

Problema 1

Due molle ideali identiche di costante elastica k e lunghezza a riposo l_0 sono disposte verticalmente in parallelo con l'estremo inferiore fissato al pavimento e l'estremo superiore libero. Nell'istante iniziale un corpo di massa m si trova ad un'altezza h dall'estremo libero delle molle con una velocità v_0 diretta verticalmente verso il basso. Ad un certo istante il corpo urta l'estremo libero delle molle e vi rimane agganciato, determinare:

- 1) la massima compressione della molla;
- 2) la posizione di equilibrio del corpo;
- 3) l'energia cinetica massima del corpo finché rimane agganciato alla molla;
- 4) il periodo di oscillazione;
- 5) la massima altezza che raggiungerebbe il corpo se non rimanesse agganciato alla molla.

Problema 2

Si consideri un condensatore piano con armature quadrate di area A distanti tra loro d ($d \ll \sqrt{A}$). Una carica puntiforme $q > 0$ di massa m entra nel condensatore ad una distanza $d/2$ dalle armature e con una velocità iniziale v_0 diretta parallelamente ad un lato delle armature. Sapendo che la carica urta l'armatura superiore in un punto che dista L dalla proiezione sull'armatura stessa della posizione iniziale della carica, determinare:

- 6) il modulo dell'accelerazione della carica;
- 7) il modulo del campo elettrico;
- 8) il lavoro compiuto dal campo elettrico sulla carica dall'istante in cui entra nel condensatore a quello in cui urta l'armatura superiore;
- 9) la carica sull'armatura superiore;
- 10) il valore (modulo, direzione e verso) del campo magnetico che bisognerebbe generare all'interno del condensatore affinché la carica continui a muoversi con velocità costante v_0 .

Soluzioni

Problema 1

1) Sia la forza di gravità che la forza elastica sono conservative, quindi l'energia meccanica del corpo si conserva. Ponendo l'origine dell'asse verticale y in corrispondenza dell'estremo libero delle due molle e chiamando d la massima compressione, si ha

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = 2\frac{1}{2}kd^2 - mgd$$

da cui

$$d = \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + 4k\left(\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh\right)}}{2k}$$

2) nella posizione di equilibrio la risultante delle forze applicate sul corpo è nulla, da cui

$$y_{eq} = -\frac{mg}{2k}$$

3) il corpo oscilla attorno alla posizione di equilibrio con un'energia cinetica data da

$$E_c = E - ky^2 - mgy = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh - ky^2 - mgy$$

dove E rappresenta l'energia meccanica totale. Il valore massimo dell'energia cinetica si ha in corrispondenza della posizione di equilibrio

$$E_{c,max} = E + \frac{m^2g^2}{4k} = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh + \frac{m^2g^2}{4k}$$

4) il periodo di oscillazione vale

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

5) l'altezza massima raggiunta dal corpo si ottiene con la conservazione dell'energia meccanica

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = mgh_{max}$$

da cui

$$h_{max} = h + \frac{v_0^2}{2g}$$

Problema 2

6) Il campo elettrico all'interno di un condensatore piano è uniforme e diretto perpendicolarmente alle armature, quindi la carica descrive una traiettoria parabolica. Prendendo l'asse x parallelo alla velocità iniziale della carica e l'asse y perpendicolare alle armature e diretto verso l'alto, con l'origine degli assi nel punto di partenza della carica, si ha

$$x(t) = v_0t; \quad y(t) = \frac{1}{2}at^2$$

Sapendo che ad un certo istante finale t_f la carica urta l'armatura superiore e quindi $x(t_f) = L$ e $y(t_f) = d/2$, si ottiene il valore dell'accelerazione

$$a = \frac{dv_0^2}{L^2}$$

7) Applicando la seconda legge di Newton

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = m\mathbf{a}$$

da cui sostituendo il valore dell'accelerazione si ottiene il valore del modulo del campo elettrico

$$E = \frac{mdv_0^2}{qL^2}$$

8) il lavoro compiuto dal campo elettrico vale

$$W_E = -\Delta U = -q\Delta V = qE\frac{d}{2} = \frac{md^2v_0^2}{2L^2}$$

9) Ricordando che il modulo del campo elettrico all'interno di un condensatore piano vale $E = \sigma/\varepsilon_0$, dove σ è la densità superficiale di carica, e tenendo conto che nel nostro caso il campo è orientato verso l'armatura superiore, si ottiene banalmente la carica sull'armatura superiore

$$Q = -\varepsilon_0AE = -\frac{\varepsilon_0Amdv_0^2}{qL^2}$$

10) La carica continua a muoversi con velocità costante se la forza esercitata dal campo magnetico è uguale ed opposta a quella del campo elettrico. Quindi il campo magnetico deve essere ortogonale sia al campo elettrico che alla velocità iniziale e orientato con un verso uscente dal foglio. Usando l'espressione della forza di Lorentz segue che il modulo deve valere

$$B = \frac{E}{v_0} = \frac{mdv_0}{qL^2}$$