Università degli Studi di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2002-2003

Tesi di Laurea Specialistica

Modelli di sintesi di popolazioni stellari semplici

Candidato
Martina Fagiolini

Relatore
Dott.ssa Scilla Degl'Innocenti

Indice

Introduzione **1**

1 Informazioni introduttive **5**

1.1 Gli ammassi stellari nella nostra Galassia 5

1.2 Cenni di evoluzione stellare 9

2 Modelli di sintesi di popolazione stellare **21**

2.1 La distribuzione iniziale di massa (IMF) 23

2.1.1 Effetto della IMF sui colori integrati 28

2.2 La convezione nelle strutture stellari 32

2.3 Trasformazioni di colore 35

2.4 Le fluttuazioni statistiche 42

2.5 Lo scenario evolutivo 45

2.5.1 Ramo Orizzontale (HB: *Horizontal Branch*) 45

2.5.2 Ramo Asintotico (AGB: *Asymptotic Giant Branch*) 51

2.5.3 PAGB: *Post Asymptotic Giant Branch* 58

2.5.4 La sequenza di raffreddamento: le Nane Bianche 59

3 Il codice di sintesi di popolazione stellare **63**

3.1 *Tracce evolutive e trasformazioni di colore* 65

3.2 *Morfologia del Ramo Orizzontale* 70

3.3 *Ramo Asintotico e Pulsi Termici* 74

4 Calibrazione **81**
4.1 Premessa . . . 81
4.2 Calibrazione con le osservazioni . . . 89
4.2.1 Ramo orizzontale intermedio: M68 . . . 92
4.2.2 Ramo orizzontale blu: M30 . . . 95
4.2.3 Ramo orizzontale bimodale: M15 . . . 97
4.2.4 La Grande Nube di Magellano . . . 98

5 Risultati per ammassi di Popolazione II **103**
5.1 Introduzione . . . 103
5.2 Confronto con altri autori . . . 119

A Risultati per ammassi di Popolazione II **123**

B Osservabili **153**
B.1 Arrossamento . . . 155

Conclusioni **157**

Bibliografia **161**

Ringraziamenti **169**

Introduzione

Lo studio delle caratteristiche degli ammassi stellari nella nostra Galassia permette di ricavare informazioni sulla storia evolutiva di queste strutture e quindi dell'Universo stesso. La maggior parte degli ammassi stellari che si trovano nelle galassie esterne alla nostra non sono però risolvibili nelle singole stelle e le uniche informazioni fotometriche di cui disponiamo sono le cosiddette "proprietà integrate", come la luminosità totale e il colore totale in diverse bande fotometriche.

Scopo di questa tesi è l'analisi delle proprietà integrate di popolazioni stellari semplici tramite modelli di sintesi di popolazione. Le popolazioni stellari semplici sono insiemi di stelle nate da una stessa nube interstellare e quindi con stessa composizione chimica e stessa età ma di massa diversa come, ad esempio, gli ammassi aperti e globulari che popolano la nostra Galassia. I modelli di sintesi di popolazione forniscono informazioni sul numero di stelle nelle diverse regioni del diagramma di Hertzsprung-Russell (HR) e quindi nelle diverse fasi evolutive che sono utilizzate per predire le proprietà integrate dell'ammasso.

Innanzitutto è stata svolta un'analisi delle varie fonti di incertezza che influenzano il calcolo teorico dei colori integrati, come l'incertezza sulla distribuzione di massa iniziale, le relazioni temperatura-colore, l'inclusione di fasi evolutive particolari, le incertezze statistiche ecc... È stato poi aggiornato un codice evolutivo pre-esistente. In particolare il nostro codice presenta l'inclusione del fenomeno dei pulsi termici per stelle in fase di ramo asintotico. Inoltre la fase di nana bianca è stata inclusa in maniera evolutivamente consistente e sono state utilizzate tracce evolutive e trasformazioni temperatura-colore tra le più aggiornate.

Il codice di sintesi è stato poi testato riproducendo i diagrammi HR osservativi di ammassi globulari galattici ben noti riscontrando un ottimo accordo. In questo modo è stato anche possibile fissare i valori per l'efficienza della perdita di massa in fase di gigante rossa e la sua dispersione, parametri che regolano la morfologia del ramo orizzontale. Un buon accordo teoria-osservazione è stato inoltre ottenuto per il diagramma a due colori per ammassi giovani della Grande Nube di Magellano.

Sono stati quindi analizzati gli andamenti dei colori integrati e delle relazioni massa-luminosità per numerose bande fotometriche in funzione dell'età dell'ammasso. Sono stati discussi quantitativamente l'effetto delle diverse funzioni iniziali di massa, l'influenza delle incertezze statistiche in dipendenza anche della luminosità totale dell'ammasso (e quindi del numero totale di stelle che lo compongono) e l'effetto della presenza o meno delle piccole masse e delle nane bianche. I risultati ottenuti sono stati inoltre confrontati con altri presenti in letteratura.

La Tesi è strutturata come segue:

- Nel **Capitolo 1** vengono descritte le tipologie degli ammassi stellari appartenenti alla Galassia e le caratteristiche delle varie fasi evolutive delle stelle, con particolare interesse verso la fase di combustione di elio di stelle di massa intermedia.

- Nel **Capitolo 2** vengono discusse criticamente varie fonti di incertezza tuttora presenti nei calcoli dei colori integrati. Sono descritti i risultati ottenuti da vari autori soprattutto per quanto riguarda l'influenza delle varie fonti di incertezza sui colori integrati.

- Nel **Capitolo 3** è descritto il codice di sintesi da noi utilizzato e gli aggiornamenti apportati al codice.

- Nel **Capitolo 4** è discusso il confronto tra i risultati del nostro programma e le osservazioni di ammassi sufficientemente vicini da essere risolvibili stella per stella, questo costituisce un test per la bontà del nostro codice e permette di calibrare l'efficienza della perdita di massa in fase di gigante rossa, necessaria per riprodurre la morfologia del ramo orizzontale.

- Nel **Capitolo 5** sono riportati i risultati a luminosità totale fissata del modello con $Z = 0.0002$ discutendo gli effetti di diverse assunzioni per la funzione iniziale di massa e per la luminosità totale dell'ammasso. I nostri risultati sono infine confrontati con quelli di lavori precedenti.

Capitolo 1

Informazioni introduttive

1.1 Gli ammassi stellari nella nostra Galassia

Dall'osservazione della Galassia appare evidente che gli ammassi stellari, cioè zone ad alta concentrazione di stelle, sono strutture molto comuni. Gli ammassi della nostra Galassia presentano tra loro caratteristiche diverse che sono interpretabili alla luce della storia evolutiva della Galassia stessa.

Gli ammassi stellari sono insiemi di stelle che si sono formate dalla contrazione di una stessa nube di gas e polveri interstellari che si è poi frammentata in porzioni di diversa massa. Quali siano i meccanismi che innescano la contrazione e la frammentazione della nube è ancora oggi argomento di studio. La comune origine nel tempo delle stelle di uno stesso ammasso ci permette di assumere per queste una composizione chimica omogenea ed una stessa età (le differenze di età tra le stelle sono piccole rispetto all'età dell'ammasso). Inoltre la distanza tra le stelle di un ammasso è trascurabile rispetto alla distanza da noi dell'ammasso stesso ed è perciò possibile assumere che tutte le stelle si trovino alla stessa distanza da noi. Le popolazioni che presentano queste caratteristiche sono comunemente note con il nome di "popolazioni stellari semplici" (*Simple Stellar Population, SSP*).

Dal confronto delle diverse caratteristiche degli ammassi che si trovano nell'alone e nel disco della nostra Galassia si può dedurre l'evoluzione dinamica e nucleare che ha portato la galassia ad essere come noi la conosciamo. L'alone della nostra Galassia è popolato da circa 150 di ammassi Globulari, tipicamente composti da $10^5 \div 10^6$ stelle distribuite secondo una spiccata simmetria sferica e un'alta concentrazione centrale. Le stelle degli ammassi globulari risultano gravitazionalmente legate, devono quindi esserci stati scambi energetici che hanno condotto all'equipartizione dell'energia, di conseguenza la struttura può essere descritta dalle relazioni che regolano la distribuzione di un gas (di stelle) autogravitante e isotermo, permettendoci di avere, attraverso il calcolo del tempo di rilassamento termodinamico, una prima stima dell'età che risulta essere dell'ordine del miliardo di anni. Il disco è invece popolato da ammassi aperti, strutture composte da circa $10^2 \div 10^3$ stelle immerse in una miscela di gas e polveri; la definizione di "aperti" per questo tipo di ammassi deriva proprio dal fatto che presentano, a differenza degli ammassi globulari, contorni irregolari. Notiamo inoltre come le stelle più luminose degli ammassi globulari siano giganti rosse, cioè stelle a bassa temperatura ($\sim 5000K$) mentre quelle degli ammassi aperti sono giganti blu, cioè ad alta temperatura ($\sim 10000K$).

Da quanto detto è possibile ipotizzare il seguente quadro evolutivo: l'assenza di materia nell'alone galattico ci porta a concludere che il processo di condensazione sia già stato in atto in queste zone e che le stelle che si osservano siano il ricordo di tale attività ormai esaurita. In seguito alla formazione di questa prima generazione di stelle[1] il gas residuo, dopo aver dissipato la propria energia in seguito a collisioni, deve essere collassato sul disco dove ha reso possibile la nascita di successive generazioni stellari. In questo quadro quindi gli ammassi globulari (alone) risultano essere più antichi degli ammassi aperti (disco); questo è confermato dal fatto che, come vedremo in seguito, un predominio di giganti rosse è attribuibile ad un'età avanzata dell'ammasso mentre un predominio di giganti blu è caratteristico di un ammasso giovane.

Gli elementi vengono sintetizzati da una stella, durante la sua evoluzione, nelle zone più interne lasciando quasi inalterata (a parte l'effetto di rimescolamenti più o meno superficiali) la composizione chimica delle zone più esterne. L'immissione nello spazio interstellare di tali elementi può avvenire o tramite moderate perdite di massa (venti stellari) oppure in maniera catastrofica in seguito all'esplosione della struttura stellare

[1] In realtà deve essere stata presente una generazione ancora precedente di stelle quasi completamente prive di metalli (stelle di Popolazione III) ma non è di interesse per questa tesi.

Tabella 1.1: *Tabella riassuntiva delle caratteristiche delle Popolazioni stellari*

Popolazione I	Popolazione II
situate nel disco	situate nell'alone
stelle giovani ($10^6 \div 8 \cdot 10^9 yr$)	stelle antiche ($9 \cdot 10^9 \div 15 \cdot 10^9 yr$)
$10^2 \div 10^3$ stelle	$10^5 \div 10^6$ stelle
stelle più luminose: *giganti blu*	stelle più luminose: *giganti rosse*
abbondanza solare ($Z \sim 10^{-2}$)	povere di metalli ($Z \sim 10^{-4} \div 4 \cdot 10^{-3}$)
ammassi aperti	ammassi globulari
elevata velocità relativa rispetto al sole	bassa velocità relativa rispetto al sole

(supernova). In seguito a tali fenomeni di espulsione la materia interstellare viene arricchita di elementi più pesanti dell'elio (che in astrofisica vengono chiamati *metalli*) da cui si formerà poi un'altra generazione di stelle. Il valore dell'abbondanza frazionale in massa di tali elementi (Z) negli esterni stellari fornisce quindi una prima indicazione della generazione a cui appartiene la stella stessa. Possiamo perciò ipotizzare che le prime generazioni stellari siano sorte in nubi protogalattiche per lo più prive di elementi pesanti, il gas residuo deve essere poi andato a formare il disco dove si sono formate generazioni successive di stelle che presentano atmosfere con valori maggiori della metallicità.

