

Prova scritta di FISICA
PER SCIENZE BIOLOGICHE MOLECOLARI A, B e C (ord. 509)
PER SCIENZE ECOLOGICHE E DELLA BIODIVERSITA' (ord. 509)
PER BIOLOGIA A, B e C (ord. 270)
14.09.2011

Esercizio A: Meccanica

Un corpo puntiforme di massa $m_1 = 2 \text{ kg}$, inizialmente fermo nel punto più alto di un piano inclinato (lunghezza $L = 10 \text{ m}$, angolo rispetto all'orizzontale $\alpha = 60^\circ$, nessun attrito), viene lasciato libero di cadere.

Domanda n. 1: Determinare il modulo della velocità con cui m_1 raggiunge la base del piano inclinato.

Alla fine del piano inclinato, il corpo prosegue su un tratto orizzontale (sempre privo di attrito), e urta un secondo corpo ($m_2 = m_1$, inizialmente fermo) in modo **parzialmente anelastico**; dopo l'urto, i due corpi proseguono nella stessa direzione rispettivamente con velocità v_1 e $v_2 = kv_1$.

Domanda n. 2: Calcolare v_1 e v_2 in funzione del parametro k .

Domanda n. 3: Calcolare la perdita relativa di energia cinetica $(K_i - K_f)/K_i$ in funzione del parametro k .

Si assuma ora $k = 4$. Il secondo corpo prosegue e inizia a risalire su un secondo piano inclinato (angolo rispetto all'orizzontale $\beta = 30^\circ$, coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.5$).

Domanda n. 4: Calcolare lo spazio L_2 percorso dal secondo corpo prima di fermarsi sul piano inclinato.

Si supponga che il piano inclinato termini prima che il corpo si fermi: in questo caso il secondo corpo prosegue in aria, partendo dal punto terminale del piano inclinato con velocità v_f .

Domanda n. 5: Si calcoli il rapporto R tra la minima energia cinetica del corpo durante la caduta in aria e l'energia cinetica posseduta al momento del distacco dal piano inclinato.

Esercizio B: Elettromagnetismo

Si consideri il sistema costituito da due solenoidi cilindrici ideali di lunghezza infinita e coassiali di raggi R_1 e R_2 (con $R_1 > R_2$), numero di spire per unità di lunghezza n_1 e n_2 (con $n_1 > n_2$), e percorsi da corrente i_1 e $i_2 = -i_1$.

Domanda n. 6: Determinare il modulo B del campo magnetico in tutto lo spazio.

Una carica puntiforme q di massa m inizia a muoversi con velocità iniziale \mathbf{v}_0 da un punto posto sull'asse dei solenoidi.

Determinare:

Domanda n. 7: come cambia nel tempo il modulo della velocità della carica e la traiettoria descritta se la velocità iniziale è parallela all'asse;

Domanda n. 8: il raggio e il passo della traiettoria elicoidale se la velocità iniziale è inclinata di un angolo ϕ rispetto all'asse;

Domanda n. 9: il valore massimo v_0 del modulo della velocità iniziale (nel caso in cui sia inclinata di un angolo ϕ rispetto all'asse) affinché la carica non urti contro il solenoide interno;

Domanda n. 10: l'accelerazione (modulo, direzione e verso) della carica, trascurando l'attrito dell'aria.

Soluzioni

Esercizio A: Meccanica

Risposta alla domanda n. 1: Applicando la conservazione dell'energia meccanica, per la velocità v_b con cui il primo corpo raggiunge la base del piano inclinato si ha:

$$E = m_1gh = \frac{1}{2}mv_b^2$$
$$v_b = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gL \sin \alpha} = 13 \text{ m/s}$$

Risposta alla domanda n. 2: Nell'urto si conserva la quantità di moto totale; imponendo le relazioni tra v_2 e v_1 e tra le masse, si ha:

$$m_1v_b = m_1v_1 + m_2v_2$$
$$v_b = (1 + k)v_1$$
$$v_1 = \frac{1}{1 + k}v_b$$
$$v_2 = \frac{k}{1 + k}v_b$$

