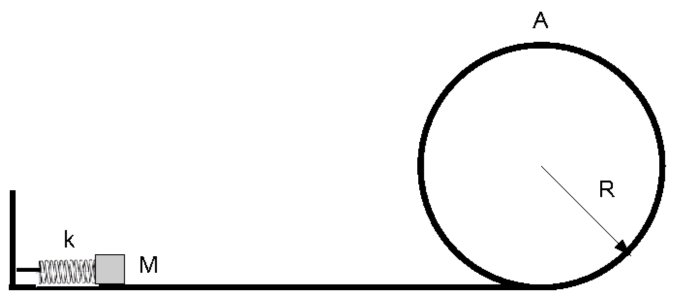
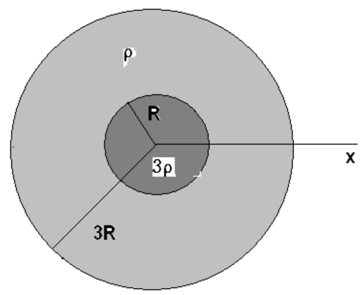
Prova scritta di FISICA

PER SCIENZE BIOLOGICHE MOLECOLARI A, B e C (ord. 509) PER SCIENZE ECOLOGICHE E DELLA BIODIVERSITA' (ord. 509) PER BIOLOGIA A, B e C (ord. 270) 02.07.2010

Esercizio A: Meccanica

Un corpo di massa $M = 250\ g$ si muove su una guida liscia come nella figura, il raggio è $R = 4\ m$. Il corpo è inizialmente in quiete a contatto con una molla ideale di costante elastica $k = 2.5\ N/m$ compressa di $x = 2\ m$ rispetto alla lunghezza di riposo. Assumendo che tutti gli attriti siano trascurabili e che il campo gravitazionale possa essere considerato uniforme, determinare:
Domanda n. 1: l'altezza massima raggiunta dal corpo;
Domanda n. 2: la velocità minima v_{min} che il corpo deve avere quando arriva nel punto A affinché riesca a compiere un giro completo senza cadere dalla guida;
Domanda n. 3: la compressione minima x_{min} che deve avere la molla affinché il corpo riesca a compiere un giro completo senza cadere;
Domanda n. 4: se il valore di v_{min} e di x_{min} cambiano in presenza di attrito dinamico sulla guida (non è richiesto il calcolo esatto degli eventuali nuovi valori);
Domanda n. 5: il valore della massa m di un corpo che si trova nel tratto orizzontale della guida poco prima dell'ingresso nella zona circolare, a destra del corpo di massa M e inizialmente in quiete, affinché dopo un urto elastico con quest'ultimo raggiunga la stessa altezza massima trovata al punto 1, assumendo le stesse condizioni di partenza per M [1].





Esercizio B: Elettrostatica

In una sfera di materiale isolante di raggio $3R$ viene depositata della carica di volume in maniera non uniforme: nella regione di raggio $r \leq R$ la densità di carica per unità di volume è 3ρ mentre nella regione $R < r \leq 3R$ la densità è ρ. Calcolare:
Domanda n. 6: il campo elettrico (modulo, direzione e verso) in un punto posto a distanza x dal centro, distinguendo le tre regioni ($x < R, R < x < 3R, x > 3R$);
Domanda n. 7: il potenziale di un punto generico a distanza x posto nelle tre regioni indicate sopra, riferito ad infinito.
Una carica q di massa m parte da ferma dal bordo della sfera ($x_0 = 3R$) e viene accelerata sotto l'azione del campo elettrostatico.
Domanda n. 8: Calcolare la velocità limite che la carica assume (trascurando ogni altra interazione).

[1] Suggerimento: calcolare prima la velocità che deve avere il corpo di massa m per arrivare all'altezza del punto 1.

Soluzioni

Esercizio A: Meccanica

Risposta alla domanda n. 1: Non essendoci attriti basta applicare la conservazione dell'energia meccanica

$$\frac{1}{2}kx^2 = Mgh$$

da cui segue che

$$h = \frac{1}{2}\frac{kx^2}{Mg} = 2m$$

Risposta alla domanda n. 2: La velocità minima v_{min} che il corpo deve avere nel punto A per non cadere è quella per cui la reazione vincolare in quel punto si annulla. Applicando la seconda legge di Newton al corpo che si muove di moto circolare sulla guida mostrata in figura e considerando solo la componente radiale nel punto A si ottiene:

$$M\frac{v^2}{R} = N + Mg$$

da cui

$$N = M\left(\frac{v^2}{R} - g\right), \qquad v_{min} = \sqrt{gR} = 6,3m/s$$

Risposta alla domanda n. 3: La compressione minima x_{min} che deve avere la molla affinché il corpo raggiunga il punto A con velocità v_{min} è quindi

$$\frac{1}{2}kx_{min}^2 = Mg(2R) + \frac{1}{2}Mv_{min}^2 = \frac{5}{2}MgR$$

da cui

$$x_{min} = \sqrt{\frac{5MgR}{k}} = 4.4m$$

Risposta alla domanda n. 4: In presenza di attrito dinamico la velocità minima v_{min} che il corpo deve avere nel punto A per non cadere è la stessa di prima, infatti l'attrito esercita una forza tangente alla circonferenza ma non una ortogonale e quindi lascia inalterata la relazione tra N e v trovata in precedenza. In questo caso però l'energia meccanica non si conserva poiché una parte è dissipata e quindi la compressione minima della molla deve essere maggiore di quella trovata nel punto precedente.

