

Prova scritta di FISICA

PER SCIENZE BIOLOGICHE MOLECOLARI A, B e C (ord. 509)
PER SCIENZE ECOLOGICHE E DELLA BIODIVERSITA' (ord. 509)
PER BIOLOGIA A, B e C (ord. 270)
(riservato a studenti lavoratori e fuori corso)
24.03.2011

Esercizio A: Meccanica

Si consideri un sistema costituito da una carrucola cilindrica piena di massa M e raggio R appesa al soffitto a cui sono collegati due corpi di massa, rispettivamente, m_1 e m_2 (con $m_1 > m_2$) tramite una fune ideale. All'inizio i due corpi si trovano in quiete alla stessa altezza h dal suolo.

Sapendo che la resistenza dell'aria è trascurabile e che la fune non scivola sulla carrucola, determinare:

Domanda n. 1: la velocità (modulo, direzione e verso) dei due corpi di massa m_1 e m_2 dopo uno spostamento verticale di un tratto L ;

Domanda n. 2: la velocità angolare della carrucola nello stesso istante;

Domanda n. 3: l'accelerazione (modulo, direzione e verso) dei due corpi di massa m_1 e m_2 ;

Domanda n. 4: la velocità dei due corpi nell'istante in cui arrivano al suolo se la fune si rompe dopo uno spostamento verticale di un tratto L rispetto alla posizione iniziale;

Domanda n. 5: la velocità angolare della carrucola negli istanti in cui i due corpi toccano il suolo.

Esercizio B: Elettromagnetismo

Un elettrone, posto nell'origine di un sistema di coordinate xyz , parte da fermo sottoposto ad un campo elettrico $\vec{E} = (-E, 0, 0)$, con $E > 0$, che agisce nella parte di spazio definita da $0 \leq x \leq D$. Dopo aver percorso un tratto D , entra in una zona ($x > D$) in cui al posto del campo elettrico \vec{E} agisce un campo magnetico $\vec{B} = (0, 0, B)$, con $B > 0$.

Domanda n. 6: Si calcoli l'energia cinetica dell'elettrone dopo che esso ha percorso una distanza D dal punto di partenza.

Domanda n. 7: Si dica perché nella zona in cui agisce il campo magnetico la traiettoria è circolare e se ne calcoli il raggio.

Domanda n. 8: Proseguendo nel suo moto, in una certa posizione e ad un certo istante l'elettrone si fermerà; calcolare le coordinate di tale posizione e l'istante relativo.

Soluzioni

Esercizio A: Meccanica

Risposta alla domanda n. 1: Poiché $m_1 > m_2$ il corpo 1 scende di un tratto L mentre il corpo 2 sale, sempre di L . L'energia meccanica del sistema costituito dai due corpi e dalla carrucola si conserva, quindi, ricordandosi che il sistema era inizialmente in quiete, si ottiene:

$$(m_1 + m_2)gh = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + m_2g(h + L) + m_1g(h - L)$$

dove I rappresenta il momento d'inerzia della carrucola rispetto al suo asse di rotazione e nel nostro caso vale $MR^2/2$. La fune è ideale e quindi inestensibile, per cui $|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = v$; inoltre $v = \omega R$ poiché la fune non scivola sulla carrucola. Sostituendo nell'equazione della conservazione dell'energia si ottiene

$$v = \sqrt{2gL \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + I/R^2}} = \sqrt{2gL \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}}$$

quindi, prendendo l'asse y orientato verso l'alto

$$\mathbf{v}_1 = -v\hat{y}, \quad \mathbf{v}_2 = v\hat{y}$$

Risposta alla domanda n. 2: Dalla soluzione del punto precedente segue che la velocità angolare della carrucola nello stesso istante è

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{2gL \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}}$$

Risposta alla domanda n. 3: Per determinare l'accelerazione dei due corpi 1 e 2 bisogna scrivere la seconda equazione di Newton per entrambi e l'equazione del momento torcente applicato alla carrucola. Prendendo l'asse y come nella risposta alla prima domanda e il corpo 1 a destra, si ottiene:

$$\begin{aligned} T_1 - m_1g &= m_1a_1 \\ T_2 - m_2g &= m_2a_2 \\ \tau &= (T_2 - T_1)R = I\alpha \end{aligned}$$

dove T_1 e T_2 sono le tensioni esercitate dalla fune, rispettivamente, sul corpo 1 e 2, mentre α rappresenta l'accelerazione angolare della carrucola.

