

Problema 1

Due punti materiali di massa m_1 e m_2 sono vincolati a muoversi lungo una guida rettilinea orizzontale. Nell'istante iniziale i due corpi sono in quiete nei punti di coordinate, rispettivamente, $x_1 = 0$ e $x_2 = L$ (con $L > 0$). La guida è liscia per $x < x_A = 2L$ e scabra per $x \geq x_A$. Entrambi i corpi si muovono di moto rettilineo uniformemente accelerato, con accelerazione orientata verso destra. Sapendo che il modulo dell'accelerazione del corpo 2 vale a_2 , determinare:

- 1) il valore minimo dell'accelerazione a_1 che deve avere il corpo 1 per riuscire ad urtare il corpo 2 prima che quest'ultimo arrivi nel punto A ($x_A = 2L$);
- 2) le velocità v_1 e v_2 dei due corpi nell'istante immediatamente precedente all'urto tra i corpi stessi, assumendo che $a_1 = 7a_2$;
- 3) le velocità v_1 e v_2 dei due corpi nell'istante immediatamente successivo all'urto, assumendo che l'urto sia completamente anelastico e che le forze orizzontali che determinavano l'accelerazione svaniscano subito prima dell'urto;
- 4) il coefficiente di attrito dinamico μ_d , sapendo che i due corpi si fermano dopo aver percorso un tratto di lunghezza d a partire dal punto A;
- 5) l'accelerazione dei due corpi nel tratto scabro della guida.

Problema 2

Due gusci sferici sottili e concentrici di raggi, rispettivamente, R_1 e R_2 (con $R_1 < R_2$) sono uniformemente carichi. Sapendo che sul guscio 1 è distribuita una carica positiva con densità superficiale costante σ_1 e che il potenziale elettrostatico all'esterno del guscio 2 ($r \geq R_2$) è nullo, determinare:

- 6) la densità superficiale di carica σ_2 sul guscio 2;
- 7) il campo elettrico (modulo, direzione e verso) in tutto lo spazio;
- 8) il potenziale elettrostatico tra i due gusci ($R_1 \leq r \leq R_2$);
- 9) la velocità di una carica puntiforme $q > 0$ di massa m nell'istante in cui urta il guscio 2, sapendo che parte da ferma sul guscio 1;
- 10) la velocità che la carica puntiforme avrebbe a distanza infinita dal centro dei gusci se potesse attraversare indisturbata il guscio 2.

Soluzioni

Problema 1

1) I corpi si muovono di moto rettilineo uniformemente accelerato, per cui:

$$x_1(t) = \frac{1}{2}a_1t^2; \quad x_2(t) = L + \frac{1}{2}a_2t^2$$

L'istante t_* in cui i due corpi si urtano si trova imponendo che $x_1(t = t_*) = x_2(t = t_*)$. Il valore minimo dell'accelerazione $a_{1,min}$ è quello per cui l'urto tra i due corpi avviene esattamente nel punto A

$$a_{1,min} = 2a_2$$

2) utilizzando le leggi del moto rettilineo uniformemente accelerato si ottiene che i corpi si urtano nell'istante $t_* = \sqrt{\frac{L}{3a_2}}$ con velocità

$$v_1(t_*) = 7\sqrt{\frac{La_2}{3}}; \quad v_2(t_*) = \sqrt{\frac{La_2}{3}}$$

3) dalla conservazione della quantità di moto, tenendo conto che l'urto è completamente anelastico, segue che i due corpi subito dopo l'urto hanno velocità

$$V = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = \frac{7m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{La_2}{3}}$$

4) il coefficiente di attrito dinamico vale

$$\mu_d = \frac{V^2}{2gd} = \frac{La_2}{6gd} \left(\frac{7m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \right)^2$$

5) l'accelerazione dei due corpi nel tratto scabro vale

$$\mathbf{a} = -\mu_d g \hat{\mathbf{x}} = -\frac{La_2}{6d} \left(\frac{7m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \hat{\mathbf{x}}$$

Problema 2

6) la densità superficiale di carica sul guscio 2 vale

$$\sigma_2 = -\sigma_1 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2$$

7) Il campo elettrico è nullo sia all'interno del guscio 1, ossia per $0 \leq r \leq R_1$, che all'esterno del guscio 2 ($r \geq R_2$). Tra i due gusci ($R_1 \leq r \leq R_2$) vale

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\sigma_1 R_1^2}{\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

8) il potenziale elettrostatico tra i due gusci vale

$$V(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{\sigma_1 R_1^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)$$

9) l'energia meccanica della carica si conserva durante il moto, quindi

$$v = \sqrt{\frac{2q(V(R_1) - V(R_2))}{m}} = \sqrt{\frac{2q\sigma_1 R_1^2}{m\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}$$

10) all'esterno del guscio 2 il campo elettrico è nullo, quindi sulla carica non agiscono forze e la velocità rimane costante e uguale al valore trovato nel punto precedente.