

Problema 1

Un punto materiale di massa m inizia a muoversi da fermo dal punto più alto di una cupola emisferica di raggio R . Sapendo che il punto materiale è solo appoggiato sulla superficie esterna della cupola e trascurando sia la resistenza dell'aria che l'attrito con la superficie, determinare:

- 1) la velocità del punto in funzione dell'altezza h dalla base della cupola, finché il corpo rimane appoggiato alla superficie;
- 2) il modulo della forza normale N che la superficie esercita sul punto materiale (finché il corpo rimane appoggiato alla superficie stessa) in funzione dell'altezza h ;
- 3) l'altezza h_* in cui il punto materiale si stacca dalla superficie;
- 4) la componente orizzontale del vettore velocità del punto materiale nell'istante in cui tocca terra;
- 5) il modulo della velocità del punto materiale nell'istante in cui tocca terra.

Problema 2

Due cariche puntiformi $+Q$ e $-Q$ (con $Q > 0$) sono fissate nei punti di coordinate, rispettivamente, $(-a, 0)$ e $(+a, 0)$ (con $a > 0$). Calcolare:

- 6) l'energia elettrostatica del sistema;
- 7) il modulo del campo elettrico nei punti $A = (-2a, 0)$, $B = (0, 0)$ e $C = (0, \sqrt{3}a)$;
- 8) il potenziale elettrostatico negli stessi punti (assumendo potenziale nullo all'infinito);
- 9) il lavoro che bisogna compiere su una carica puntiforme $q > 0$ per spostarla dal punto A al B , sapendo che la carica è in quiete sia all'inizio che alla fine;
- 10) la velocità della carica puntiforme q (di massa m) nell'istante in cui arriva nel punto $D = (-4a, 0)$, sapendo che nell'istante iniziale si trova nel punto A con velocità iniziale nulla.

Soluzioni

Problema 1

1) Sul punto materiale, finché rimane appoggiato alla superficie della cupola, agiscono sia la forza di gravità che la forza di contatto normale N alla superficie. Possiamo quindi applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica da cui segue:

$$v = \sqrt{2g(R-h)}$$

2) Applicando la seconda legge di Newton si ottiene

$$N = m \left(g \cos \vartheta - \frac{v^2}{R} \right) = mg \frac{3h - 2R}{R}$$

essendo $h = R \cos \vartheta$.

3) l'altezza h_* in cui il punto materiale si stacca dalla superficie si ottiene cercando il punto in cui la forza di contatto si annulla ($N = 0$):

$$h_* = \frac{2}{3}R$$

4) dalla conservazione dell'energia meccanica segue che il modulo della velocità del corpo nell'istante in cui si stacca dalla superficie vale $v_* = \sqrt{\frac{2}{3}gR}$. Dall'istante in cui il corpo si stacca a quello in cui tocca terra, la componente orizzontale della velocità rimane costante. Quindi

$$v_{fin,x} = v_{*,x} = v_* \cos \vartheta_* = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2gR}{3}}$$

essendo $\cos \vartheta_* = \frac{h_*}{R} = \frac{2}{3}$.

5) Dalla conservazione dell'energia meccanica segue che quando tocca terra il corpo ha una velocità

$$v = \sqrt{2gR}$$

Problema 2

6) L'energia elettrostatica del sistema costituito dalle due cariche è

$$U = -\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

7) Il modulo del campo elettrico nei tre punti vale

$$E_A = \frac{2Q}{9\pi\epsilon_0 a^2}; \quad E_B = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2}; \quad E_C = \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 a^2}$$

8) il potenziale elettrostatico nei tre punti vale

$$V_A = \frac{Q}{6\pi\epsilon_0 a}; \quad V_B = 0; \quad V_C = 0$$

9) il lavoro vale

$$W = \Delta U = q\Delta V = q(V_B - V_A) = -q \frac{Q}{6\pi\epsilon_0 a}$$

10) Il modulo della velocità si ottiene applicando la conservazione dell'energia meccanica

$$v_D = \sqrt{\frac{2q(V_A - V_D)}{m}} = \sqrt{\frac{4qQ}{15\pi\epsilon_0 am}}$$

dove si è usato il valore del potenziale elettrostatico nel punto D

$$V_D = \frac{Q}{30\pi\epsilon_0 a}$$