Compito di Fisica - 17/4/2014

Problema 1

Una molla ideale di massa nulla è disposta verticalmente con l'estremo inferiore fissato al pavimento. All'altro estremo della molla è agganciato un piattello di massa ignota che oscilla con un periodo T. Sul piattello viene fissato un corpo di massa m_2 che determina un abbassamento della posizione di equilibrio di un tratto d rispetto a quando c'è solo il piattello. Determinare:

1) la costante elastica k della molla;

2) la massa m_1 del piattello;

3) il periodo di oscillazione quando sul piattello è presente anche il corpo di massa m_2.

Si supponga ora che il corpo di massa m_2 sia appoggiato, ma non agganciato, su un piattello di massa nulla, inizialmente in quiete e con la molla compressa di un tratto L. Assumendo che durante il moto il corpo si stacchi dal piattello, determinare:

4) il valore massimo del modulo della forza elastica esercitata dalla molla;

5) la massima altezza raggiunta dal corpo di massa m_2 dopo che si è staccato dal piattello.

Problema 2

Una carica puntiforme $q_1 > 0$ è fissata ad una distanza d da un piano infinito uniformemente carico con densità superficiale di carica $\sigma > 0$. Determinare:

6) il campo elettrico (modulo, direzione e verso) in tutto lo spazio;

7) le coordinate dei punti, se esistono, in cui il campo elettrico è nullo;

8) la differenza di potenziale $V(B) - V(A)$ tra due punti A e B disposti lungo la retta ortogonale al piano e passante per la posizione della carica q_1 e a una distanza dal piano, rispettivamente $2d$ e $3d$ (nello stesso semispazio in cui si trova la carica);

9) la velocità iniziale che deve avere una carica puntiforme $q > 0$ di massa m nel punto B affinché arrivi nel punto A con velocità nulla;

10) come cambia la risposta alla domanda precedente in presenza di un campo gravitazionale uniforme $\mathbf{g}$ diretto ortogonalmente al piano carico e con verso da B ad A.

Soluzioni

Problema 1

1) Ponendo l'origine delle coordinate in corrispondenza della lunghezza di riposo della molla, le posizioni di equilibrio del solo piattello e del piattello con il corpo sono, rispettivamente:

$$y_{1,eq} = -\frac{m_1 g}{k}; \; y_{2,eq} = -\frac{(m_1 + m_2)\, g}{k}$$

quindi, sapendo che $(y_{1,eq} - y_{2,eq}) = d$, si ottiene

$$k = \frac{m_2 g}{d}$$

2) il periodo dell'oscillatore armonico costituito dal solo piattello è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}$$

da cui, sostituendo il valore di k trovato in precedenza, si ottiene

$$m_1 = \frac{m_2 g}{d}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$$

3) il periodo dell'oscillatore armonico costituito dal piattello con appoggiato il corpo è

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)}{k}} = 2\pi\sqrt{\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 + \frac{d}{g}}$$

4) la legge oraria del corpo, finché rimane appoggiato al piattello, è

$$y(t) = \left(\frac{m_2 g}{k} - L\right)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_2}}t\right) - \frac{m_2 g}{k}$$

e quindi la forza elastica

$$F_{el} = -ky(t)$$

in corrispondenza della massima compressione il modulo vale

$$F = kL = \frac{m_2 g L}{d}$$

5) applicando la conservazione dell'energia meccanica si ottiene

$$h_{max} = L\left(\frac{kL}{2m_2 g} - 1\right) = L\left(\frac{L}{2d} - 1\right)$$

Problema 2

6) Il campo elettrico è dato dalla sovrapposizione dei campi elettrici generati dalla carica q_1 e dal piano infinito uniformemente carico, ossia:

$$\mathbf{E} = \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\widehat{\mathbf{z}} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r_1}}{\mid \mathbf{r} - \mathbf{r_1} \mid^3}$$

dove si è preso l'asse z ortogonale al piano, orientato verso l'alto e con origine sul piano stesso. Il segno $+$ vale nella parte di spazio con $z > 0$. Il vettore $\mathbf{r_1} = (0, 0, d)$ indica la posizione della carica puntiforme.

7) Il campo elettrico è nullo nel punto di coordinate $(0, 0, z_0)$, con

$$z_0 = d - \sqrt{\frac{q_1}{2\pi\sigma}}$$

8) la differenza di potenziale elettrico tra i punti $B = (0, 0, 3d)$ e $A = (0, 0, 2d)$ vale

$$V(B) - V(A) = -\frac{\sigma d}{2\varepsilon_0} - \frac{q_1}{8\pi\varepsilon_0 d}$$

9) l'energia meccanica della carica si conserva durante il moto, quindi

$$v_B = \sqrt{\frac{2q\left(V(A) - V(B)\right)}{m}} = \sqrt{\frac{q}{m}\left(\frac{\sigma d}{\varepsilon_0} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 d}\right)}$$

10) in presenza di un campo grazitazionale $\mathbf{g} = -g\widehat{\mathbf{z}}$ si ha

$$v_B = \sqrt{\frac{2q\left(V(A) - V(B)\right)}{m} - 2gd}$$