

Prova scritta di FISICA

PER SCIENZE BIOLOGICHE MOLECOLARI A, B e C (ord. 509)
PER SCIENZE ECOLOGICHE E DELLA BIODIVERSITA' (ord. 509)
PER BIOLOGIA A, B e C (ord. 270)
23.06.2011

Esercizio A: Meccanica

Un cubo di massa m_1 è in quiete su un piano orizzontale scabro. Il cubo è collegato tramite un filo ideale inestensibile (passante da una carrucola ideale di massa nulla) ad un corpo di massa m_2 appeso verticalmente nel vuoto.

Domanda n. 1: Determinare il valore minimo del coefficiente di attrito statico $\mu_{s,min}$ tra il piano e il corpo necessario per mantenere il sistema in equilibrio.

Se $\mu_s < \mu_{s,min}$ e il coefficiente di attrito dinamico è μ_d , determinare:

Domanda n. 2: l'accelerazione del corpo di massa m_2 ;

Domanda n. 3: dopo quanto tempo il corpo di massa m_2 è sceso di un tratto h ;

Domanda n. 4: la sua velocità in questo stesso istante;

Domanda n. 5: il lavoro totale sul corpo di massa m_1 nello stesso spostamento h .

Esercizio B: Elettromagnetismo

Una sfera cava di materiale conduttore ha raggio interno r_1 e raggio esterno $r_2 = 2r_1$. Su di essa è depositata una carica Q .

Domanda n. 6: Esprimere il modulo del campo elettrico generato dalla sfera in funzione della distanza dal suo centro.

Domanda n. 7: Trovare la densità di carica superficiale ρ_1 e ρ_2 presenti sulla superficie interna e su quella esterna, ed esprimere la relazione tra il campo elettrico nelle vicinanze delle due superfici e ρ_1 e ρ_2 .

Domanda n. 8: Trovare l'espressione del potenziale elettrico generato dalla sfera in funzione della distanza dal suo centro.

Una carica q_1 avente massa m_1 viene posta alla distanza $x = 10r_2$ dal centro della sfera con velocità iniziale diretta verso la sfera di modulo v_1 .

Domanda n. 9: Si calcoli il valore minimo di v_1 affinché la carica q_1 possa arrivare nel centro della sfera (supponendo che la sfera possa essere attraversata senza attrito).

Domanda n. 10: Se si verifica la situazione della domanda precedente e la carica q_1 prosegue, con quale velocità arriverà a distanza infinita dalla sfera?

Domanda n. 11: Risolvere le domande precedenti, assumendo i seguenti valori numerici: $Q = 10^{-5} C$, $q_1 = 0.1 \mu C$, $m_1 = 10^{-6} kg$, $r_1 = 0.5 m$.

Soluzioni

Esercizio A: Meccanica

Risposta alla domanda n. 1: Siccome il sistema è in equilibrio, sia la risultante delle forze applicate al corpo di massa m_1 che quella delle forze applicate al corpo di massa m_2 devono essere nulle; per il corpo 1 si ottiene quindi:

$$f_s = T, \quad m_1 g = N$$

dove f_s e N sono, rispettivamente, la forza di attrito statico e la reazione normale del piano orizzontale mentre T rappresenta la tensione del filo; per il corpo 2 si ha:

$$m_2 g = T$$

Da queste equazioni, ricordando che $f_s \leq \mu_s N$, si ottiene il valore minimo del coefficiente di attrito statico $\mu_{s,min}$ necessario per mantenere l'equilibrio:

$$\mu_{s,min} \geq \frac{m_2}{m_1}$$

Risposta alla domanda n. 2: Se $\mu_s < \mu_{s,min}$ i due corpi non possono rimanere in equilibrio, e per determinare l'accelerazione con cui si muovono basta applicare la seconda legge di Newton.