Risposta alla domanda n. 3:

$$K_i = \frac{1}{2}m_1v_b^2$$
$$K_f = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1\frac{1}{(1 + k)^2}v_b^2 + \frac{1}{2}m_2\frac{k^2}{(1 + k)^2}v_b^2$$
$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{1 + k^2}{(1 + k)^2}$$
$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{2k}{(1 + k)^2}$$

Risposta alla domanda n. 4: Utilizzando $k = 4$ si trova la velocità iniziale del secondo corpo al momento di risalire il secondo piano inclinato:

$$v_2 = \frac{4}{5}v_b = 10.4 \text{ m/s}$$

Per il bilancio energetico, tenuto conto del lavoro delle forze di attrito, si ha:

$$|F_a| = \mu mg \cos \beta$$
$$L_{attr} = -\mu mgL_2 \cos \beta$$
$$E_{in} = \frac{1}{2}m_2v_2^2$$
$$E_{fin} = m_2gL_2 \sin \beta$$
$$L_2 = \frac{v_2^2}{2g(\sin \beta + \mu \cos \beta)} = 5.9 \text{ m}$$

Risposta alla domanda n. 5: Nella caduta in aria, la minima energia cinetica si ha quando il corpo ha solo la componente orizzontale della velocità; indicando con v_f il modulo della velocità del secondo corpo al momento del distacco dal piano inclinato:

$$|v_{min}| = v_f \cos \beta$$
$$R = (\cos \beta)^2 = 0.75$$

Esercizio B: Elettromagnetismo

Risposta alla domanda n. 6: All'interno di un solenoide il campo magnetico è uniforme e diretto parallelamente all'asse. In questo caso, si possono individuare tre regioni dello spazio, e per il modulo si ha:

$$\begin{cases} B = \mu_0 i_1 (n_1 - n_2) & \text{per } r < R_2 \\ B = \mu_0 n_1 i_1 & \text{per } R_2 < r < R_1 \\ B = 0 & \text{per } R_1 < r \end{cases}$$

Risposta alla domanda n. 7: Poiché la velocità iniziale della carica è parallela all'asse dei solenoidi e quindi al campo magnetico, la forza esercitata dal campo sulla carica è nulla, di conseguenza la carica si muove di moto rettilineo uniforme lungo l'asse con velocità $\mathbf{v}(\mathbf{t}) = \mathbf{v}_0$.

Risposta alla domanda n. 8: In questo caso la carica descrive una traiettoria elicoidale data dalla composizione di un moto rettilineo uniforme con velocità $v_{\parallel} = v_0 \cos \phi$ nella direzione parallela all'asse e da un moto circolare uniforme perpendicolarmente all'asse di raggio

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv_0 \sin \phi}{q\mu_0 i_1 (n_1 - n_2)}$$

e periodo

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB}$$

Il passo è la distanza percorsa lungo la direzione dell'asse nel tempo necessario a compiere una rotazione completa, e vale pertanto

$$\Delta x = v_{\parallel} T = \frac{2\pi}{\mu_0 q i_1 (n_1 - n_2)} \frac{mv_0 \cos \phi}{q}$$

Risposta alla domanda n. 9: Affinchè la carica non urti contro il solenoide interno, il raggio R calcolato nel punto precedente deve essere minore di $R_2/2$, da cui segue che

$$v_0 < \frac{R_2 q \mu_0 i_1 (n_1 - n_2)}{2m \sin \phi}$$

Risposta alla domanda n. 10: L'accelerazione della carica si ottiene utilizzando la forza di Lorentz

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

da cui segue che l'accelerazione è ortogonale all'asse dei solenoidi e diretta verso l'asse stesso (centripeta) con modulo costante

$$a = \frac{qv_0 \sin \phi \mu_0 i_1 (n_1 - n_2)}{m}$$