Compito di Fisica - 22/7/2015

Problema 1

Un proiettile di massa m viene sparato con una velocità iniziale di modulo v_0 diretta in modo da formare un angolo ϑ rispetto al piano orizzontale. Determinare:

1. la distanza x_{max} dalla posizione iniziale della proiezione sul piano orizzontale del punto di massima altezza raggiunto dal proiettile;
2. la funzione $K = K(t)$ che descrive come cambia nel tempo l'energia cinetica del proiettile;
3. l'energia cinetica del proiettile nell'istante in cui la sua proiezione sul piano orizzontale dista $x_{max}/2$ dalla posizione iniziale.

Nel punto più alto della traiettoria il proiettile esplode frammentandosi in due corpi di massa $m_1 = m/5$ e $m_2 = 4m/5$. Il corpo di massa m_1, che immediatamente dopo l'esplosione ha velocità nulla, cade verticalmente. Determinare:

4. a che distanza da quest'ultimo cade il corpo di massa m_2;
5. la quantità di moto totale (modulo, direzione e verso) del sistema costituito dai due frammenti un attimo prima che i due corpi tocchino terra.

Problema 2

Si consideri una corona sferica conduttrice di raggio interno R_{int} e raggio esterno R_{est} su cui è depositata una carica positiva Q incognita. Sapendo che nel centro della corona sferica c'è una carica puntiforme positiva q, determinare:

6) quanto dovrebbe valere Q affinché il potenziale elettrico a distanza $r = 2R_{est}$ dal centro valga V_* (assumendo nullo il potenziale all'infinito);

7) il valore del potenziale elettrico sulla superficie interna del conduttore nel caso in cui Q sia quello calcolato nel punto precedente;

8) quanto dovrebbe valere Q affinché il campo elettrico sia nullo all'esterno della corona sferica ($r \geq R_{est}$);

9) il valore del campo elettrico (modulo, direzione e verso) per $0 < r < R_{int}$;

10) la differenza di potenziale tra la superficie esterna e quella interna della corona sferica.

Soluzioni

Problema 1

1) Il punto di massima altezza, in cui la componente verticale della velocità del proiettile è zero, viene raggiunto nell'istante $t_{max} = \frac{v_0 \sin\vartheta}{g}$ e quindi

$$x_{max} = \frac{v_0^2 \sin 2\vartheta}{2g}$$

2) chiamando x e y gli assi orizzontale e verticale, il vettore velocità del proiettile ha componenti

$$(v_x(t), v_y(t)) = (v_0 \cos\vartheta, v_0 \sin\vartheta - gt)$$

quindi l'energia cinetica vale

$$K(t) = \frac{mv^2(t)}{2} = \frac{m}{2}\left[v_0^2 \cos^2\vartheta + (v_0 \sin\vartheta - gt)^2\right]$$

3) il punto in cui la proiezione sul piano orizzontale dista $x_{max}/2$ dalla posizione iniziale viene raggiunto dal proiettile nell'istante

$$t_* = \frac{t_{max}}{2} = \frac{v_0 \sin\vartheta}{2g}$$

quindi sostituendo questo valore nell'equazione trovata nel punto precedente si ottiene l'energia cinetica

$$K(t_*) = \frac{mv_0^2}{2}\left(\frac{3\cos^2\vartheta + 1}{4}\right)$$

4) le forze che causano l'esplosione sono forze interne e quindi il moto del centro di massa dei due frammenti è lo stesso che avrebbe il proiettile se non esplodesse. Inoltre i due frammenti raggiungono terra simultaneamente

$$mx_{CM,fin} = m_1 x_{1,fin} + m_2 x_{2,fin}$$

sapendo che $x_{1,fin} = x_{max}$ perché il frammento 1 cade verticalmente e che $x_{CM,fin} = 2x_{max}$ e sostituendo i valori delle masse dei due frammenti si ottiene

$$x_{2,fin} - x_{1,fin} = \frac{5x_{max}}{4} = \frac{5v_0^2 \sin 2\vartheta}{8g}$$

5) la quantità di moto totale dei due frammenti un attimo prima che tocchino terra simultaneamente è

$$(P_{tot,x}, P_{tot,y}) = (mv_{CM,x}, mv_{CM,y}) = (mv_0 \cos\vartheta, -mv_0 \sin\vartheta)$$

Problema 2

6) Per $r \geq R_{est}$ il potenziale elettrico vale

$$V(r) = \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

quindi affinché $V(r = 2R_{est}) = V_*$ la carica depositata sul conduttore deve valere

$$Q = 8\pi\varepsilon_0 R_{est} V_* - q$$

7) il conduttore è equipotenziale, quindi il potenziale sulla superficie interna della corona sferica è uguale a quello sulla superficie esterna

$$V(R_{int}) = V(R_{est}) = \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_{est}} = 2V_*$$

8) Per $r \geq R_{est}$ il modulo del campo elettrico vale

$$E(r) = \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

quindi il campo può essere nullo in tutta la regione esterna alla corona sferica solo se

$$Q = -q$$

9) Per $0 < r \leq R_{int}$, il campo elettrico coincide con quello della carica puntiforme q ed è quindi radiale, uscente e di modulo

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

10) il conduttore è equipotenziale e la differenza di potenziale tra le due superfici della corona è 0.