

Prova scritta di FISICA
PER SCIENZE BIOLOGICHE MOLECOLARI A, B e C (ord. 509)
PER SCIENZE ECOLOGICHE E DELLA BIODIVERSITA' (ord. 509)
PER BIOLOGIA A, B e C (ord. 270)
17.01.2012

Esercizio A: Meccanica

Un corpo puntiforme di massa m si trova inizialmente nel punto di coordinate $P = [0, 0, h]$ con velocità nulla. Il corpo è sottoposto ad un campo di forza uniforme descritto dal vettore $\vec{F}_1 = 3d\hat{i} + 4d\hat{j} + 0\hat{k}$ (con \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} versori diretti lungo gli assi x , y e z), che agisce per l'intervallo di tempo $0 \leq t \leq T$, poi cessa definitivamente la sua azione.

Domanda n. 1: Calcolare il modulo del vettore accelerazione agente sul corpo m al tempo $t = 0$.

Domanda n. 2: Calcolare il modulo del vettore velocità che il corpo m ha all'istante $t = T$. Ad un certo istante, successivo a T , il corpo m urta con un urto completamente anelastico un'altro corpo di massa M inizialmente fermo.

Domanda n. 3: Si calcoli il vettore velocità dei due corpi dopo l'urto.

Successivamente i due corpi entrano in una regione dove agisce una forza descritta dal vettore $\vec{F}_2 = 0\hat{i} + 0\hat{j} - G\hat{k}$, e raggiungono un punto di coordinate $R = [a, b, 0]$.

Domanda n. 4: Esprimere la relazione tra le coordinate a e b .

Domanda n. 5: Calcolare il lavoro compiuto dalla forza F_2 sui due corpi dall'inizio della sua azione sino a quando i due raggiungono il punto R .

Esercizio B: Elettromagnetismo

Il circuito elettrico mostrato in figura si compone delle resistenze R_1 e R_2 , dei condensatori C_1 e C_2 e di un generatore di tensione V_0 .

Inizialmente il generatore è connesso al circuito (con i due deviatori posti come in figura), e il circuito raggiunge lo stato stazionario.

In questa condizione calcolare:

Domanda n. 6: la potenza totale dissipata per effetto Joule nel circuito;

Domanda n. 7: la differenza di potenziale ai capi del condensatore C_1 ;

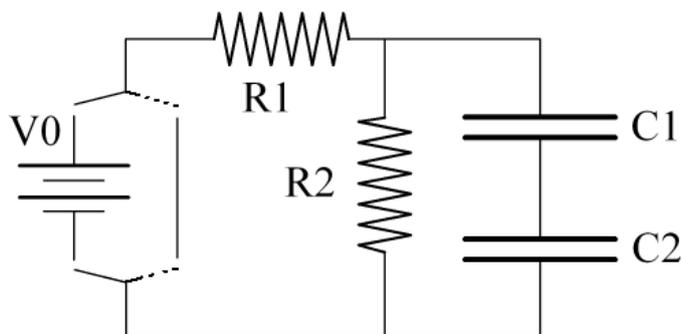
Domanda n. 8: la carica sulle armature del condensatore C_2 .

Ad un certo istante i due deviatori sono posti in modo da escludere il generatore di tensione e chiudere il circuito su un tratto di conduttore di resistenza trascurabile.

Domanda n. 9: Calcolare il tempo necessario affinché la tensione ai capi della resistenza R_1 si riduca a metà del valore iniziale.

Domanda n. 10: Calcolare l'energia complessiva dissipata durante la scarica.

Domanda n. 11: Risolvere le domande precedenti, assumendo i seguenti valori numerici: $R_1 = 4 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 12 \text{ k}\Omega$, $C_1 = 0.2 \text{ mF}$, $C_2 = 0.8 \text{ mF}$, $V_0 = 120 \text{ V}$.



