Prova scritta di FISICA

PER SCIENZE BIOLOGICHE MOLECOLARI A, B e C (ord. 509)
PER SCIENZE ECOLOGICHE E DELLA BIODIVERSITA' (ord. 509)
PER BIOLOGIA A, B e C (ord. 270)
01.02.2011

Esercizio A: Meccanica

Un pendolo è costituito da un corpo di massa $M = 1\,kg$ appeso ad un filo inestensibile di lunghezza $L = 3\,m$, di massa trascurabile. Il pendolo inizialmente si trova in quiete lungo la verticale. Contro la massa del pendolo viene sparato, orizzontalmente, un proiettile di massa $m = 20\,g$ con velocità $v_0 = 80\,m/s$. L'urto è perfettamente anelastico.
Calcolare:
Domanda n. 1: il periodo delle piccole oscillazioni del pendolo;
Domanda n. 2: l'ampiezza di oscillazione (in gradi rispetto alla verticale).

Si supponga ora di poter variare a piacimento la velocità del proiettile:
Domanda n. 3: calcolare v_{min} il minimo valore della velocità del proiettile affinché il pendolo, dopo l'urto anelastico, possa fare un giro completo nel piano verticale;
Domanda n. 4: calcolare la tensione del filo immediatamente dopo l'urto, nel caso in cui la velocità del proiettile abbia il valore v_{min}.

Esercizio B: Elettromagnetismo

Si consideri una corona sferica carica, non conduttrice, fissa, di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2 ($R_2 > R_1$); la carica è distribuita con una densità costante $\rho > 0$.

Calcolare:
Domanda n. 5: il campo elettrico (modulo, direzione e verso) in tutto lo spazio;
Domanda n. 6: il potenziale elettrostatico all'esterno della corona sferica ($r > R_2$);
Domanda n. 7: la velocità di fuga v_f di una carica puntiforme $q < 0$ di massa m che si trovi sulla superficie esterna della corona sferica;
Domanda n. 8: la massima distanza dal centro della corona sferica che la stessa particella carica raggiungerebbe se fosse sparata radialmente con una velocità iniziale $v_i < v_f$;
Domanda n. 9: la velocità v_2 della particella nel caso di traiettoria circolare concentrica con la corona sferica e raggio R_3.

Soluzioni

Esercizio A: Meccanica

Risposta alla domanda n. 1: Il periodo T delle piccole oscillazioni di un pendolo appeso ad un filo inestensibile di lunghezza L è dato dalla relazione:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 3.47\ s$$

Risposta alla domanda n. 2: Applicando la conservazione della quantità di moto totale al sistema composto dalle due masse M e m, la velocità della massa del pendolo $M+m$ subito dopo l'urto anelastico risulta:

$$v_p = \frac{m}{M+m} v_0 = 1.57\ m/s$$

L'ampiezza delle oscillazioni è data dall'angolo massimo θ_{max} di deflessione del pendolo rispetto alla verticale, che viene raggiunto quando il pendolo arriva all'altezza massima h_{max} rispetto alla posizione iniziale. In corrispondenza di questa, il pendolo è fermo e quindi tutta l'energia cinetica posseduta dal pendolo nella posizione iniziale è trasformata in energia potenziale:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(M+m)v_p^2 &= (M+m)gh_{max} \\ h_{max} &= \frac{v_p^2}{2g} = \left(\frac{m}{M+m}\right)^2 \frac{v_0^2}{2g} = 0.125\,m \end{aligned}$$

Conoscendo l'altezza massima, per trovare l'angolo corrispondente basta servirsi delle relazioni trigonometriche:

$$\begin{aligned} h_{max} &= (1-\cos\theta_{max})L \\ \theta_{max} &= \arccos\left(1 - \frac{h_{max}}{L}\right) = 16.6\,\text{gradi} \end{aligned}$$