Nel 1944 Walter Baade suggerì che le stelle nelle galassie potevano essere raggruppate in due distinte popolazioni stellari. Egli chiamò di "Popolazione I" gli oggetti presenti nei dischi galattici e di "Popolazione II" gli oggetti trovati nelle componenti sferoidali (alone) delle galassie. Successivamente, grazie al rapido sviluppo che interessò i metodi sia osservativi che teorici per lo studio della struttura, dell'evoluzione e della formazione stellare, furono individuate altre caratteristiche che distinguono stelle di diverse popolazioni. In tabella 1.1 riportiamo le caratteristiche di stelle tipiche di Popolazione I e II estreme negli ammassi galattici.

La diversità riscontrata anche nel moto delle stelle di Popolazione I e II è dovuta sicuramente alla loro appartenenza al disco e all'alone. È infatti noto che, a differenza del disco, l'alone presenta una rotazione rigida. In realtà non si tratta di una vera bimodalità tra due classi diverse di stelle dato che le stelle della Galassia mostrano caratteristiche che variano con gradualità tra quelle di Popolazione I e II estreme. Inoltre le caratteristiche menzionate in tabella non permettono sempre un'assegnazione univoca ad una popolazione piuttosto che ad un altra. Le stelle nei bulge della nostra Galassia e di M31 (la galassia di Andromeda) e quelle delle regioni centrali delle galassie ellittiche (cioè prive di una struttura a disco) sono ricche di metalli anche se, rispetto agli altri criteri, risultano di Popolazione II (vedi ad esempio Mihalas & Binney, 1981 [1]). Recenti indagini hanno poi individuato giovani stelle di scarsa abbondanza metallica nelle Nubi di Magellano, in altre galassie e anche in parti molto esterne della nostra. I tentativi di introdurre popolazioni intermedie hanno portato alla conclusione che, per salvare il concetto di popolazione è necessario utilizzare un solo parametro; generalmente si assume come parametro la metallicità che è un forte indicatore del susseguirsi delle generazioni stellari dal Big Bang ad oggi.

In particolare per lo studio delle popolazioni della Galassia di alone e disco sono sufficienti modelli con bassi valori della metallicità ($Z \lesssim 0.007$) per le età maggiori ed alta metallicità per gli oggetti più giovani. Per lo studio degli ammassi esterni alla Galassia non possiamo invece fare ipotesi restrittive sulla relazione età-metallicità perché di tali ammassi non possiamo dedurre niente a priori dato che non conosciamo l'ambiente in cui si sono formati e quindi la loro storia. È ormai noto infatti come, ad esempio, la storia evolutiva delle Nubi di Magellano e delle Galassie Nane sia diversa da quella della Via Lattea; in particolare i periodi di formazione stellare intensa non sembrano essere coincidenti nella Galassia e nelle Nubi di Magellano e sia nelle Nubi che nelle Galassie Nane sono presenti popolazioni giovani con bassa metallicità. Ad esempio la galassia nana Carina presenta una metallicità di $Z \sim 0.0004$ e 3 *burst* di formazione stellare a ~ 0.6, 5 e 11 Gyr (vedi ad esempio Monelli et al. 2003 [2]). In generale è ovvio che qualunque galassia può essere considerata come la sovrapposizione di popolazioni stellari con caratteristiche diverse. La luce totale emessa sarà quindi la somma della luce totale emessa da ogni ammasso che la compone (che costituisce una popolazione stellare semplice) e lo studio diretto delle caratteristiche integrate di queste galassie risulta ovviamente molto complicato.

1.2 Cenni di evoluzione stellare

Le stelle sono il risultato della contrazione di una massa di gas interstellare causata dal prevalere del campo gravitazionale sull'agitazione termica; la nube si frammenta in più parti di diversa massa a seconda della densità e della temperatura (vedi anche §2.1) dando vita alle stelle di un ammasso. La contrazione di una nube di gas (nel caso in cui si assuma che il gas sia perfetto) è in generale guidata dal teorema del viriale:

$$2T + \Omega = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.1}$$

dove T è l'energia cinetica totale, Ω l'energia gravitazionale e I il momento di inerzia del sistema. Man mano che la contrazione procede la densità e la temperatura centrali aumentano sempre più decisamente, inducendo una progressiva ionizzazione della materia e quindi l'aumento dell'opacità[2], che impedisce sempre più alla radiazione di sfuggire. L'energia del collasso viene così trasformata in temperatura e pressione del gas che rallenta la contrazione portando la struttura ad una "quasi staticità". La (1.1) si trasforma quindi ($d^2I/dt^2 \sim 0$) nella:

$$2T + \Omega = 0 \tag{1.2}$$

A causa dell'irraggiamento superficiale la struttura perde energia, diminuisce quindi la pressione del gas e la stella tende a contrarsi; il teorema del viriale nella forma (1.2) ci assicura che metà dell'energia acquistata nella contrazione va a scaldare la struttura mentre l'altra metà supplisce alle perdite per radiazione.

Al proseguire della contrazione si raggiungono le temperature interne necessarie all'innesco delle prime reazioni nucleari (fusione di idrogeno in elio) che diventano la primaria fonte di energia; la stella è ora sorretta completamente dalle reazioni nucleari che controbilanciano le perdite per irraggiamento, la contrazione così rallenta sino a quando la produzione di energia nucleare non bilancia esattamente le perdite per radiazione. La struttura non è comunque indefinitamente stabile e il motivo più evidente è

[2] l'*opacità* è definita come la probabilità che ha un fotone di essere sottratto al fascio uscente nell'unità di percorso e per grammo di materia.

che l'idrogeno nelle regioni centrali viene consumato, l'efficienza della reazione si riduce cosicché il nucleo contrae su tempi scala nucleari e si scalda in modo che l'efficienza delle reazioni aumenti nuovamente. Inoltre, quando il combustibile al centro arriva all'esaurimento, la stella sposta la combustione in zone più esterne (*shell*) non ancora elaborate nuclearmente finché al centro non viene raggiunta la temperatura critica per l'innesco delle reazioni di fusione successive a quella dell'idrogeno. Un altro effetto delle reazioni nucleari è la diminuzione del numero di particelle che causa un calo della pressione del gas cambiando le condizioni di equilibrio.

Al crescere della massa della stella, perché l'equilibrio resti garantito, è necessaria una maggior pressione e quindi un aumento della temperatura, di conseguenza aumenta anche l'energia emessa per unità di tempo e di massa (luminosità, vedi appendice B) e quindi il combustibile viene consumato più velocemente causando una diminuzione dei tempi evolutivi. Una prima evidenza di quanto detto si ha dal confronto tra i valori delle masse di stelle di ammassi aperti e di ammassi globulari; essendo quest'ultimi più antichi troveremo infatti, nella stessa fase evolutiva, stelle di massa minore mentre stelle con massa maggiore hanno già raggiunto fasi evolutive più avanzate. Le strutture osservate in questi ammassi di Popolazione II sono per lo più stelle di $M \lesssim 1M_\odot$ che sono in fase di combustione di idrogeno o di elio. Stelle di $M \gtrsim 10M_\odot$ innescano tutte le reazioni di fusione successive fino al ferro, ultima reazione esoenergetica, segue poi una instabilità prodotta dalla fotodisintegrazione del Fe, processo di assorbimento di energia che porterà al collasso e all'esplosione della stella come supernova.

Stelle di massa più piccola si fermano alla produzione di elementi più leggeri, non riuscendo a raggiungere le temperature di combustione di elementi troppo pesanti. In generale la densità di una struttura stellare cresce al diminuire della massa per una determinata temperatura. Per stelle di piccola massa l'aumento di densità può essere tale da portare le zone centrali alla degenerazione elettronica; il destino finale di una stella dipende quindi dal valore della massa che ne determina densità e temperatura centrali.

Prima di procedere nella descrizione dell'evoluzione di una stella, è necessario soffermarci a descrivere lo strumento principalmente utilizzato nello studio delle popolazioni stellari, il diagramma di Hertzsprung-Russel (*HR*). Disponendo le stelle di una stessa popolazione sul diagramma HR, dove sono riportate la temperatura effettiva (T_e) sull'asse delle ascisse e la luminosità in una data banda fotometrica sull'asse delle ordinate, si osservano sequenze uniparametriche in cui il parametro che varia è la massa delle stelle (vedi figura 1.1). La posizione e l'estensione di tali sequenze dipendono sia dall'età che dalla composizione chimica della popolazione che viene diagrammata fornendo un metodo per la caratterizzazione della popolazione. La controparte osservativa del diagramma HR è il diagramma colore-magnitudine (*Color Magnitude Diagram, CMD*) in cui sono riportate la magnitudine in una data banda sull'asse delle ordinate e l'indice di colore su quello delle ascisse (per la definizione di queste grandezze rimandiamo all'Appendice B).

Descriviamo ora brevemente l'evoluzione di una struttura stellare per i diversi range di massa caratterizzati dai fenomeni sopra descritti. Tali informazioni saranno utili nel seguito per l'interpretazione dei risultati ottenuti.

BD: *Nane Brune* $\mathbf{M \lesssim 0.1\,M_\odot}$

L'ipotesi dell'esistenza delle nane brune (*Brown Dwarfs, BD*) è stata avanzata per la prima volta nei primi anni sessanta (Hayashy & Nakano, 1963) ma si è dovuto aspettare fino al 1995 per avere la conferma osservativa della loro presenza (Basri, 2000 [3]). Si tratta di strutture con massa $M \lesssim 0.1 M_\odot$ che degenerano elettronicamente prima di raggiungere la temperatura dell'innesco dell'idrogeno, prive di combustione interna contraggono finché la sola degenerazione non è in grado di sorreggere la struttura e quindi si raffreddano (T_e e L diminuiscono) divenendo *nane brune* di idrogeno. Quindi queste strutture non contribuiscono alla luce totale emessa dalla popolazione ed entrano in gioco solo nel calcolo della massa totale. Per mezzo della funzione di distribuzione in massa totale (vedi cap.2) è possibile stimare il contributo delle BD alla massa totale. Ponendo $M_{up} = 0.083$, massa minima per la combustione dell'idrogeno per $[M/H] = -2$ ed in generale per stelle povere di metalli (Chabrier & Baraffe, 1997 [4]), e $M_{low} = 0.01$ che corrisponde approssimativamente alla massa minima per la combustione del deuterio, che gioca un ruolo fondamentale nella formazione di oggetti di tipo stellare (tale valore comunque dipende, per esempio, dall'equazione di stato; vedi anche Saumon et al., 1996 [5] e Burrows et al., 2002 [6]) il contributo risulta essere, anche nel peggiore dei casi, trascurabile. In realtà non è evidente che esista un limite inferiore per le BD, infatti sono state individuate strutture di $M \lesssim 0.01\, M_{\odot}$ (*Free-Floating Planets, FFLOP*) per esempio nell'ammasso σ Ori (Barrado, 2002 [7]). Comunque è stato stimato che anche estendendo l'integrale a masse inferiori alle $0.01\, M_{\odot}$ le cose non cambiano e il contributo alla massa totale resta trascurabile (Chabrier & Méra, 1997 [8]).

VLM: *Very Low Mass Stars* $\quad 0.1 \lesssim \mathrm{M/M_{\odot}} \lesssim 0.6$

Stelle di massa nell'intervallo $0.1 M_{\odot} \lesssim M \lesssim 0.6 M_{\odot}$ innescano l'idrogeno ma degenerano elettronicamente prima di innescare l'elio, bruciano quindi l'idrogeno in shell sempre più esterne (e fredde) finché le fusioni si spengono. Rimaste senza fonte di energia queste strutture si trasformano in *nane bianche* di elio. Tuttavia i tempi scala con cui stelle di $M \lesssim 0.5\, M_{\odot}$ esauriscono l'idrogeno centrale sono superiori all'età attuale dell'Universo; ciò significa anche che in un tempo corrispondente all'età attuale dell'Universo hanno variato di poco la loro luminosità e temperatura (e quindi la loro posizione sul diagramma HR, vedi cap.2).

