

**Problema 1 - Meccanica**

Due corpi di massa, rispettivamente,  $m_1$  e  $m_2$  (con  $m_1 > m_2$ ) sono appesi tramite una fune ideale a una carrucola cilindrica piena di massa  $M$  e raggio  $R$  appesa al soffitto. Nell'istante iniziale i due corpi sono in quiete alla stessa altezza  $h$  dal suolo. Sapendo che la resistenza dell'aria è trascurabile e che la fune non scivola sulla carrucola, determinare:

- 1) l'accelerazione (modulo, direzione e verso) dei due corpi di massa  $m_1$  e  $m_2$ ;
- 2) il lavoro compiuto dalla tensione della fune sul corpo 1 dopo uno spostamento verticale di un tratto  $L$  rispetto alla posizione iniziale;
- 3) in quanto tempo il corpo 2 sale di un tratto  $L$  rispetto alla posizione iniziale;
- 4) l'energia cinetica della carrucola nell'istante in cui il corpo 1 è sceso di un tratto  $L$ ;
- 5) la velocità del corpo 2 nello stesso istante.

**Problema 2 - Elettrostatica**

Su due gusci sferici sottili concentrici, non conduttori, di raggio  $R_1$  e  $R_2$  (con  $R_1 < R_2$ ) è depositata una carica positiva con densità superficiale costante, rispettivamente,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . Nel centro si trova una carica puntiforme positiva  $q_0$ . Determinare:

- 6) il campo elettrico in tutto lo spazio;
- 7) il potenziale elettrico nella regione esterna al guscio più grande (con  $r > R_2$ ), ponendo lo zero del potenziale all'infinito;
- 8) il potenziale elettrico sul guscio interno ( $V(R_1)$ );
- 9) l'energia potenziale elettrica di una carica puntiforme  $q_3$  in un punto a distanza  $r = R_1/2$  dal centro;
- 10) il lavoro compiuto dal campo elettrico nello spostamento della carica  $q_3$  da un punto a distanza  $2R_2$  dal centro a uno a distanza  $4R_2$ .

## Soluzioni

### Problema 1

1) Poiché  $m_1 > m_2$  l'accelerazione del corpo 1 è verso il basso; mentre quella del corpo 2 verso l'alto. Il modulo, uguale per i due corpi, vale

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + I/R^2}g = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}g$$

2) il lavoro compiuto dalla tensione sul corpo 1 è

$$W = \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{L} = -T_1 L = -L m_1 g \frac{2m_2 + I/R^2}{m_1 + m_2 + I/R^2} = -L m_1 g \frac{4m_2 + M}{2m_1 + 2m_2 + M}$$

3) il corpo 2 sale con l'accelerazione costante  $a$  trovata al punto 1, quindi per spostarsi di un tratto  $L$  impiega un tempo

$$t_L = \sqrt{\frac{2L}{a}}$$

4) nello stesso istante l'energia cinetica della carrucola è

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{M L a}{2} = M L g \frac{m_1 - m_2}{2m_1 + 2m_2 + M}$$

5) la velocità del corpo 2, rivolta verso l'alto, ha modulo

$$v = \sqrt{2La} = \sqrt{2gL \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + I/R^2}} = \sqrt{2gL \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}}$$

### Problema 2

6) Il campo elettrico è radiale e vale: per  $r \geq R_2$

$$\mathbf{E} = \frac{q_0 + q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

per  $R_1 \leq r \leq R_2$

$$\mathbf{E} = \frac{q_0 + q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

per  $0 \leq r \leq R_1$

$$\mathbf{E} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

dove  $q_1 = 4\pi\sigma_1 R_1^2$  è la carica sul guscio 1 e  $q_2 = 4\pi\sigma_2 R_2^2$  quella sul guscio 2;

7) il potenziale in un punto a distanza  $r \geq R_2$  vale

$$V(r) = \frac{q_0 + q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

8) il potenziale sul guscio interno è

$$V(R_1) = \frac{q_0 + q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

9) l'energia potenziale è

$$U = q_3 V\left(\frac{R_1}{2}\right) = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2q_0 + q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2}\right)$$

10) il lavoro compiuto dal campo elettrico vale

$$W_E = -\Delta U = -q_3 \Delta V = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 + q_1 + q_2}{4R_2}$$