Soluzioni

Esercizio A: Meccanica

Risposta alla domanda n. 1: Nella prima zona, il corpo m è sottoposto ad una forza costante in una direzione posta nel piano $[x, y]$; utilizzando queste coordinate, l'accelerazione risulta:

$$a_x = \frac{3d}{m} \quad a_y = \frac{4d}{m} \quad a_z = 0 \quad (1)$$

$$|\vec{a}| = \frac{5d}{m} \quad (2)$$

Risposta alla domanda n. 2: Le leggi orarie sono ottenibili dalle equazioni (1):

$$v_x(t) = \frac{3d}{m}t \quad v_y(t) = \frac{4d}{m}t \quad v_z(t) = 0 \quad (3)$$

$$x(t) = \frac{3}{2} \frac{d}{m}t^2 \quad y(t) = \frac{4}{2} \frac{d}{m}t^2 \quad z(t) = h \quad (4)$$

$$|\vec{v}(t)| = \frac{5d}{m}t \quad (5)$$

da cui:

$$|\vec{v}(T)| = \frac{5d}{m}T \quad (6)$$

Risposta alla domanda n. 3: La velocità che il corpo m ha prima dell'urto è data proprio dalla equazione (6). Poiché nell'urto si conserva la quantità di moto totale, si ha:

$$m\vec{v} = (m + M)\vec{v}_2 \quad (7)$$

$$\vec{v}_2 = \left[\frac{3d}{m + M}T, \frac{4d}{m + M}T, 0 \right] \quad (8)$$

$$|\vec{v}_2| = \frac{m}{m + M} \frac{5d}{m}T = \frac{5d}{m + M}T \quad (9)$$

dove \vec{v}_2 indica la velocità dei due corpi (uniti) dopo l'urto.

Il carattere vettoriale dell'equazione (7) permette di affermare che i due corpi uniti continuano a muoversi nella stessa direzione in cui si muoveva il corpo m prima dell'urto nel piano. Le equazioni (4) mostrano una relazione fissa tra le coordinate x e y , e questa caratteristica non viene modificata dalla forza \vec{F}_2 , dato che essa ha componenti solo lungo z , quindi:

Risposta alla domanda n. 4: La relazione tra le coordinate x e y è data dalla espressione:

$$b = \frac{4}{3}a \quad (10)$$

Risposta alla domanda n. 5: Il lavoro della forza \vec{F}_2 nel percorso seguito dai due corpi è calcolabile dall'integrale del prodotto scalare del vettore forza con il vettore \vec{r} che ne descrive in ogni istante la posizione. Questa operazione si semplifica notevolmente dato che la forza ha solo una componente costante diretta lungo z , da cui:

$$L = \vec{F}_2 \Delta \vec{r} = F_2(z)(z_{fin} - z_{in}) = -G(0 - h) = Gh$$

Esercizio B: Elettromagnetismo

Risposta alla domanda n. 6: In condizioni stazionarie la potenza dissipata per effetto Joule nel circuito è:

$$W = V_0 I = \frac{V_0^2}{R_1 + R_2}$$

Risposta alla domanda n. 7: La differenza di potenziale ai capi del ramo che comprende i due condensatori è:

$$V^* = V_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (11)$$

e la differenza di potenziale ai capi di ciascun condensatore è ricavabile tenendo conto della composizione in serie di due condensatori; indicando con V_1 la tensione ai capi di C_1 si ha:

$$V_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} V^*$$
$$V_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_0$$

Risposta alla domanda n. 8: Per il modulo della carica Q presente sui condensatori si ha:

$$Q = Q_1 = Q_2$$
$$Q = C_1 V_1$$
$$Q_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_0$$

Risposta alla domanda n. 9: Quando i due deviatori sono posti ad escludere il generatore, il circuito evolve come un circuito RC con condensatore inizialmente carico. La resistenza del circuito è la resistenza equivalente al parallelo tra R_1 e R_2 , e la capacità è la capacità equivalente alla serie tra i due condensatori. Il tempo necessario affinché la tensione dimezzi è dato da:

$$t^* = \tau \ln(2) = 0.69\tau$$
$$\tau = RC = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Risposta alla domanda n. 10: L'energia complessiva dissipata nel circuito durante la scarica corrisponde alla energia immagazzinata inizialmente nei due condensatori.

$$W_d = \frac{1}{2} C (V^*)^2 = \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)^2 V_0^2$$

Risposta alla domanda n. 11:

$$W = 0.9 W$$
$$V_1 = 72 V$$
$$Q_2 = 14.4 mC$$
$$t^* = 0.33 s$$
$$W_d = 0.648 W$$