LMS: *Low Mass Stars* $\quad 0.6 \lesssim \mathrm{M/M_{\odot}} \lesssim 1$

L'evoluzione delle stelle con $M \gtrsim 0.6\, M_{\odot}$ passa per diverse fasi che presentano caratteristiche diverse e che, a differenza delle VLM, sono osservabili in quanto si svolgono in tempi minori dell'età stimata per l'Universo. Per riuscire meglio a caratterizzare queste diverse fasi utilizziamo il diagramma HR precedentemente descritto.

Ci concentreremo in dettaglio sull'evoluzione di una massa tipica di ammasso globulare. La figura 1.1 mostra la traccia evolutiva sul diagramma HR di una stella di $0.8 M_{\odot}$ dalla fase di contrazione che precede l'innesco dell'idrogeno alla fase di ramo asintotico. In figura è riportata anche la fase di contrazione iniziale (*Pre-Main Sequence, PMS*), durante la quale la struttura si colloca ad alte luminosità e a basse temperature ed è, quindi, una struttura molto espansa (vedi appendice B, equazione B.1). Nelle fasi iniziali di contrazione la luminosità tende a diminuire mentre la temperatura efficace resta costante finché si ha l'innesco delle prime reazioni nucleari in

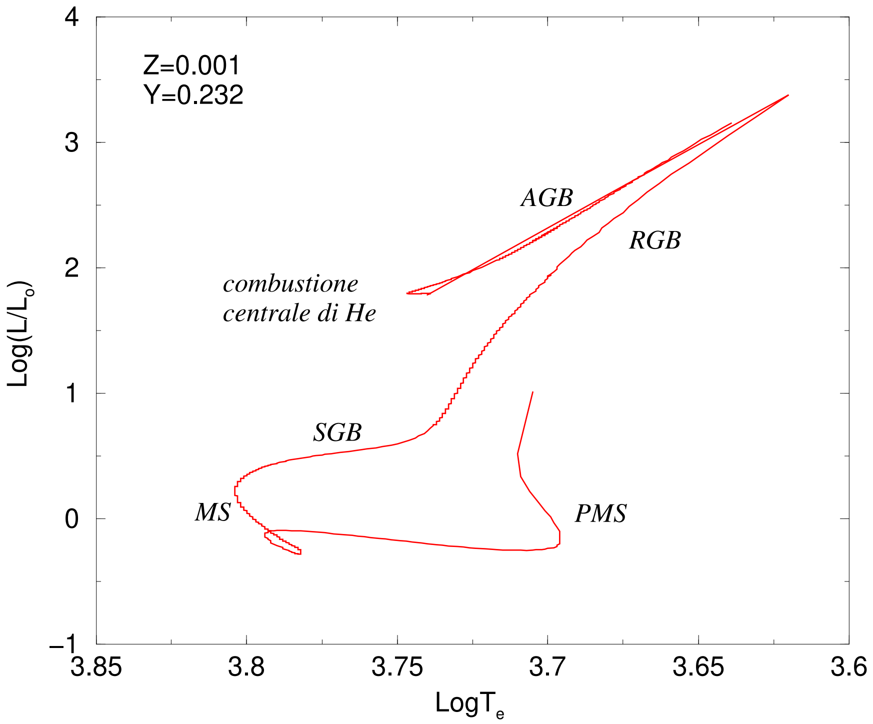

Figura 1.1: *Traccia evolutiva sul diagramma HR di una stella di piccola massa* ($0.8M_{\odot}$)*. Dati da "Pisa Evolutionary Library" [9].*

corrispondenza delle quali la luminosità si stabilizza e la temperatura efficace inizia ad aumentare. Le reazioni di combustione dell'idrogeno danno un contributo sempre più importante fino a quando la struttura non è completamente sorretta dalla produzione di energia termonucleare e si raggiunge l'equilibrio dei prodotti intermedi di reazione, la stella sta ora bruciando idrogeno al centro con piena efficienza delle reazioni e si trova sulla sequenza principale (*Main Sequence*, MS); si tratta della fase più lunga dell'evoluzione stellare dato che l'idrogeno è l'elemento più abbondante e che, a parità di massa combusta, la $4\mathrm{H}\rightarrow{}^{4}\mathrm{He}$ è la reazione più energetica.

Durante la combustione centrale di idrogeno la variazione della composizione chimica nel nucleo di H e He provoca un piccolo aumento della luminosità e della temperatura efficace. Il combustibile viene consumato nelle varie zone in proporzione all'efficienza delle reazioni (che dipende principalmente dalla temperatura). Man mano che l'idrogeno centrale si esaurisce la combustione si sposta con continuità dal centro in una shell circostante il nucleo di elio e la struttura tende ad aumentare le temperature interne per mantenere costante la produzione di energia.

La stella esce quindi dalla sequenza principale, raggiunge un massimo della temperatura efficace (*Turn Off*, TO) e, sorretta dalla combustione dell'idrogeno in shell che provoca l'espansione e il raffreddamento degli strati più esterni, si sposta a temperature efficaci minori con luminosità costante (*Subgiant Branch*, SGB). Il nucleo di elio, accresciuto dalla combustione nella shell sovrastante, contrae per aumentare la pressione e quindi ristabilire l'equilibrio idrostatico. Per la prima volta vediamo la regola dal valore generale per cui combustioni a shell collocano i modelli a basse temperature efficaci mentre combustioni centrali collocano le strutture a temperature efficaci più alte.

La fase successiva è quella di gigante rossa, (*Red Giant Branch*, RGB) in cui la stella evolve aumentando la luminosità e mantenendo la temperatura efficace costante; il nucleo di elio sta ancora contraendo e quindi aumentando la sua temperatura centrale, mentre la struttura è ancora sorretta dalla combustione dell'idrogeno nella shell che è sempre più esterna. Quando la temperatura centrale diviene tale da innescare la combustione dell'elio la stella si allontanerà dall'RGB andandosi a posizionare sul ramo orizzontale (*Horizontal Branch*, HB), quindi a temperature efficaci maggiori, dove brucerà quiescentemente elio al centro.

Per stelle di piccola massa la contrazione del nucleo di elio porta le regioni centrali alla degenerazione elettronica cosicché la pressione del gas non è più dipendente dalla temperatura ma dalla pressione degli elettroni degeneri: la contrazione del nucleo tende ad essere inibita e i tempi scala della combustione dell'idrogeno in shell aumentano. Solo quando il nucleo di elio raggiunge $\sim 0.45 \div 0.5 M_{\odot}$ l'innesco dell'elio può aver luogo. Per una dettagliata descrizione del fenomeno vedi ad esempio Mengel & Sweigart (1981 [10]). Per tali strutture comunque l'innesco dell'elio avviene secondo particolari modalità, infatti, dato che la pressione è essenzialmente fornita dagli elettroni degeneri, l'energia liberata dalla combustione dell'elio ha come unico effetto quello di aumentare la temperatura incentivando la reazione di combustione dell'elio che si presenta quindi come un processo reazionato positivamente che porta la struttura a produrre una grandissima quantità di energia (dell'ordine di $\sim 1000\, L_{\odot}$). Tale

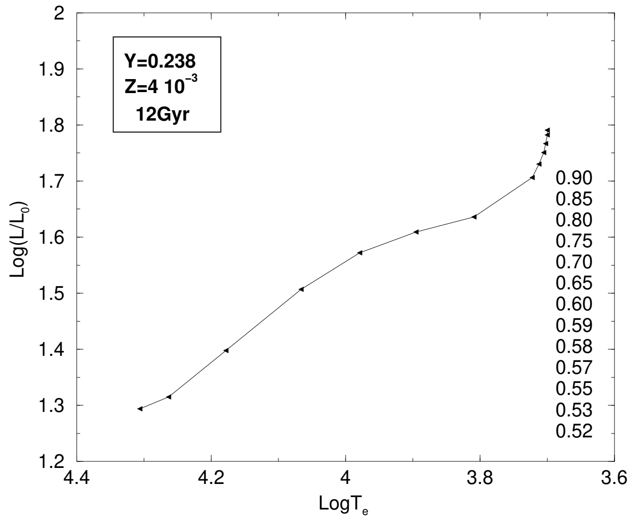

Figura 1.2: *Posizione nel diagramma HR di stelle in fase iniziale di combustione centrale di elio (ZAHB) per diversi valori della massa della stella in tale fase (riportati a destra in masse solari). Maggiore è la massa della stella minore risulta la sua temperatura effettiva. Le RR Lyrae si trovano a* $3.85 \lesssim \log T_e \lesssim 3.95$. *Dati da "Pisa Evolutionary Library" [9].*

fenomeno prende il nome di $flash$ dell'elio e avrà termine solo quando la temperatura sarà tale da rimuovere la degenerazione elettronica.

Il $flash$ dell'elio causa quindi un aumento della luminosità ed un espansione che provoca lo spegnimento della shell di idrogeno che riprenderà a dare un contributo sostanziale solo durante la combustione quiescente dell'elio centrale. Quest'ultima fase, che riporta la stella alla luminosità naturale per una struttura non degenere, è appunto identificata con il ramo orizzontale. Il ramo orizzontale si estende in temperatura a sinistra del ramo delle giganti rosse, mantenendo per lo più costante la luminosità. Come vedremo in seguito gli ammassi giovani, che presentano in fase di combustione centrale di elio strutture di massa intermedia e grande, non sviluppano il ramo orizzontale, ovvero non si disperdono in temperatura. Lo sviluppo del ramo orizzontale è dovuto alla perdita di massa, di natura stocastica, che interessa le stelle in fase di RGB dove sono molto espanse e possono quindi perdere materia tramite vento stellare. La conferma che la morfologia del ramo orizzontale sia dovuta alla perdita di massa in RGB viene dal confronto degli HB osservati con la sequenza data dalla posizione delle strutture di massa del nucleo di elio costante (cioè strutture di stessa età e quindi di stessa massa originale) ma di diversa massa dell'inviluppo nel momento di inizio della combustione quiescente dell'elio centrale (*Zero Age Horizontal Branch, ZAHB*). La ZAHB corrisponde infatti all'inviluppo inferiore del ramo orizzontale dato che le stelle evolvono abbandonando la ZAHB ma restando, durante tutta la fase di combustione centrale di He, a luminosità di poco superiori. In questo modo si spiega lo spessore in luminosità del ramo orizzontale osservato nei diagrammi colore-magnitudine di ammassi stellari.

All'esaurimento dell'elio centrale la combustione si sposta sul ramo asintotico (*Asymptotic Giant Branch, AGB*), la struttura è ora sorretta dalla combustione dell'elio a shell il cui contributo tende a spegnere la sovrastante shell di idrogeno. Le due shell non possono essere efficienti contemporaneamente, si alternano quindi, in fase di avanzato AGB (vedi la descrizione nel paragrafo §2.5.2) spostandosi sempre più verso l'esterno finché non si spengono definitivamente a causa delle basse temperature e la stella diventa una nana bianca di C ed O.

Masse Intermedie ($1 \lesssim M/M_\odot \lesssim 5$) e *masse grandi* ($M \gtrsim 5\,M_\odot$)

All'aumentare della massa, come abbiamo visto, le stelle si collocano a luminosità e temperature maggiori e ne segue un inevitabile cambiamento nelle modalità di combustione interna; stelle di piccola massa bruciano idrogeno principalmente tramite la catena protone-protone mentre stelle di massa maggiore tramite il ciclo CNO. Le stelle di massa piccola, intermedia e grande presentano, in fase di combustione centrale di idrogeno, caratteristiche diverse e per certi versi speculari. Mentre le strutture della regione inferiore, le $M \lesssim 1\,M_\odot$, presentano inviluppo convettivo (a causa dell'alta opacità) e nucleo radiativo (sotto le $0.3\,M_\odot$ sono strutture totalmente convettive), quelle della regione superiore hanno nucleo convettivo (a causa dei grandi flussi di energia) e inviluppo radiativo. La convezione nelle zone interne delle strutture della sequenza principale superiore fa sì che l'idrogeno venga omogeneamente estratto dall'intera zona rimescolata, ne segue che all'esaurimento dell'idrogeno nel nucleo risultano depauperate di combustibile non solo le zone nelle quali era efficiente la combustione ma anche una vasta regione circostante. La struttura si trova quindi senza sorgente centrale di energia nucleare e, sotto il controllo del viriale, è spinta a riprendere la contrazione gravitazionale che avrà termine solo quando la temperatura interna si sarà innalzata a sufficienza per indurre una efficiente combustione di idrogeno negli strati circostanti il vecchio nucleo convettivo.

