Compito di Fisica - 19/6/2014

Problema 1

Una guida liscia a forma di arco di cerchio è fissata al pavimento e disposta verticalmente come mostrato in figura. La guida è fissata ad un piano orizzontale infinito. Il corpo di massa m_1, inizialmente in quiete, viene lasciato libero di muoversi lungo la guida e va ad urtare il corpo di massa m_2, anch'esso inizialmente fermo. Conoscendo il raggio R, l'angolo ϑ e sapendo che l'urto è completamente anelastico, determinare:

1) la velocità dei due corpi subito dopo l'urto;

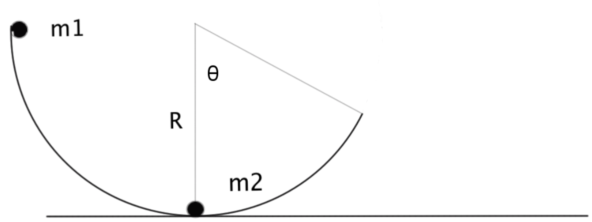
2) il valore minimo $m_{2,min}$ della massa del secondo corpo affinché quest'ultimo non esca dalla guida dopo l'urto;

Si supponga ora che $m_2 < m_{2,min}$ e che quindi il corpo 2 esca dalla guida, determinare:

3) il modulo della velocità del corpo 2 nell'istante in cui raggiunge il bordo della guida;

4) il valore massimo dell'altezza raggiunta dal corpo 2;

5) il valore minimo del modulo della velocità del corpo 2 dopo essere uscito dalla guida.



Problema 2

Si consideri una sfera non conduttrice piena di raggio R e uniformemente carica, con densità di carica ϱ ignota. Sapendo che il potenziale elettrico sulla superficie della sfera è $V(R) = V_0$ (assumendo $V(\infty) = 0$), determinare:

6) la carica totale della sfera;

7) il potenziale elettrico all'esterno della sfera $V(r)$ $(r > R)$;

8) il modulo del campo elettrico all'interno della sfera $E(r)$ $(0 < r < R)$.

Si consideri ora una sfera conduttrice di raggio R su cui è distribuita la stessa carica totale presente sulla sfera non conduttrice dei punti precedenti. Determinare:

9) il potenziale elettrico $V(0)$ nel centro della sfera conduttrice;

10) il potenziale elettrico all'esterno della sfera conduttrice $V(r)$ $(r > R)$.

Soluzioni

Problema 1

1) La velocità del corpo 1 subito prima dell'urto è $v_1 = \sqrt{2gR}$. Applicando la conservazione della quantità di moto e tenendo conto che l'urto è completamente anelastico e quindi $v_{1,f} = v_{2,f} = V$ si ottiene la velocità dei due corpi subito dopo l'urto

$$V = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{2gR}$$

2) al crescere di m_2 diminuisce la velocità V dei due corpi subito dopo l'urto. Il valore minimo $m_{2,min}$ della massa del corpo 2 affinché quest'ultimo non esca dalla guida dopo l'urto è quello che permette al corpo di arrivare al bordo della guida con velocità nulla. Applicando la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) V^2 = (m_1 + m_2) gh$$

dove $h = R(1 - \cos\vartheta)$. Da cui

$$m_{2,min} = m_1 \frac{\sqrt{R} - \sqrt{h}}{\sqrt{h}} = m_1 \frac{1 - \sqrt{1 - \cos\vartheta}}{\sqrt{1 - \cos\vartheta}}$$

3) la velocità dei due corpi subito prima di uscire dalla guida si ottiene applicando la conservazione dell'energia

$$v_f = \sqrt{V^2 - 2gh} = \sqrt{2gR\left(\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 - (1 - \cos\vartheta)\right)}$$

4) una volta fuori dalla guida i due corpi descrivono una traiettoria parabolica. L'altezza massima è

$$h_{max} = \frac{V^2 - (v_f \cos\vartheta)^2}{2g} = \frac{(V\sin\vartheta)^2}{2g} + h\cos^2\vartheta$$

5) la velocità minima si ha nel punto in cui viene raggiunta l'altezza massima

$$v_{min} = v_{f,x} = v_x \cos\vartheta = \sqrt{V^2 - 2gh}\cos\vartheta$$

Problema 2

6) la carica totale è

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 R V_0$$

7) il potenziale elettrico a distanza r (con $r > R$) è

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{V_0 R}{r}$$

8) il modulo del campo elettrico a distanza r (con $0 < r < R$) è

$$E(r) = \frac{\varrho r}{3\varepsilon_0} = \frac{V_0 r}{R^2}$$

9) Per $r \geq R$, il potenziale generato dalla sfera conduttrice è uguale a quello della sfera non conduttrice dei punti precedenti. Inoltre, la sfera conduttrice è equipotenziale, quindi il potenziale nel centro ha lo stesso valore che ha in superficie, ossia

$$V(0) = V_0$$

10) come spiegato al punto precedente, per $r \geq R$ il potenziale è uguale a quello trovato al punto 2, ossia

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{V_0 R}{r}$$