Prendendo l'asse x parallelo al piano orizzontale e orientato nel senso del moto del corpo 1 e l'asse y verticale e orientato verso il basso, si ottiene per il corpo 1:

$$T - f_d = m_1 a_1, \quad m_1 g = N$$

dove f_d è la forza di attrito dinamico; mentre per il corpo 2:

$$m_2 g - T = m_2 a_2$$

Inoltre dall'ineestensibilità del filo segue che $a_1 = a_2$.

Da queste relazioni, ricordando che $f_d = \mu_d N$ si ottiene l'accelerazione con cui si muovono i due corpi

$$a = g \frac{m_2 - \mu_d m_1}{m_1 + m_2}$$

Risposta alla domanda n. 3: Il corpo 2 si muove di moto uniformemente accelerato, quindi il tempo impiegato a scendere di un tratto h è semplicemente

$$t_h = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{2h \frac{m_1 + m_2}{g(m_2 - \mu_d m_1)}}$$

Risposta alla domanda n. 4: La velocità del corpo 2 dopo uno spostamento h dalla posizione iniziale si ottiene, analogamente al punto precedente, applicando le leggi del moto rettilineo uniformemente accelerato

$$v_2 = at_h = \sqrt{2ah} = \sqrt{2gh \frac{m_2 - \mu_d m_1}{m_1 + m_2}}$$

Risposta alla domanda n. 5: Il lavoro totale fatto sul corpo 1 si può calcolare banalmente applicando il teorema delle forze vive e tenendo conto che i due corpi si muovono ad ogni istante con la stessa velocità grazie all'ineestensibilità del filo che li unisce. Quindi:

$$W_{tot} = \Delta K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_2^2 = m_1 g h \frac{m_2 - \mu_d m_1}{m_1 + m_2}$$

Esercizio B: Elettromagnetismo

Risposta alla domanda n. 6: La evidente simmetria sferica della sorgente permette di utilizzare il teorema di Gauss per calcolare il modulo del campo elettrico nei diversi punti dello spazio. Il campo è sempre diretto radialmente dal centro della sfera, e per esprimere il modulo è necessario distinguere le tre regioni dello spazio delimitate da r_1 e r_2 . Inoltre, per le proprietà dei mezzi conduttori, in condizioni stazionarie non vi può essere campo all'interno della sfera.

$$\begin{aligned} E(x) &= 0 & x < r_1 \\ E(x) &= 0 & r_1 < x < r_2 \\ E(x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2} & x > r_2 \end{aligned}$$

Risposta alla domanda n. 7:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 0 \\ \rho_2 &= \frac{Q}{4\pi r_2^2} = 7.96 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}^2 \end{aligned}$$

Nelle vicinanze di r_2 si ha:

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2} = \frac{\rho_2}{\epsilon_0} \frac{r_2^2}{x^2} \sim \frac{\rho_2}{\epsilon_0}$$

Risposta alla domanda n. 8: Per il calcolo del potenziale occorre stabilire il punto di riferimento (in cui vale $V = 0$): in questo caso si può scegliere un qualunque punto a distanza molto grande (infinita) dal centro della sfera. Partendo quindi da valori di x maggiori di r_2 , integrando l'espressione del campo elettrico, si ottiene per il potenziale $V(x)$:

$$\begin{aligned} V(\infty) &= 0 \\ V(x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x} & x > r_2 \\ V(r_2) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_2} \\ V(x) &= V(r_2) & x < r_2 \end{aligned}$$

Risposta alla domanda n. 9: Applicando la conservazione dell'energia si ha:

$$\begin{aligned} q_1 V(0) &= \frac{1}{2} m_1 v_{min}^2 + q_1 V(10r_2) \\ v_{min} &= \sqrt{\frac{2q_1}{m_1} [V(0) - V(10r_2)]} \\ v_{min} &= \sqrt{\frac{2q_1}{m_1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_2} \frac{9}{10}} = 127 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Risposta alla domanda n. 10:

$$\begin{aligned} q_1 V(0) &= \frac{1}{2} m_1 v_{\infty}^2 \\ v_{\infty} &= \sqrt{\frac{2q_1}{m_1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_2}} = 134 \text{ m/s} \end{aligned}$$