In stelle sufficientemente massive (che presentano quindi un nucleo convettivo e un depauperamento omogeneo di combustibile nelle zone centrali) l'uscita dalla MS e l'innesco dell'idrogeno in shell è quindi preceduto da una fase di contrazione gravitazionale (*Overall Contraction*, vedi figura 1.3) nella quale dovrebbe essere raro osservare stelle a causa dei tempi evolutivi rapidi; tale mancanza di stelle diventa quindi, in ammassi sufficientemente giovani, un'osservabile indiretta della presenza di un nucleo convettivo. Come abbiamo già descritto per le stelle di piccola massa, ora la stella si sposta a temperature efficaci minori mantenendo la luminosità costante (SGB) fino ad arrivare alla base del ramo delle giganti rosse. Il fenomeno del $flash$ dell'elio descritto anche per le LMS è presente fino a $\sim 2.5\,M_{\odot}$. Al crescere della massa l'estensione in luminosità dell'RGB ed il tempo trascorso dalla stella in tale fase diminuisce (si vede ad esempio che per una $7\,M_{\odot}$ è praticamente inosservabile, vedi fig. 1.3) e di conseguenza la perdita di massa è ora trascurabile. In questo range di massa quindi le stelle hanno, in fase di combustione centrale di elio, praticamente la stessa massa che avevano in sequenza principale; ciò implica che per età giovani le stelle in fase di combustione di elio si dispongono tutte approssimativamente alla stessa luminosità e temperatura efficace. Il diagramma HR di ammassi giovani non presenterà quindi il ramo orizzontale ma quello che viene chiamato il *"clump"* dell'elio.

Anche il destino finale di una stella varia con modalità diverse a seconda del valore della massa. Ricordiamo innanzitutto che il limite superiore di stabilità per strutture degeneri non relativistiche di carbonio e ossigeno è di $\sim 1.4\,M_{\odot}$ (nota come massa di Chandrasekhar).

Per $0.5M_{\odot} \lesssim M \lesssim 1.4M_{\odot}$ la stella non riesce ad innescare la fusione del carbonio e si raffredda divenendo una nana bianca di carbonio e ossigeno. Anche le strutture con $1.4M_{\odot} \lesssim M \lesssim 6\div7M_{\odot}$ non riescono a raggiungere al centro la temperatura di fusione del carbonio e sviluppano un nucleo degenere di carbonio e ossigeno mentre subiscono forti perdite di massa che interessano solo le zone più esterne. Se la perdita di massa

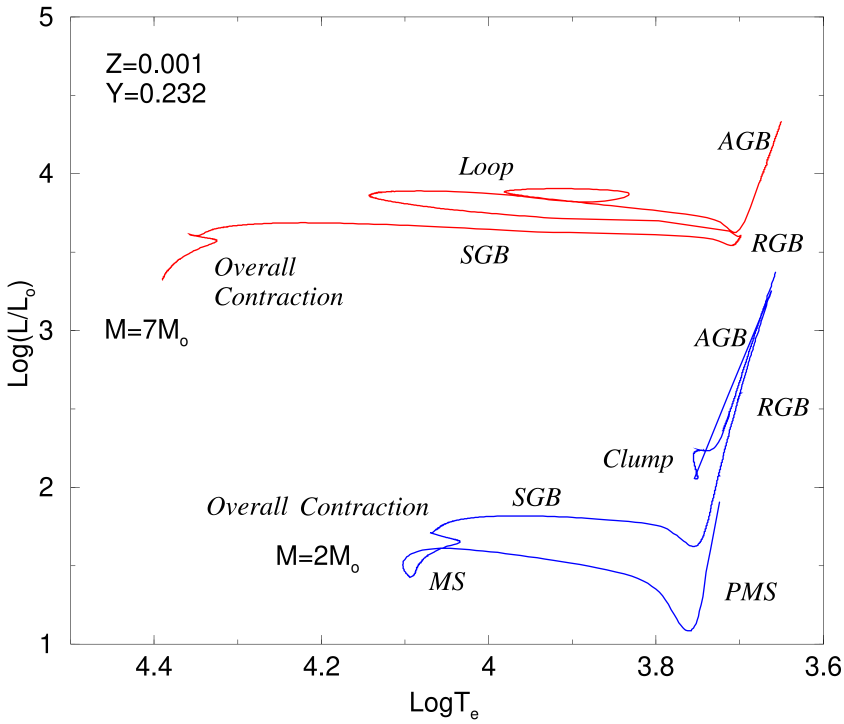

Figura 1.3: *Tracce evolutive di una stella di massa $M = 2M_\odot$, compresa la pre-sequenza (PMS), e di una stella di massa $M = 7M_\odot$, a partire dalla sequenza principale (MS). Dati da "Pisa Evolutionary Library" [9].*

è tale da portare la stella sotto le $1.4M_\odot$, impedendo l'instabilità della struttura, si ha, come nel caso precedente, una nana bianca di C+O; in caso contrario la struttura è instabile ed innesca il C in zone fortemente degeneri (deflagrazione del carbonio), il risultato è la nascita di una *supernova*. In figura 1.3 sono mostrate le tracce evolutive di una struttura di $2\,M_\odot$ e di una di $7\,M_\odot$ senza perdita di massa. A differenza della struttura di $2\,M_\odot$, quella di $7\,M_\odot$ presenta un RGB molto poco esteso in luminosità dato che riesce subito ad innescare quiescentemente la combustione centrale dell'elio. Si nota, inoltre, il particolare andamento in fase di combustione centrale di elio (*Loop*) che porta la stella, man mano che la luminosità aumenta, ad attraversare il diagramma portandosi a T_e alte per poi tornare a temperature basse ed infine innescare l'elio in shell sull'AGB. I motivi di tale andamento, legati alle modalità di produzione di energia nella shell di H ed al trasporto di tale energia negli strati sovrastanti, non sono ancora del tutto chiari (vedi ad esempio Stothers & Chin, 1993 [11]). Sopra le $6 \div 7\, M_\odot$ (M_{up}) la struttura riesce ad innescare il carbonio in maniera quiescente o semi-quiescente evitando la deflagrazione. Nel caso in cui la massa non superi le $\sim 10\, M_\odot$ si sviluppa, alla fine della combustione del carbonio, un nucleo degenere di ^{16}O , ^{20}Ne e ^{24}Mg in cui si verificano processi di cattura elettronica. Tali processi tendono a diminuire la pressione centrale inducendo una contrazione che aumenta la densità e favorisce ulteriormente l'efficienza della cattura elettronica. Questo nuovo fenomeno, reazionato positivamente, porta all'implosione della stella e alla successiva distruzione della struttura ad eccezione di un probabile residuo (stella di neutroni).

Stelle sufficientemente massicce ($M \gtrsim 10\, M_\odot$) giungono a superare indenni la combustione del carbonio procedendo attraverso le fasi di combustione di neon, ossigeno e silicio sino a formare un nucleo di ferro. Ciò che differenzia l'evoluzione nelle fasi di combustione centrale di idrogeno ed elio di queste strutture da quelle di massa intermedia è il prematuro innesco della combustione di elio centrale causato proprio dalle alte temperature interne che queste strutture raggiungono prima ancora di divenire giganti rosse. Infine le stelle massicce vanno in genere incontro ad una instabilità finale indotta dalla fotodisintegrazione del ferro, processo di assorbimento di energia controreazionato positivamente che porta la struttura ad un collasso favorendo i processi di neutronizzazione nel nucleo della stella. Le modalità con cui avviene tale collasso sono complicate e ancora molto controverse. È noto comunque che strutture stabili di neutroni possono formarsi solo se la massa del nucleo neutronizzato residuo non supera le $\sim 2\, M_\odot$, in caso contrario la struttura prosegue il collasso fino a divenire un "buco nero". Infine stelle di massa molto grande ($M \gtrsim 100\, M_\odot$) sono soggette, quando i loro nuclei sono ancora ricchi di ossigeno, ad un ulteriore instabilità dovuta alla formazione di coppie positrone-elettrone da parte di fotoni energetici, queste sottraggono energia alla struttura portandola ad un collasso che terminerà con la distruzione della struttura stessa e con una emissione di eneriga superiore anche a quella dovuta alla fotodisintegrazione del ferro.

In figura 1.4 è riportato lo schema generale riassuntivo delle principali caratteristiche evolutive e del destino finale di stelle di varia massa.

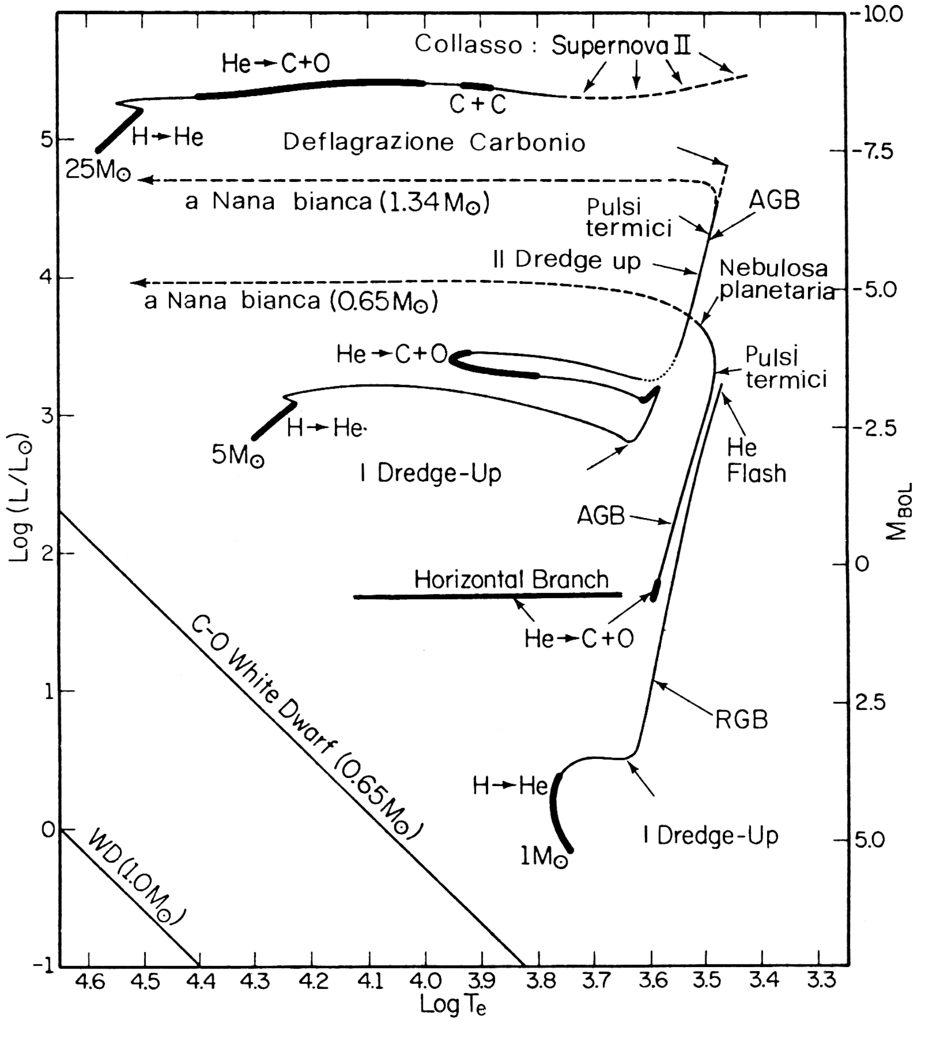

Figura 1.4: *Schema generale riassuntivo delle caratteristiche evolutive e del destino finale di stelle di varia massa. Le zone a tratto più spesso lungo le tracce indicano le fasi di combustione centrale. Da Astrofisica Stellare, Castellani [27].*

