

Problema 1

Un corpo di massa m_1 scivola lungo una guida liscia inclinata di un angolo ϑ rispetto al piano orizzontale. Nell'istante iniziale il corpo si trova in cima alla guida ad un'altezza h dal piano orizzontale e si muove con velocità di modulo v_0 . Determinare:

- 1) il lavoro compiuto dalla forza di gravità nel tratto che va dal punto di partenza alla fine della guida;
- 2) il modulo della velocità del corpo di massa m_1 alla fine della guida.

Al termine della guida, il corpo prosegue il suo moto lungo il piano orizzontale in assenza di attrito e urta in modo completamente anelastico un secondo corpo di massa m_2 inizialmente in quiete. Dopo l'urto i due corpi proseguono il loro moto e incontrano, restandovi agganciati, l'estremo libero di una molla ideale di costante elastica k con l'altra estremità fissata ad un muro. Determinare:

- 3) la velocità dei due corpi subito dopo l'urto;
- 4) l'ampiezza di oscillazione;
- 5) la massima velocità dei due corpi durante il moto oscillatorio.

Problema 2

Si consideri una configurazione costituita da due gusci sferici sottili, concentrici e isolanti di raggio R_1 e R_2 (con $R_2 > R_1$). Sul guscio interno è presente una carica con densità superficiale costante $\sigma_1 > 0$ e su quello esterno una carica con densità superficiale costante $\sigma_2 > 0$. Determinare:

- 6) il campo elettrico (modulo, direzione e verso) in tutto lo spazio;
- 7) la differenza di potenziale $V(r_f) - V(r_i)$ tra due punti a distanza r_i e r_f (con $r_f > r_i > R_2$) dal centro dei due gusci sferici.

Una carica puntiforme $q > 0$ di massa m inizialmente in quiete a distanza $r_i > R_2$ dal centro dei due gusci sferici, viene lasciata libera di muoversi. Determinare:

- 8) la sua accelerazione iniziale e quella quando arriva a distanza r_f dal centro;
- 9) la sua velocità quando arriva a distanza r_f dal centro;
- 10) il lavoro compiuto dal campo elettrico nel tragitto tra i punti r_i e r_f .

Soluzioni

Problema I

1) Il lavoro compiuto dalla forza di gravità è

$$W_g = -\Delta U = m_1gh$$

2) Il modulo della velocità alla fine della guida si ottiene facilmente applicando il principio di conservazione dell'energia

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

3) La velocità V dei due corpi subito dopo l'urto si ottiene applicando il principio di conservazione della quantità di moto

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

4) Applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica si ottiene l'ampiezza di oscillazione A

$$A = \frac{V}{\omega} = m_1\sqrt{\frac{v_0^2 + 2gh}{k(m_1 + m_2)}}$$

5) la velocità massima è quella nel punto di equilibrio:

$$v_{max} = V = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

Problema II

6) Sui due gusci è depositata una carica, rispettivamente, $q_1 = 4\pi\sigma_1R_1^2$ e $q_2 = 4\pi\sigma_2R_2^2$. All'interno del guscio più piccolo ($r \leq R_1$) il campo è nullo. Tra i due gusci ($R_1 \leq r \leq R_2$) coincide con quello generato da una carica puntiforme q_1 posta nel centro, mentre all'esterno ($r \geq R_2$) con quello di una carica $q_1 + q_2$. Quindi, per $R_1 < r < R_2$ il campo elettrico è

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_1R_1^2}{\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

e per $r \geq R_2$:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_1R_1^2 + \sigma_2R_2^2}{\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

7) la differenza di potenziale tra due punti all'esterno del guscio più grande è

$$V(r_f) - V(r_i) = \frac{\sigma_1R_1^2 + \sigma_2R_2^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right)$$

8) L'accelerazione della carica in un punto a distanza r_i è

$$\mathbf{a}_i = \frac{q}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}_i) = \frac{q}{m} \frac{\sigma_1R_1^2 + \sigma_2R_2^2}{\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r_i^2}$$

mentre a distanza r_f è

$$\mathbf{a}_f = \frac{q}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}_f) = \frac{q}{m} \frac{\sigma_1R_1^2 + \sigma_2R_2^2}{\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r_f^2}$$

9) la velocità della carica nel punto finale si ottiene applicando il principio di conservazione dell'energia

$$v_f = \sqrt{\frac{2q}{m} (V(r_i) - V(r_f))} = \sqrt{\frac{2q}{m} \left(\frac{\sigma_1R_1^2 + \sigma_2R_2^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} \right) \right)}$$

10) Il lavoro compiuto dal campo elettrico è

$$W_E = -\Delta U = -q(V(r_f) - V(r_i)) = -q \frac{\sigma_1R_1^2 + \sigma_2R_2^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right)$$