Risposta alla domanda n. 3: Affinché la velocità del proiettile sia tale da far percorrere al pendolo un giro completo, l'energia cinetica del pendolo, subito dopo l'urto, deve essere sufficientemente grande da permettere al pendolo di arrivare nel punto più alto della traiettoria circolare con una velocità va sufficientemente alta da richiedere che la tensione N del filo sia diversa da zero. Quindi, applicando la seconda legge della dinamica, nel punto più alto della traiettoria si ottiene:

$$\begin{gathered} (M+m)a_z = -N - (M+m)g \\ a_z = -\frac{v^2}{L} \\ -(M+m)\frac{v^2}{L} = -N - (M+m)g \end{gathered}$$

da cui si ricava la velocità minima per avere il filo teso:

$$v_a = \sqrt{gL}$$

Per la conservazione dell'energia avremo che:

$$\frac{1}{2}(M+m)v_p^2 = \frac{1}{2}(M+m)v_a^2 + 2(M+m)gL$$

da cui:

$$\begin{aligned} v_p^2 &= v_a^2 + 4gL \\ v_p &= \sqrt{5gL} \\ v_{min} &= \frac{M+m}{m}\sqrt{5gL} = 619\ m/s \end{aligned}$$

Risposta alla domanda n. 4: La tensione N del filo subito dopo l'urto può essere calcolata considerando la seconda legge delle dinamica:

$$\begin{aligned} (M+m)\frac{v_p^2}{L} &= N - (M+m)g \\ N &= (M+m)\left(\frac{v_p^2}{L} + g\right) = 6(M+m)g = 60.0\ N \end{aligned}$$

Esercizio B: Elettromagnetismo

Risposta alla domanda n. 5: La carica totale della corona sferica è

$$Q = \frac{4}{3}\pi\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right).$$

Il campo elettrico è nullo per $r < R_1$, mentre all'esterno ($r > R_2$) è quello di una carica puntiforme Q posta nel centro:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\widehat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(R_2^3 - R_1^3\right)\frac{\widehat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

e per $R_1 < r < R_2$ è

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r^3 - R_1^3\right)\frac{\widehat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Risposta alla domanda n. 6: Assumendo un potenziale nullo all'infinito, il potenziale elettrostatico nella regione esterna alla corona sferica ($r > R_2$) è

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{(R_2^3 - R_1^3)}{r}$$

Risposta alla domanda n. 7: La velocità di fuga v_f è la velocità iniziale minima che la carica deve avere per riuscire ad allontanarsi indefinitamente dalla corona sferica. Il campo elettrostatico è conservativo, quindi

$$\begin{aligned} U_{R_2} + K_{R_2} &= U_\infty + K_\infty \\ U_\infty &= K_\infty = 0 \\ U_{R_2} &= qV(R_2) = \frac{q\rho}{3\varepsilon_0}\frac{(R_2^3 - R_1^3)}{R_2} \\ K_{R_2} &= \frac{1}{2}mv_f^2 \end{aligned}$$

da cui segue la velocità di fuga

$$v_f = \sqrt{-\frac{2}{m}\frac{q\rho}{3\varepsilon_0}\frac{\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{R_2}}$$

Risposta alla domanda n. 8: Se $v_i < v_f$ la carica raggiunge una distanza massima R_{max} finita il cui valore si ottiene dalla conservazione dell'energia

$$R_{max} = \frac{2q\rho R_2\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3\varepsilon_0 R_2 m v_i^2 + 2q\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)}$$

Risposta alla domanda n. 9: Applicando la seconda legge di Newton, sapendo che l'accelerazione centripeta è $a_c = v_2^2/R_3$, si ottiene

$$\frac{\mid q \mid \rho}{3\varepsilon_0}\frac{\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{R_3^2} = m\frac{v_2^2}{R_3}$$

da cui

$$v_2 = \sqrt{\frac{\mid q \mid \rho}{3\varepsilon_0 m}\frac{\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{R_3}}$$