Capitolo 2

Modelli di sintesi di popolazione stellare

Come già descritto precedentemente, lo strumento più utilizzato per la determinazione dell'età delle popolazioni stellari è il confronto tra il diagramma colore-magnitudine teorico e quello osservativo. Tale tecnica necessita ovviamente della risoluzione delle singole stelle e non può quindi essere utilizzata per tutti gli ammassi stellari dato che, come noto, per la maggioranza degli ammassi esterni alla Galassia dobbiamo limitarci allo studio delle proprietà integrate, uniche quantità da noi osservabili. Con questo tipo di approccio vengono studiate non solo le popolazioni semplici, come gli ammassi stellari, ma anche le galassie a cui questi appartengono; inoltre, dato che non necessita di una particolare risoluzione, ci si può spingere molto lontano nello spazio e quindi nel tempo. Per ricavare informazioni dall'analisi dei colori integrati è necessario, ovviamente, disporre di uno scenario teorico di supporto e di una stima delle incertezze. La derivazione teorica dei colori integrati si basa su modelli di sintesi di popolazione che riproducono la distribuzione delle stelle di un ammasso nel diagramma colore-magnitudine. Come discuteremo più dettagliatamente in seguito tali modelli dipendono da molti elementi, primi fra tutti la distribuzione di massa stellare assunta ed i modelli di atmosfera adottati per ricavare la distribuzione spettrale di energia (e quindi magnitudine e colori nelle varie bande fotometriche). Sono inoltre importanti il set di tracce evolutive usato per calcolare le isocrone nel diagramma

HR, le assunzioni sulla composizione chimica, l'efficienza della convezione esterna e la quantificazione della perdita di massa. A differenza del caso in cui le stelle della popolazione sono risolvibili, la distribuzione iniziale di massa assume ora una maggiore importanza dato che la luminosità ed il colore integrato nelle diverse bande fotometriche dipendono fortemente dal numero di stelle che si trovano nelle varie fasi evolutive.

La bontà dei modelli di atmosfera utilizzati e la qualità delle tracce evolutive sono fondamentali per avere risultati affidabili; idealmente le tracce dovrebbero comprendere i modelli, calcolati con i più moderni input fisici (opacità, velocità delle reazioni nucleari, perdite di energia tramite emissione di neutrini, convezione nel nucleo e nell'inviluppo, ecc...), di tutte le fasi evolutive, comprendendo anche quelle di AGB, per un ampio range di masse e composizioni chimiche. Esistono vari *database* disponibili in letteratura che differiscono principalmente per le assunzioni sugli input fisici e sui modelli di atmosfera utilizzati, il problema, tuttavia, è che spesso non ricoprono gli ampi intervalli di masse e composizione chimica necessari per lo studio degli oggetti extragalattici. Per ovviare a ciò spesso vengono accorpati diversi *database* ma il risultato, generalmente, non è molto preciso. In particolare, per lo studio delle popolazioni della Galassia, sono sufficienti modelli con bassi valori della metallicità per le età maggiori (Popolazione II) ed alta metallicità per gli oggetti più giovani (Popolazione I), mentre per lo studio degli ammassi esterni alla Galassia non possiamo fare ipotesi restrittive sulla relazione età-metallicità dato che non conosciamo la loro storia. I modelli di atmosfera, necessari per ottenere la distribuzione spettrale dell'energia, possono essere puramente teorici in funzione della temperatura effettiva, della luminosità della stella, della composizione chimica e della gravità superficiale o fare uso di compilazioni semiempiriche di spettri.

Nel seguito analizzeremo in dettaglio alcuni dei punti chiave dello studio dei colori integrati riportando i risultati dei vari autori che in passato si sono occupati di modelli sintetici e colori integrati:

- La distribuzione iniziale in massa delle stelle (*Initial Mass Function, IMF*)
- L'efficienza della convezione esterna

- I modelli di atmosfera ⇒ influenza sulla relazione T_e-colore
- L'effetto delle fluttuazioni statistiche
- L'effetto della perdita di massa in RGB ⇒ influenza sulla morfologia del ramo orizzontale
- Il trattamento dei modelli di AGB (pulsi termici e perdita di massa) e nana bianca (*White Dwarf*, WD)

2.1 La distribuzione iniziale di massa (IMF)

Le proprietà integrate di un ammasso dipendono, come è ovvio, dal numero di stelle presenti nelle varie fasi evolutive e quindi dalla distribuzione in massa delle stelle dato che, come abbiamo visto, stelle di massa diversa presentano tempi evolutivi diversi. È necessario comunque distinguere il caso delle fasi post-MS da quello della sequenza principale. Nel primo caso, infatti, i tempi evolutivi sono relativamente brevi ed è possibile quindi scrivere:

$$dN_i \propto d\tau_i \tag{2.1}$$

dove l'indice 'i' identifica la fase evolutiva (post-MS). La costante di proporzionalità dipende comunque dalla distribuzione iniziale in massa e dall'età dell'ammasso. Per quanto riguarda la sequenza principale invece, proprio perché caratterizzata da un tempo scala anche di 3 ordini di grandezza superiore a quelli delle fasi successive, la distribuzione in massa è data direttamente dalla funzione di massa iniziale e l'età dell'ammasso indica solo quale sia la maggiore massa ancora in sequenza principale. Nel caso in cui nella storia evolutiva della popolazione in questione ci siano molteplici episodi di formazione la situazione ovviamente diviene più complessa; tuttavia, come abbiamo già discusso, in questa tesi ci interesseremo delle SSP cioè le popolazioni nate in un singolo episodio di formazione di durata breve rispetto a quella della popolazione in esame. In questo caso per evolvere un sistema sarà sufficiente conoscere la distribuzione in massa iniziale. La IMF è definita come il numero di stelle per intervallo di massa:

$$\psi(M) = dN/dM = N_{tot}\ f(M) \tag{2.2}$$

dove N_{tot} è il numero totale di stelle e $f(M)$ è la frazione di stelle con massa iniziale compresa tra M e $M + dM$. Spesso ci si riferisce alla $f(M)$ con il termine IMF, la differenza risiede solo nel fatto che la $f(M)$ risulta normalizzata all'unità:

$$\int_{M_l}^{M_u} \psi(M)\ dM = N_{tot} \qquad\qquad \int_{M_l}^{M_u} f(M)\ dM = 1 \tag{2.3}$$

M_l e M_u sono i valori limite inferiore e superiore delle masse presenti nella popolazione (Scalo, 1986 [12]).

In generale lo studio della frammentazione e del collasso di una nube di gas, cioè la prima fase della nascita di una popolazione stellare, risulta complicato a causa di molteplici fenomeni, come l'effetto di un campo magnetico o della turbolenza all'interno della nube, di cui è necessario tener conto; inoltre ci aspetteremmo che la IMF dipenda anche dalle caratteristiche dell'ambiente come, ad esempio, la composizione chimica. Dato che l'approccio puramente teorico risulta essere molto complesso, solitamente si cerca di determinare l'andamento della funzione di massa iniziale empiricamente. Dal confronto delle IMF ricavate empiricamente per sistemi stellari che differiscono per età e metallicità, secondo vari autori, sembrerebbe risultare una sorprendente uniformità e universalità della funzione di massa iniziale; il problema però è ancora molto dibattuto ed alcuni autori propendono invece per una dipendenza spaziale e temporale dell'IMF. Restano inoltre molti aspetti irrisolti, tra cui il fatto che una frazione significativa di stelle fa parte di sistemi binari o addirittura multipli e, in questo caso, può essere difficile individuare e risolvere le componenti più deboli (Kroupa, 2002 [13]); inoltre le stelle di grande massa permangono poco in sequenza principale ed emettono per lo più nel lontano UV che non è facilmente rilevabile da terra. In generale poi, nel campo osservato, possono essere presenti ammassi e associazioni che falsificherebbero il conteggio delle stelle. Dato che comunque i conteggi vengono effettuati in una regione sferica di dimensioni di $20 \div 100\, pc$ attorno al sole, è possibile che siano presenti solo alcune associazioni con effetti scarsamenti rilevanti.

Per ricavare la IMF si cerca di ripercorrere a ritroso nel tempo l'evoluzione subita dalla distribuzione in massa a partire da quella attuale (*Present Day Mass Function, PDMF*). La distribuzione di massa iniziale e quella attuale non sono ovviamente coincidenti dato che, dopo un certo periodo di tempo, le stelle più massicce saranno evolute in supernovae od in nane bianche. La distribuzione in massa attuale, cioè il numero di stelle per intervallo di massa dM, può essere a sua volta ricavato dalla funzione di luminosità (*Luminosity Function, LF*, ovvero il numero di stelle, del disco galattico nelle vicinanze del sole, per intervallo di magnitudine dV) per mezzo di un'opportuna relazione massa-luminosità:

$$LF(V) = \frac{dN}{dV} = \frac{dN}{dM}\frac{dM}{dV} = PDMF(M)\frac{dM}{dV} \tag{2.4}$$

L'equazione (2.4) lega quindi la funzione di luminosità e la funzione di massa per mezzo della relazione massa-luminosità. In questo modo è possibile risalire dalla funzione di luminosità, ricavata osservativamente, alla $PDMF(M)$ tramite la dM/dV teorica. La funzione di luminosità viene ottenuta osservativamente tramite conteggi. Chiaramente dobbiamo utilizzare un campione il più possibile completo e quindi queste misure possono essere fatte solo nelle vicinanze del Sole[1]. Le tecniche utilizzate sono essenzialmente due, quella astrometrica e quella fotometrica: la prima, metodo della parallasse trigonometrica, sfrutta il piccolo spostamento nella collocazione apparente delle stelle che sorge dal cambiamento della posizione del punto di osservazione nella rivoluzione attorno al Sole; il secondo metodo sfrutta invece il diagramma colore-magnitudine, infatti dallo studio dello spettro di una stella è possibile determinarne il tipo e quindi dal colore la sua luminosità intrinseca. Per mezzo di questi metodi viene ricavata la funzione di luminosità locale, sfortunatamente però le forme della funzione di luminosità ottenute con le due tecniche concordano solo per magnitudini visuali assolute minori di $11\,mag$; per valori superiori (e quindi per masse più piccole) l'andamento è ancora molto incerto (in particolare la parallasse trigonometrica fornisce una densità maggiore di stelle rispetto alla fotometria). Per passare dalla funzione di massa

[1] Si intende la regione della Via Lattea circostante il Sole, a seconda degli autori vengono considerati per tale regione raggi che possono variare da $5\,pc$ a $\sim 100\,pc$; nell'emisfero nord sono note le distanze di molte stelle VLM e LM per mezzo della parallasse trigonometrica.

attuale a quella iniziale è necessario considerare che nel disco galattico la formazione stellare è ancora attiva e quindi le stelle di disco non costituiscono una popolazione semplice ma possiedono età diverse tra loro che vanno dall'età di formazione del disco ad età molto recenti. Facendo poi l'ipotesi plausibile che la funzione che fornisce il numero di stelle nate per unità di massa e tempo $C(M,t)$, sia la convoluzione della $IMF(M)$, assunta indipendente dal tempo, e della *Star Formation Rate* (*SFR*), cioè del tasso con cui le stelle nascono, si ha:

$$C(M,t) = IMF(M)\, SFR(t) \tag{2.5}$$

A questo punto, per ottenere la distribuzione in massa attuale, si integra nel tempo la $C(M,t)$. Dato che al crescere della massa diminuisce il tempo di evoluzione in sequenza principale è possibile definire, per una popolazione di età T_0, una massa critica M_0 tale che il tempo di evoluzione in sequenza principale sia $\tau(M_0) = T_0$. In questo modo tutte le stelle di massa minore di M_0 hanno un tempo di sequenza principale maggiore dell'età della popolazione stessa e si trovano ancora oggi in sequenza principale. Se, viceversa, una stella ha massa maggiore di M_0 il suo tempo di combustione centrale dell'idrogeno è inferiore all'età della popolazione e quindi la stella può trovarsi in sequenza principale solo se è nata nell'intervallo di tempo compreso tre $T_0 - \tau$ e T_0. Possiamo quindi scrivere:

$$PDMF(M) = \begin{cases} \int_0^{T_0} IMF(M)\ SFR(t)\ dt & \text{per } \tau(M) \geqslant T_0 \\ \\ \int_{T_0-\tau(M)}^{T_0} IMF(M)\ SFR(t)\ dt & \text{per } \tau(M) < T_0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Al crescere della massa, $\tau(M)$ diminuisce e quindi diminuisce anche l'intervallo di integrazione nella seconda equazione, ne segue che più è grande la massa delle stelle della popolazione più la SFR da cui dipende la distribuzione di massa attuale è recente. Per stelle di piccola massa invece è fondamentale conoscere l'intera SFR ma questo problema è tuttora oggetto di dibattito infatti, anche nell'ipotesi che la SFR della Galassia abbia valore universale, i vari studi svolti portano a conclusioni diverse. Ad esempio modelli di evoluzione chimica della Galassia (vedi ad esempio Pardi &

