Compito di Fisica - 18/11/2014

Problema 1

Una navicella spaziale di massa m si muove di moto circolare uniforme attorno ad un pianeta di massa incognita. Sapendo che l'orbita di raggio r_1 viene percorsa in un periodo T_1, determinare:

1) l'energia meccanica della navicella.

La navicella spaziale ad un certo istante aziona temporaneamente i motori per spostarsi su un'orbita circolare di raggio maggiore. Sapendo che la navicella, dopo aver spento i motori, si muove di moto circolare uniforme con un periodo $T_2 = 2T_1$, determinare:

2) il raggio r_2 della nuova orbita;

3) la nuova velocità orbitale v_2;

4) il lavoro compiuto dai motori per passare dalla prima alla seconda orbita;

5) il lavoro compiuto dalla forza di gravità nello stesso passaggio.

Problema 2

Due cariche positive puntiformi q uguali sono fissate su un piano nei punti di coordinate (x, y), rispettivamente, $(-a, 0)$ e $(+a, 0)$ (con $a > 0$). Determinare:

6) il lavoro che deve compiere una forza esterna per disporre le cariche nella configurazione data;

7) il campo elettrico (modulo, direzione e verso) sull'asse y;

8) il potenziale elettrico sull'asse y (assumendo $V(\infty) = 0$);

9) la velocità di una carica puntiforme $Q > 0$ di massa m quando arriva nel punto di coordinate $(0, 2b)$ (con $b > 0$), sapendo che nell'istante iniziale si trovava in quiete nel punto $(0, b)$;

10) il valore minimo del modulo dell'accelerazione di una carica puntiforme $q_3 = -Q$ di massa m lasciata libera di muoversi nel punto $(0, b)$ (con $b > 0$) con velocità iniziale nulla.

Soluzioni

Problema 1

1) L'energia meccanica della navicella è:

$$E(r_1) = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = -\frac{GMm}{2r_1}$$

dove si è utilizzato la relazione $v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}$ per la velocità orbitale. Per determinare la massa incognita M del pianeta, basta utilizzare la terza legge di Keplero

$$T_1^2 = \frac{(2\pi)^2 r_1^3}{GM}$$

sostituendo nella prima equazione il valore di GM ottenuto dalla seconda, si ottiene

$$E(r_1) = -2\pi^2 \frac{mr_1^2}{T_1^2}$$

2) dalla terza legge di Keplero segue che

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3$$

da cui, ricordando che $T_2 = 2T_1$, si ottiene

$$r_2 = 4^{1/3} r_1$$

3) la velocità orbitale vale

$$v_2 = \sqrt{\frac{GM}{r_2}} = 4^{1/3}\pi \frac{r_1}{T_1}$$

4) il lavoro compiuto dai motori per passare da un'orbita circolare all'altra vale

$$W = \Delta E = E(r_2) - E(r_1) = -\frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = 2\pi^2 \frac{mr_1^2}{T_1^2}\left(\frac{4^{1/3}-1}{4^{1/3}}\right)$$

5) il lavoro compiuto dalla forza di gravità nello stesso passaggio è

$$W_g = -\Delta U = GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = 4\pi^2 \frac{mr_1^2}{T_1^2}\left(\frac{1-4^{1/3}}{4^{1/3}}\right)$$

Problema 2

6) Il lavoro coincide con l'energia elettrostatica della configurazione

$$W = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}$$

7) il campo elettrico si ottiene sommando vettorialmente i campi generati dalle due cariche

$$\mathbf{E}(\mathbf{y}) = \frac{qy}{2\pi\varepsilon_0 \left(a^2 + y^2\right)^{3/2}} \widehat{\mathbf{y}}$$

8) il potenziale elettrico si ottiene sommando i potenziali generati dalle due cariche puntiformi

$$V(y) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 \left(a^2 + y^2\right)^{1/2}}$$

9) dalla conservazione dell'energia meccanica della carica puntiforme Q durante il moto segue che la velocità nel punto finale di coordinata $y = 2b$ è

$$v_f = \sqrt{\frac{2Q}{m}\left(V(y=b) - V(y=2b)\right)} = \sqrt{\frac{Qq}{m\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+4b^2}}\right)}$$

10) l'accelerazione della carica q_3 vale

$$\mathbf{a}(y) = \frac{q_3 \mathbf{E}(y)}{m} = -\frac{Q\mathbf{E}(y)}{m}$$

quindi il minimo del modulo dell'accelerazione vale 0 e si ha quando la carica si trova nell'origine delle coordinate dove il campo elettrico si annulla.