Risposta alla domanda n. 5: La velocità iniziale necessaria per raggiungere l'altezza h è $v_0 = \sqrt{2gh}$ e non dipende dalla massa. Quindi il corpo m dopo l'urto deve avere esattamente la stessa velocità del corpo M prima dell'urto. Scriviamo quindi le equazioni di conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica con questi valori delle velocità:

$$M\mathbf{v_0} = M\mathbf{v_{fin}} + m\mathbf{v_0}, \qquad \frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv_{fin}^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$$

da cui segue che

$$2mv_0^2\,(m - M) = 0$$

e quindi $m = M$.

Esercizio B: Elettrostatica

Il modulo del campo elettrico generato da una distribuzione sferica uniforme di carica (con raggio a e densità di carica per unità di volume σ) è:

$$E(x) = \begin{cases} \frac{\sigma}{3\epsilon_0}x & \text{x} \leq \text{a} \\ \\ \frac{\sigma}{3\epsilon_0}\frac{a^3}{x^2} & \text{x} > \text{a} \end{cases} \qquad (1)$$

La direzione è radiale e il verso è uscente.
Il potenziale generato da questa distribuzione, prendendo come riferimento un punto a distanza infinita, si ottiene facilmente integrando la eq. [1]:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{\sigma}{6\epsilon_0}\left(3a^2 - x^2\right) & \text{x} \leq \text{a} \\ \\ \frac{\sigma}{3\epsilon_0}\frac{a^3}{x} & \text{x} > \text{a} \end{cases} \tag{2}$$

Il problema si risolve applicando il principio di sovrapposizione: la distribuzione in esame equivale ad una sfera di raggio R e densità 2ρ, più una seconda sfera di raggio $3R$ e densità ρ; per ciascuna valgono le eq. [1]-[2], con i valori di a e σ opportuni.
Risposta alla domanda n. 6: Nelle tre regioni, il modulo del campo elettrico vale:

$$E(x) = \begin{cases} \frac{2\rho}{3\epsilon_0}x + \frac{\rho}{3\epsilon_0}x & = \frac{\rho}{\epsilon_0}x & \text{x} \leq \text{R} \\ \\ \frac{2\rho}{3\epsilon_0}\frac{R^3}{x^2} + \frac{\rho}{3\epsilon_0}x & = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(x + \frac{2R^3}{x^2}\right) & \text{R <x} \leq \text{3R} \\ \\ \frac{2\rho}{3\epsilon_0}\frac{R^3}{x^2} + \frac{\rho}{3\epsilon_0}\frac{3^3R^3}{x^2} & = \frac{29\rho}{3\epsilon_0}\frac{R^3}{x^2} & \text{x>3R} \end{cases} \tag{3}$$

Risposta alla domanda n. 7: Per il potenziale si ha:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{2\rho}{6\epsilon_0}\left(3R2 - x^2\right) + \frac{\rho}{6\epsilon_0}\left(3 \cdot 9R^2 - x^2\right) & = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\left(11R^2 - x^2\right) & \text{x} \leq \text{R} \\ \\ \frac{2\rho}{3\epsilon_0}\frac{R^3}{x} + \frac{\rho}{6\epsilon_0}\left(3 \cdot 9R^2 - x^2\right) & = \frac{\rho}{6\epsilon_0}\left(\frac{4R^3}{x} + 27R^2 - x^2\right) & \text{R <x} \leq \text{3R} \\ \\ \frac{2\rho}{3\epsilon_0}\frac{R^3}{x} + \frac{\rho}{3\epsilon_0}\frac{27R^3}{x} & = \frac{29\rho}{3\epsilon_0}\frac{R^3}{x} & \text{x>3R} \end{cases} \tag{4}$$

Risposta alla domanda n. 8: Per la conservazione dell'energia, la carica q acquista una energia cinetica pari alla differenza di energia potenziale tra i due punti considerati:

$$U(3R) - U(\infty) = q[V(3R) - 0] = q\frac{29\rho R^3}{3\epsilon_0 3R} = \frac{29q\rho R^2}{9\epsilon_0} \tag{5}$$

da cui si ha:

$$v = \sqrt{\frac{58q\rho R^2}{9\epsilon_0 m}}$$

Nota: La risposta a questa domanda poteva essere trovata indipendentemente, osservando che all'esterno della sfera il campo (e il potenziale) è quello generato da una carica puntiforme equivalente:

$$\begin{aligned} Q_{tot} &= \frac{4}{3}\pi(2\rho)R^3 + \frac{4}{3}\pi\rho(3R)^3 = \frac{4\pi \cdot 29\rho R^3}{3} \\ V(x) &= \frac{Q_{tot}}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x} \qquad \text{x>3R} \\ qV(3R) &= \frac{29q\rho R^2}{9\epsilon_0} \\ v &= \sqrt{\frac{58q\rho R^2}{9\epsilon_0 m}} \end{aligned}$$