Ferrini, 1994 [14] e Shore & Ferrini, 1995 [15]) sembrano indicare una SFR lievemente decrescente almeno negli ultimi 10 miliardi di anni, mentre altri studi portano a soluzioni diverse. Determinando l'età di un campione di stelle nane per mezzo dello studio della cromosfera, Rocha-Pinto et al. (2000 [16]) suggeriscono che il disco della Galassia abbia subito almeno due eventi di formazione, cioè due brevi ma intense fasi di creazione. Anche questo problema rimane quindi ancora aperto e la mancanza di informazioni più precise sulla SFR è quindi fonte di incertezze soprattutto per stelle di piccola massa e quindi per le popolazioni stellari antiche. Una delle prime stime dell'IMF, per mezzo dell'osservazione delle proprietà della funzione di luminosità LF (che, ricordiamo, è definita come il numero di stelle per intervallo di magnitudine) per stelle nelle vicinanze del Sole, fu fornita da Salpeter (1955 [17]). Salpeter trovò che la distribuzione poteva essere descritta da una legge di potenza:

$$dN \propto M^{-s} dM \tag{2.7}$$

con $s \simeq 2.35$ per $0.4\, M_\odot \leq M \leq 10\, M_\odot$. Per quanto abbiamo visto, sia nella determinazione della funzione di luminosità sia nel passaggio dalla $PDMF$ alla IMF, le maggiori indeterminazioni si hanno per le masse più piccole, ovvero più difficilmente osservabili; ci aspettiamo quindi che l'errore con cui viene determinato il coefficiente s dell'equazione (2.7) sia maggiore per valori minori della massa. D'altra parte le grandi masse sono poche e quindi, anche in questo caso, l'errore con cui viene determinato s è grande proprio per problemi statistici. La maggior parte degli studi più recenti sembra confermare la IMF di Salpeter per $0.5 \leq M/M_\odot \leq 10$ (Kroupa, 2002 [13]), purtroppo la situazione per masse fuori da questo intervallo è ancora lontana dall'essere chiarita. Riportiamo di seguito la IMF ricavata da Kroupa (2000 [25]) e generalmente adottata in letteratura:

- $s = 0.3 \pm 0.7$ per $0.01 \leq M/M_\odot < 0.08 \rightarrow$ BD: *Nane Brune*
- $s = 1.3 \pm 0.5$ per $0.08 \leq M/M_\odot < 0.50 \rightarrow$ VLM: *Stelle di massa molto piccola*
- $s = 2.3 \pm 0.3$ per $0.50 \leq M/M_\odot < 1.00 \rightarrow$ LMS: *Stelle di piccola massa*
- $s = 2.3 \pm 0.7$ per $1.00 \leq M/M_\odot$ $\rightarrow$ *Stelle di massa intermedia e grande*

In definitiva sembra essere valido l'andamento di Salpeter per $0.5 \leq M/M_\odot \leq 10$ e decrescente per stelle di massa minore.

2.1.1 Effetto della IMF sui colori integrati

Quando si vogliano studiare i colori integrati è inevitabile scontrarsi con il problema della distribuzione di massa che, nel caso di popolazioni semplici, si riduce alla distribuzione di massa iniziale. È quindi necessario, per prima cosa, scoprire se e come una variazione della IMF influenza i colori integrati e i rapporti massa-luminosità. Come abbiamo visto, anche se con esponenti diversi nei vari range di massa, per la IMF è generalmente adottata una legge di potenza (2.7) e variare la distribuzione di massa significa in definitiva variare il valore dell'esponente s. Tra i vari lavori trovati in letteratura su questo argomanto riporteremo di seguito, per cercare di dare un quadro complessivo di ciò che è stato fatto, quelli che ci sono sembrati più significativi. Prima però precisiamo che in generale, almeno per quanto riguarda il calcolo dei colori data una certa luminosità dell'ammasso sintetico nella banda del visibile, non si tiene conto delle stelle di massa molto piccola perché è stato dimostrato da vari autori che le masse piccole contribuiscono in maniera trascurabile ai risultati. In pratica vari autori troncano quindi la IMF ad un valore minimo M_l in modo tale da non considerare poi masse minori di M_l. Quindi, se siamo interessati solo ai colori integrati di una popolazione semplice, possiamo trascurare le stelle di massa più piccola. L'estremo inferiore delle masse stellari prese in esame, come vedremo meglio in seguito, riveste invece un ruolo non trascurabile nella determinazione della massa totale in stelle e quindi del rapporto massa-luminosità M/L della popolazione analizzata. Sia in Buzzoni (1989 [18]) che in Worthey (1994 [19]), che si interessano dei rapporti massa-luminosità, è stato adottato $M_l = 0.1\, M_\odot$ in modo da tener conto anche delle VLM che, come abbiamo visto, sono stelle non evolute che popolano quindi la ZAMS (*Zero Age Main Sequence*). Nel caso in cui ci si limiti allo studio dei colori integrati è quindi possibile assumere $M_l = 0.6$. Nel loro lavoro Brocato et al. (1998 [20]) hanno variato il valore di M_l nell'intervallo $0.6 \div 0.15\, M_\odot$ proprio per dimostrare che le strutture al di sotto delle $0.6\, M_\odot$ sono trascurabili. Gli autori dimostrano infatti che, costruendo sintetici con un numero fisso di stelle, le differenze apportate ai colori integrati rientrano nelle fluttuazioni statistiche (vedi §2.4). Comunque, come è ovvio aspettarsi, le differenze maggiori (in ogni caso sempre inferiori a $0.1\,mag$) si riscontrano nei colori infrarossi dato che le stelle di piccola massa della sequenza principale sono deboli, relativamente fredde e numerose. Vediamo ora l'influenza del valore dell'IMF sui risultati. In generale molti autori concludono che tale parametro sia poco influente sui colori integrati mentre sulla luminosità integrata l'effetto risulta maggiore. Più in dettaglio riportiamo i risultati dei lavori che ci sono sembrati più significativi. In Buzzoni (1989 [18]) sono stati costruiti modelli, al variare della metallicità ($Z = 0.0001 \div 0.03$), dell'abbondanza di elio ($Y = 0.23; 0.25$) e della perdita di massa sull'intervallo di età $4.0 \div 18\,Gyr$ e assumendo per l'esponente dell'IMF i valori $s = 1.35$; $s = 2.35$; $s = 3.35$. Tali modelli presentano nel $(V - I)$ piccole variazioni di colore ($\sim 0.01\,mag$) che raggiungono valori maggiori ($\sim 0.1\,mag$) solo per età $\sim 18\,Gyr$; nel $(B - V)$ le variazioni risultano addirittura minori. In seguito gli stessi valori di s sono stati assunti da Worthey (1994 [19]) su di un range di età simile, $t = 1.5 \div 17\,Gyr$, l'autore conclude che la corrispondente variazione in magnitudine è dello stesso ordine di quella dovuta alle incertezze del modello (morfologia del ramo orizzontale, incertezza sull'abbondanza di elio, ecc...), è quindi possibile prevedere teoricamente gli effetti di una variazione della IMF ma non è possibile ricavare il valore dell'IMF dalle osservazioni dato che tali effetti non sono distinguibili da altri. In Brocato et al. (2000) vengono presentati i colori integrati sintetici per età $t = 8 \div 15\,Gyr$ con $Z = 0.0001 \div 0.02$. Stavolta la IMF è stata assunta con $s = 2.35$ fino a $0.3 M_\odot$ e poi $s = 1.2$ fino a $0.1\,M_\odot$. Spostando il limite inferiore della massa per cui il valore dell'esponente è $s = 2.35$ da $0.6\,M_\odot$ a $0.2\,M_\odot$ e mantenendo costante la magnitudine totale nel V, gli autori riscontrano che non ci sono variazioni significative nei colori integrati. Inoltre variando l'esponente s della IMF nel range $0.0 \div 3.35$ per $M > 0.3\,M_\odot$, tenendo fisso il numero di stelle, hanno ottenuto, in accordo con Buzzoni, una variazione dei colori integrati $(U - B)$, $(B - V)$, $(V - R)$, $(V - I)$ non superiore a 0.01 mag mentre per quanto riguarda la magnitudine visuale assoluta V si passa da $V = -7.52 \pm 0.04$ per $s = 0.35$ a $V = -7.35 \pm 0.03$ per $s = 1.35$ per poi tornare a $V = -7.52 \pm 0.15$ per $s = 2.35$.

In un lavoro precedente, Brocato et al. (1998 [20]), sono stati studiati gli effetti della variazione dell'IMF sui colori a banda larga nei filtri Johnson-Cousins (vedi Appendice B) e nelle bande utilizzate dall'Hubble Space Telescope (HST, vedi §2.3) per popolazioni semplici di età nell'intervallo $8\,Myr \div 5\,Gyr$. La scelta di questo range di età permette di fare simulazioni libere da assunzioni sulla distribuzione in colore dell'HB. Tali modelli non sono quindi influenzati dalle incertezze dovute alla perdita di massa in RGB e neanche da quelle in AGB (vedi §2.6). Noi riportiamo solo i risultati inerenti i colori a banda larga. È stata utilizzata una struttura di riferimento (RF) con le seguenti caratteristiche:

- *Composizione chimica:* $Y = Y_{\odot} = 0.27; Z = Z_{\odot} = 0.02$
- *Numero totale di stelle:* $N = 30000$ distribuite tra $M_l = 0.6M_{\odot}$ e $M_u = 25M_{\odot}$
- *IMF:* $s = 2.35$ (Salpeter)

Per studiare l'influenza della IMF sul modello, sono stati scelti valori dell'esponente s pari a $s = 0.0$, $s = 1.35$ e $s = 3.35$. Gli autori hanno riscontrato che per età minori di $1\,Gyr$, essendo la luminosità prodotta per lo più da stelle di grande massa, al diminuire del parametro s la luminosità aumenta. Per $t > 1\,Gyr$ la situazione risulta invertita dato che in questo caso il maggior contributo alla luminosità totale è dato dalle stelle di piccola massa ($M < 1\,M_{\odot}$) il cui numero diminuisce al diminuire di s. Per quanto riguarda i colori integrati $(B - V)$ e $(V - K)$ le variazioni massime, ottenute con $s = 3.35$ raggiungono le $0.2\,mag$ e si verificano solo ad età minori di $\sim 300\,Myr$. Questo risultato non è in contrasto con quelli ottenuti da Buzzoni (1989) e da Brocato et al. (2000) proprio perché, in questi lavori, non sono state prese in considerazione età inferiori, rispettivamente, ai $4\,Gyr$ e agli $8\,Gyr$. La diminuzione dell'influenza dell'IMF ad età maggiori di $300\,Myr$ è dovuta principalmente al fatto che i colori sono dominati, a queste età, dalle giganti rosse e dalle Post-RGB e per tali stelle la distribuzione è fissata solo dai tempi scala evolutivi; ad età minori, invece, stelle di grande massa sono ancora in sequenza principale e, quindi, distribuite secondo la IMF.