Essendo la fune inestensibile $a_2 = -a_1 = a$, inoltre $a = -\alpha R$ poiché la fune non scivola sulla carrucola. Quindi si ottiene che

$$\begin{aligned} a &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + I/R^2}g = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}g \\ \mathbf{a}_1 &= -a\hat{y}, \quad \mathbf{a}_2 = a\hat{y} \end{aligned}$$

Risposta alla domanda n. 4: dopo la rottura della fune i due corpi sono soggetti unicamente alla forza di gravità. La velocità $v_{1,fin}$ e $v_{2,fin}$ con cui, rispettivamente, i corpi 1 e 2 raggiungono il suolo si ottiene dalla conservazione dell'energia meccanica

$$m_1 g (h - L) + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,fin}^2$$

$$m_2 g (h + L) + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 v_{2,fin}^2$$

da cui segue

$$v_{1,fin} = \sqrt{2g(h - L) + v_1^2} = \sqrt{2g \frac{h(m_1 + m_2 + M/2) - L(2m_2 + M/2)}{m_1 + m_2 + M/2}}$$

$$v_{2,fin} = \sqrt{2g(h + L) + v_2^2} = \sqrt{2g \frac{h(m_1 + m_2 + M/2) + L(2m_1 + M/2)}{m_1 + m_2 + M/2}}$$

Risposta alla domanda n. 5: Dal momento in cui la fune si rompe il momento torcente risultante sulla carrucola è nullo, quindi $\alpha = 0$ e ω rimane costante e uguale al valore nell'istante in cui si spezza la fune, valore già determinato al punto 2.

Esercizio B: Elettromagnetismo

Risposta alla domanda n. 6: L'elettrone, che parte da fermo nell'origine degli assi cartesiani xyz , ha un moto uniformemente accelerato lungo la direzione delle x positive, con accelerazione di modulo

$$a = \frac{eE}{m_e}$$

con $-e$ e m_e carica e massa dell'elettrone.

Per calcolare l'energia cinetica nel punto $(D,0,0)$ osservando che l'energia all'inizio è nulla (velocità nulla), per il Teorema dell'Energia cinetica, nella posizione D l'energia cinetica sarà uguale al lavoro compiuto dalla forza del campo e quindi l'elettrone avrà energia cinetica:

$$K = eED$$

Risposta alla domanda n. 7: Nella zona $x > D$ l'elettrone è sottoposta alla forza di Lorentz

$$\vec{F}_L = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

diretta inizialmente — cioè appena l'elettrone entra nella zona di campo magnetico — verso le y positive. Essendo questa forza sempre perpendicolare alla velocità e di modulo costante, il moto non può che essere circolare uniforme, e si svolge nel piano xy ; il raggio è calcolabile applicando la seconda legge di Newton:

$$ev_D B = \frac{m_e v_D^2}{R}$$

$$R = \frac{m_e v_D}{eB}$$

v_D può essere ricavato dalla risposta precedente come:

$$v_D = \sqrt{\frac{2K}{m_e}} = \sqrt{\frac{2eED}{m_e}}$$

da cui segue

$$R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_e ED}{e}}$$

Risposta alla domanda n. 8: L'elettrone percorre un tratto D lungo l'asse x , si sposta verso le y positive con una traiettoria circolare di raggio R e alle coordinate $(2R, D, 0)$ rientra nella regione del campo elettrico con la velocità diretta lungo le x negative per ripercorrere un tratto rettilineo lungo D prima di fermarsi.

Quindi le coordinate in cui la velocità è nulla saranno $(2R, D, 0)$ e per avere l'istante in cui si ferma è necessario calcolare i tempi di percorrenza dei tre tratti.

Nel primo tratto, da 0 a D lungo x :

$$D = \frac{1}{2} \frac{eE}{m_e} t_1^2$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2m_e D}{eE}}$$

Il secondo tratto, quello semicircolare, è percorso con un tempo pari a metà periodo del moto circolare:

$$t_2 = \frac{T}{2}$$

$$T = \frac{2\pi m_e}{eB}$$

$$t_2 = \frac{\pi m_e}{eB}$$

Nel terzo tratto, lungo come il primo, anche il modulo dell'accelerazione sarà lo stesso (del primo), anche se tale accelerazione è frenante, perciò

$$t_3 = t_1$$

In definitiva l'istante a cui l'elettrone si ferma risulta essere

$$t = \frac{\pi m_e}{eB} + 2\sqrt{\frac{2m_e D}{eE}}$$