Compito di Fisica - 19/6/2015

Problema 1

Un proiettile viene sparato verticalmente verso l'alto dalla superficie di un pianeta con modulo della velocità iniziale v_0.

1. Sapendo che il proiettile raggiunge una distanza massima dal centro del pianeta $R_{max} = 2R_p$, dove R_p è il raggio del pianeta stesso, determinare la massa del pianeta;
2. conoscendo la densità ϱ (costante) del pianeta (diverso dal precedente), determinare il valore massimo che può avere il suo raggio affinché il proiettile riesca a sfuggire alla sua attrazione gravitazionale.

Si supponga ora che il proiettile venga sparato in direzione tangenziale alla superficie di un pianeta di densità ϱ (costante). Sapendo che il modulo della velocità iniziale è v_0, determinare:

3. il valore che dovrebbe avere il raggio del pianeta affinché il proiettile descriva un'orbita circolare radente alla sua superficie;
4. il periodo orbitale del proiettile nel caso della domanda precedentre (n. 3);
5. il modulo dell'accelerazione del proiettile nel caso della domanda n. 3.

Problema 2

Si consideri un piano non conduttore infinito su cui è distribuita una carica positiva con densità superficiale σ costante. Determinare:

6) il valore massimo di una carica puntiforme positiva fissata ad un estremo di una corda ideale, con l'altro estremo fissato al piano carico, sapendo che la corda può esercitare una tensione massima T_{max};

7) la variazione di energia cinetica di una carica puntiforme positiva q, libera di muoversi, sapendo che nell'istante iniziale è in quiete ad una distanza d_1 dal piano mentre nell'istante finale si trova ad una distanza $d_2 > d_1$;

8) quanto tempo impiega la carica della domanda precedente a spostarsi dal punto iniziale a quello finale sapendo che ha massa m;

9) la variazione di energia cinetica di una carica puntiforme positiva q, libera di muoversi, sapendo che nell'istante iniziale si trova ad una distanza d_1 dal piano con una velocità v_0 parallela al piano stesso mentre nell'istante finale si trova ad una distanza $d_2 > d_1$;

10) il valore di una carica puntiforme positiva fissata ad un estremo di una molla ideale (di massa nulla, costante elastica k e lunghezza a risposo l_0) con l'altro estremo fissato al piano carico, sapendo che nella posizione di equilibrio la carica dista l_{eq} dal piano;

Soluzioni

Problema 1

1) Nel punto di massima distanza l'energia cinetica del proiettile è zero, quindi dalla conservazione dell'energia meccanica si ottiene

$$M_p = \frac{R_p v_0^2}{G}$$

2) Il proiettile riesce a sfuggire all'attrazione gravitazionale del pianeta se

$$\frac{m v_0^2}{2} - \frac{G M_p m}{R_p} \geq 0$$

dove $M_p = \frac{4\pi R_p^3 \varrho}{3}$, da cui

$$R_p \leq \frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi G\varrho}}$$

3) In un'orbita circolare $v = \sqrt{\frac{GM_p}{r}}$, da cui si ottiene

$$R_p = \frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi G\varrho}}$$

4) il periodo orbitale vale

$$T = \frac{2\pi R_p}{v_0} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\varrho}}$$

5) l'accelerazione è centripeta

$$a = \frac{v_0^2}{R_p} = 2v_0\sqrt{\frac{\pi G\varrho}{3}}$$

Problema 2

6) Finché la corda è integra

$$T = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}$$

quindi poiché $T \leq T_{max}$ segue che

$$q \leq \frac{2\varepsilon_0 T_{max}}{\sigma}$$

7) Utilizzando la conservazione dell'energia meccanica

$$\Delta K = -\Delta U = -q\Delta V = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\left(d_2 - d_1\right)$$

8) la carica si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato con $a = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 m}$, quindi

$$t = \sqrt{\frac{2\left(d_2 - d_1\right)}{a}} = \sqrt{\frac{4\varepsilon_0 m\left(d_2 - d_1\right)}{q\sigma}}$$

9) la variazione di energia cinetica è la stessa del punto 7.

10) nella configurazione di equilibrio la risultante delle forze applicate sulla carica puntiforme è nulla, quindi

$$-k\left(l_{eq} - l_0\right) + \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0} = 0$$

da cui

$$q = \frac{2\varepsilon_0 k}{\sigma}\left(l_{eq} - l_0\right)$$