Riportiamo infine i risultati di due lavori più recenti, quello di Yi (2003 [22]) e quello Bruzual & Charlot (2003 [23]). Il primo lavoro riporta l'andamento dei colori integrati con il tempo per un modello a $Z = 0.001$ per tre diversi valori dell'esponente dell'eq. (2.7), il secondo invece utilizza quattro diverse forme dell'IMF e riporta anche l'andamento del rapporto M/L (vedi figura 2.1) per $Z = Z_{\odot}$. In entrambi i casi

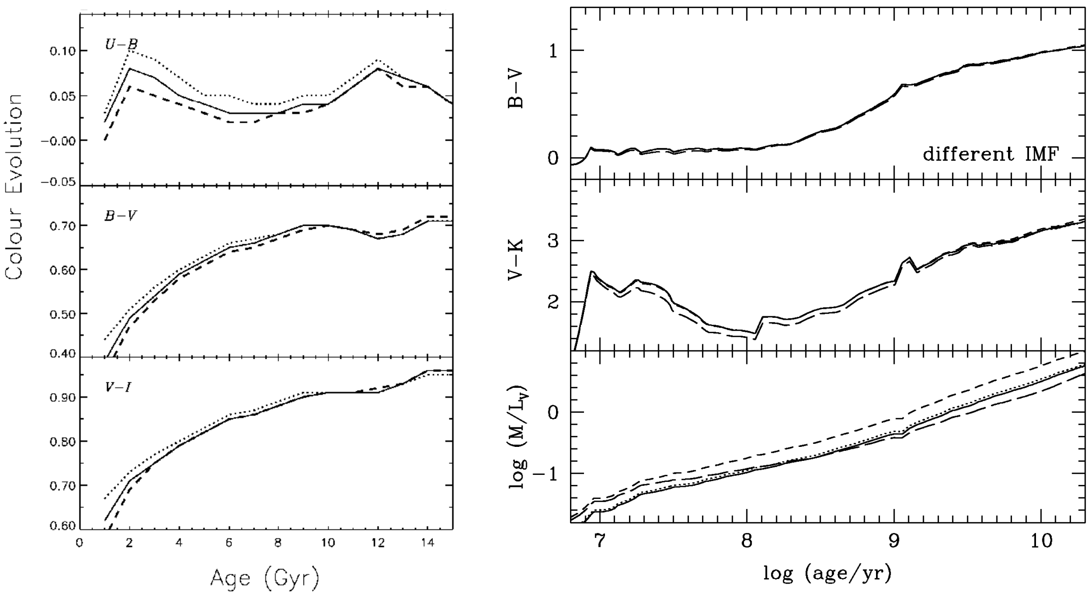

Figura 2.1: *Influenza dell'IMF sui colori integrati e sul rapporto massa-luminosità. A sinistra (Yi, 2003 [22]) è riportato l'andamento dei colori integrati, per* $Z = 0.001$*, per tre diverse assunzioni del valore dell'esponente dell'IMF: la linea continua per* $s = 2.35$*, quella punteggiata per* $s = 1.35$ *e quella tratteggiata per* $s = 3.35$*. A destra (Bruzual & Charlot, 2003 [23]) è riportato, per* $Z = Z_{\odot}$*, l'andamento dei colori integrati e del rapporto* M/L_V *(in unità di* $M_{\odot}/L_{V\odot}$*) per quattro diverse IMF: la linea continua corrisponde all'IMF di Chabrier (2003b [24]), quella punteggiata all'IMF di Kroupa (2001 [25]), quella a tratto breve all'IMF di Salpeter (1955 [17]) e quella a tratto lungo all'IMF di Scalo (1998 [26]).*

comunque le differenze in colore non superano le $0.05\,mag$ e diminuiscono per colori più blu, questo perché il colore $(B - V)$ è dominato, ad ogni età, dalle stelle in fasi vicine al *Turn-Off*. I colori infrarossi risultano invece più sensibili alla distribuzione delle stelle lungo l'isocrona, soprattutto per età $t \lesssim 1\,Gyr$ quando una diminuzione di s, come già visto, provoca un aumento di stelle di grande massa che stanno evolvendo fuori dalla sequenza principale. Il rapporto M/L dipende, come atteso, sensibilmente dalla distribuzione in massa, soprattutto per le strutture di piccola massa dato che contribuiscono solo alla massa totale e non alla luminosità. Come descritto nella didascalia della figura, oltre che a leggi di potenza con valore dell'esponente $s = 1.2$ e $s = 2.35$, sono state considerate distribuzioni di massa diverse. Le variazioni dovute a quest'ultime rientrano comunque in quelle ottenute passando da $s = 1.2$ a $s = 2.35$. I grafici non riportano gli errori statistici (vedi §2.4). Concludendo, i colori integrati sembrano quindi essere dipendenti solo debolmente dall'esponente della IMF adottato entro valori plausibili per questa quantità.

2.2 La convezione nelle strutture stellari

Per stabilire quando una zona della stella è soggetta a moti convettivi è generalmente utilizzato il teorema di Schwarzschild (vedi ad esempio Castellani, Astrofisica Stellare [27]) che si basa essenzialmente sul principio di Archimede. Secondo il criterio di stabilità di Schwarzschild, una zona è soggetta a convezione se $\nabla_{rad} > \nabla_{ad}$, dove $\nabla = d\log T/d\log P$; l'indice "rad" indica che la variazione è quella che si avrebbe se il trasporto di energia avvenisse solo per via radiativa mentre l'indice "ad" indica la variazione che avremmo se l'elemento si spostasse adiabaticamente, ovvero senza scambi di calore con l'ambiente. Resta da stabilire quale sia il gradiente di temperatura nelle zone stellari in cui la convezione è efficiente. Negli interni stellari, per stelle sufficientemente massicce ($M \gtrsim 1.1\, M_\odot$), la capacità termica della materia risulta essere molto grande perciò i tipici flussi stellari vengono trasportati con un gradiente $\nabla \approx \nabla_{ad}$. In questo caso l'unica fonte di incertezze è la trattazione del fenomeno di *overshooting* ovvero del fenomeno, piuttosto intuitivo, per cui in realtà la zona di convezione risulterebbe essere più ampia della zona dove il criterio di stabilità viene violato dato che l'elemento di materia avrà una velocità diversa da zero sul bordo e proseguirà, quindi, per inerzia anche all'esterno di questo. L' *overshooting* in fase di combustione centrale di stelle di massa intermedia che possiedono un nucleo convettivo ha effetto sui tempi evolutivi, sulla luminosità e sulla temperatura delle stelle; tuttavia la presenza o meno di un *overshooting* significativo è un problema ancora fortemente dibattuto (vedi ad esempio Bertelli et al., 2003 [28]), anche se negli ultimi anni l'efficienza ritenuta da alcuni autori necessaria per ottenere un buon accordo con i dati osservativi è diminuita sempre più. Comunque, per quanto riguarda i colori integrati, Yi et al. (2000 [29], 2003 [22]) fanno notare che, almeno nel caso di popolazioni non troppo giovani, l'effetto dell'*overshooting* è trascurabile. Infatti tale fenomeno risulta effettivo solo per stelle di massa tale da sviluppare un nucleo convettivo, a causa dei grandi flussi di energia, e gli effetti sono quindi visibili solo ad età minori di $2\,Gyr$ (vedi §1.2). In figura 2.2 è riportato l'andamento temporale dei colori integrati con e senza *overshooting* ottenuto da Yi (2003). L'effetto dell'*overshooting*, nel nucleo di stelle in fase di combustione centrale di H, è principalmente quello di prolungare i tempi evolutivi in sequenza principale (zona convettiva più ampia e quindi maggiore quantità di combustibile a disposizione); a parità di età quindi le stelle in MS hanno massa maggiore e quindi sono più luminose. Inoltre l'effetto aumenta gradualmente all'aumentare della massa e quindi al diminuire dell'età. La distanza percorsa dall'elemento di convezione all'interno della regione con $\nabla_{rad} < \nabla_{ad}$ viene misurata in unità dell'altezza di scala della pressione H_p[2].

Nelle regioni esterne della stella invece il calcolo del gradiente ambientale è più problematico a causa delle difficoltà nella trattazione di fenomeni come viscosità e turbolenza; nonostante siano stati fatti vari tentativi, attualmente non esiste una teoria che tratti il problema in maniera precisa. Generalmente viene adottata una teoria semplificata cosiddetta della "Mixing Length Approximation" (MLA) (vedi ad esempio Bohm-Vitense, *Introduction to Stellar Astrophysics* [30]) che si basa sull'approssimazione che gli elementi convettivi percorrano adiabaticamente un tragitto l e che solo al termine di tale tragitto cedano l'energia termica in eccesso all'ambiente circostante. Anche il cammino percorso adiabaticamente l viene solitamente espresso in funzione dell'altezza di scala della pressione H_p per mezzo del coefficiente di proporzionalità α:

$$l = \alpha\, H_p \tag{2.8}$$

Nella pratica l'efficienza della convezione esterna, governata dal parametro libero α,

[2] L'altezza di scala della pressione (H_p) è definita come la variazione di raggio per cui la pressione si riduce di un fattore e.

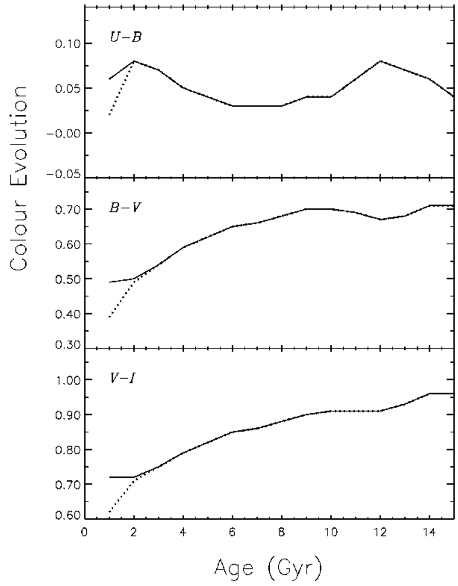

Figura 2.2: *Effetto dell'overshooting sui colori integrati per modelli con metallicità* $Z = 0.001$*. Le linee continue indicano modelli senza overshooting mentre quelle tratteggiate modelli con overshooting pari a* $0.2\,H_p$*; Yi (2003).*

viene variata entro limiti ragionevoli per raggiungere l'accordo con le temperature osservate nelle atmosfere stellari. Una variazione del parametro α comporta variazioni della struttura dell'inviluppo esterno (raggio e temperatura) ma non delle zone interne (luminosità). In genere l'efficienza della convezione esterna viene calibrata cercando di riprodurre il colore osservato per stelle di data massa e composizione chimica. Il valore ottenuto per un certo tipo di stelle non è in linea di principio utilizzabile per stelle sia di composizione chimica diversa che in fase evolutiva diversa (vedi ad esempio Renzini & Fusi Pecci, 1988 [31]) dato che la MLA non è una descrizione fisica precisa del fenomeno di convezione ma solo una parametrizzazione. Le fasi evolutive che più risentono della variazione del parametro α sono la parte centrale della sequenza principale, popolata da $0.5\,M_\odot \lesssim M \lesssim 1.2\,M_\odot$, e, soprattutto, la fase di gigante rossa caratterizzata da estesi inviluppi convettivi. Un valore maggiore del parametro α causa infatti una maggiore efficienza del trasporto di energia e quindi il modello risulta più caldo (cioè più blu). È quindi possibile calibrare α, per esempio, riproducendo il colore del ramo delle giganti rosse alle varie composizioni chimiche. Dato che le stelle in fase

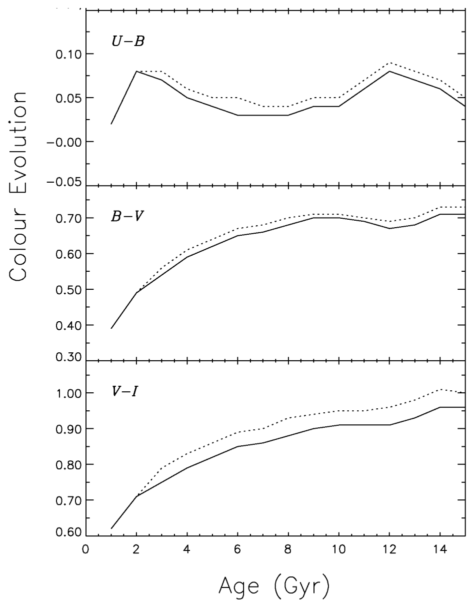

Figura 2.3: *Effetto del parametro α della mixing–length sui colori integrati per modelli con metallicità $Z = 0.001$. La linea continua corrisponde ad $\alpha = 1.74$ mentre quella tratteggiata a $\alpha = 1.50$; Yi (2003).*

di gigante rossa sono molto luminose ed influenzano quindi sensibilmente i colori integrati, soprattutto nell'infrarosso, è ovvio quanto sia importante calcolare colori integrati con isocrone teoriche che riproducano il colore del ramo delle giganti rosse di ammassi globulari osservati e di opportuna composizione chimica. In figura 2.3 è riportato l'andamento nel tempo dei colori integrati per due diversi valori di α (Yi, 2003). Come si può vedere le variazioni maggiori sono state ottenute nel $(V - I)$ (dato che le variazioni di α influenzano il colore delle strutture con inviluppi convettivi e quindi di AGB e di RGB), causando un'incertezza nella stima dell'età anche del 25%. Inoltre, per lo stesso motivo, gli effetti si iniziano a vedere solo attorno ai $2\,Gyr$ proprio perché prima le stelle di AGB e RGB sono molto poche.

2.3 Trasformazioni di colore

Le trasformazioni di colore sono le relazioni che legano la temperatura efficace e la magnitudine bolometrica alla loro controparte osservativa, ovvero agli indici di colore ed alla magnitudine in una data banda fotometrica; sono quindi necessarie per costruire i diagrammi CM sintetici e confrontare teoria e osservazione.

Ricordando che:

$$L_\lambda = 4\,\pi\,R^2\,F_\lambda \tag{2.9}$$

$$L_\lambda = 4\,\pi\,d^2\,f_\lambda \tag{2.10}$$

dove F_λ e f_λ sono rispettivamente i flussi, nella lunghezza d'onda λ, alla superficie della stella e a terra mentre R, d e L sono il raggio, la distanza e la luminosità della stella stessa, si può scrivere:

$$f_\lambda = 10^{-0.4A_\lambda}\,(R/d)^2\,F_\lambda \tag{2.11}$$

con A_λ l'assorbimento operato dal mezzo interstellare. Sia ora S_λ la curva di trasmissione, alla lunghezza d'onda λ, dello strumento utilizzato. La magnitudine apparente della stella è data, per definizione, da:

$$m_{S_\lambda} = -2.5\log\left(\frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f_\lambda S_\lambda d\lambda}{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f_\lambda^0 S_\lambda d\lambda}\right) + m_\lambda^0 \tag{2.12}$$

dove f_λ^0 è il flusso di riferimento che produce la magnitudine apparente m_λ^0. Fissare m_λ^0 e f_λ^0 significa, in altre parole, stabilire in quale caso si ha $m_\lambda = 0$ e quindi $f = 1$ nelle unità di misura scelte (solitamente il flusso viene espresso in $erg\ sec^{-1}\ cm^{-2}$). L'argomento del logaritmo è chiaramente adimensionale. Solitamente la stella di riferimento è Vega (αLyr), questa scelta non è comunque obbligatoria e lo spettro di riferimento non è necessariamente uno spettro stellare (vedi Girardi, 2002 [32]). Il sistema Johnson-Cousins $UBVRIJHKLMN$ assume per Vega una magnitudine nel visibile $V = 0.03$ e tutti i colori uguali a zero. In figura 2.4 sono riportate le curve di trasmissione per vari sistemi fotometrici e gli spettri di Vega, del Sole e di una gigante dell'ammasso globulare M5. I sistemi Washington e HST/WFPC2 $VEGAmag$ seguono una definizione simile a quella del sistema Johnson-Cousins ma assumono che alcuni colori siano, anche se di poco, diversi da zero.

Le relazioni ottenute permettono quindi di ricavare la magnitudine assoluta alla lunghezza d'onda M_λ per ogni stella di cui siano note la temperatura effettiva, la gravità superficiale e la composizione chimica, ovvero il flusso alla superficie.

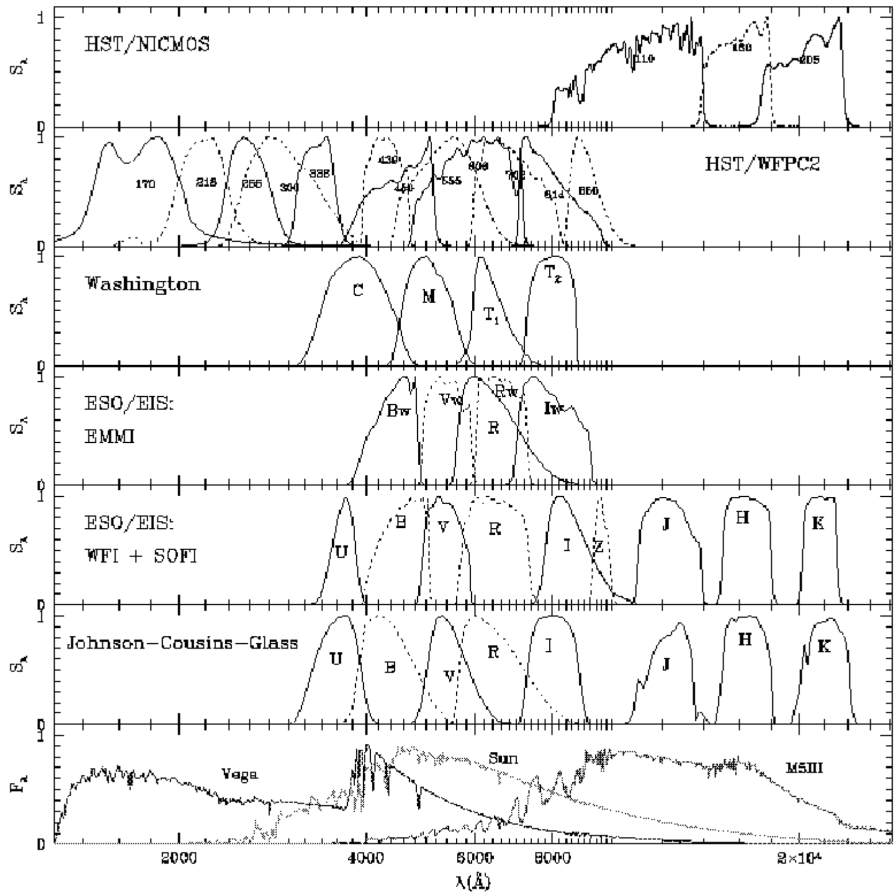

Figura 2.4: *Curve di trasmissione per i vari sistemi fotometrici indicati. Le curve sono tutte rinormalizzate al valore massimo di S_λ. Nell'ultimo pannello sono riportati gli spettri di Vega, del Sole e di una gigante di M5 (Girardi, 2002 [32]).*

Ricavare relazioni colore-temperatura è piuttosto complicato a causa dell'assorbimento che l'atmosfera stellare opera sul flusso uscente. Tale assorbimento, oltre che da composizione chimica e temperatura, dipende dalla pressione che, a sua volta, è determinata dalla gravità superficiale g. In definitiva quindi la trasformazione di colore dipende dalla composizione chimica, dalla temperatura efficace e dalla gravità superficiale. La radiazione assorbita dall'atmosfera viene inoltre riemessa a diverse lunghezze d'onda falsando la distribuzione spettrale di energia (effetto denominato di *blanketing*).

La stima delle relazioni tra temperatura effettiva e colore può essere affrontata da un punto di vista puramente teorico o semiempirico. In vari casi la temperatura effettiva della stella può essere ricavata dalla misura diretta del diametro angolare; infatti, come descritto in Appendice B, la radiazione emessa da una stella può essere approssimata a quella di un corpo nero di opportuna temperatura. Combinando le equazioni (B.1) e (B.3) ed essendo $\Phi_0 = L/(4\pi R^2)$ si ottiene:

$$\Phi = \frac{1}{4}\,\sigma\,\theta^2\,T_e^4 \tag{2.13}$$

dove $\theta = 2R/d$ è il diametro angolare[3]. Tuttavia il numero di stelle per le quali il diametro angolare è misurabile con sufficiente precisione è molto esiguo, soprattutto per la parte inferiore della sequenza principale che è popolata da stelle di piccola massa; inoltre la radiazione ricevuta necessita di correzioni (legate a modelli teorici) che tengano in considerazione i processi di estinzione prodotti dal mezzo interstellare. La relazione T_e-colore ricavata empiricamente ha lo svantaggio di essere valida solo per i particolari filtri utilizzati per le osservazioni, questo non può che essere un difetto soprattutto da quando sono disponibili nuovi strumenti come quelli supportati dall'HST (*Hubble Space Telescope*) tra cui la *Wide Field Camera 2 (WFPC2)* e la *Near Infrared Camera and Multi-Object Spectrometer (NICMOS)*.

Un buon set di trasformazioni, utilizzabile per sintesi di popolazione, deve ricoprire un ampio range di composizioni chimiche (da $Z \simeq 0.0001$ fino a $Z \simeq 0.04$),

[3]In realtà il disco stellare non è uniforme in brillanza superficiale e, per la determinazione del raggio R, devono quindi essere introdotti fattori correttivi.

temperature efficaci e gravità, inoltre deve fornire spettri che abbiano una risoluzione buona ed uniforme al variare della lunghezza d'onda.

Ovviamente tali metodi, che presuppongono il calcolo degli assorbimenti degli atomi delle molecole più importanti in atmosfera nei vari gradi di ionizzazione, sono molto complessi e presentano quindi incertezze. I problemi maggiori si presentano al diminuire della temperatura a causa della formazione di grani e molecole complesse nella zona più esterna dell'atmosfera che provocano forti effetti di *blanketing* difficili da calcolare teoricamente.

Come esempio delle incertezze tuttora presenti sull'argomanto, in figura 2.5 sono riportate le trasformazioni nel piano colore-magnitudine di una stessa isocrona teorica, utilizzando tre diverse trasformazioni di colore che utilizzano i tre metodi descritti (empirico, semiempirico e teorico). In generale si può dire che mentre la stima della correzione bolometrica è piuttosto stabile, le incertezze relative agli indici di colore possono differire anche di $\sim 0.1\,mag$ nella parte inferiore della sequenza principale.

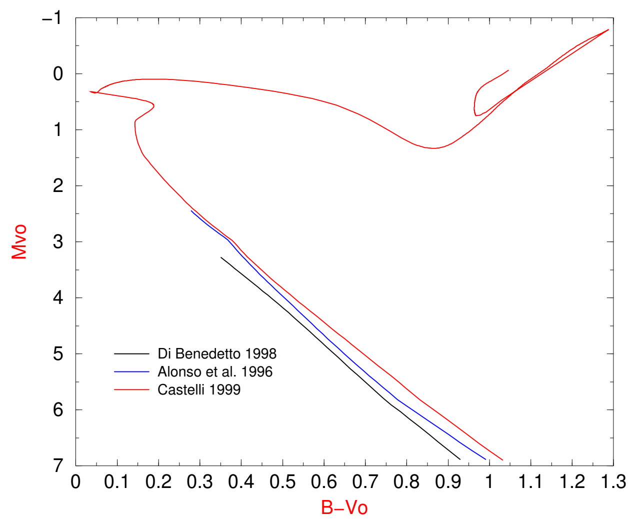

Figura 2.5: *Trasformazioni nel piano colore magnitudine di una stessa isocrona teorica utilizzando tre diverse trasformazioni di colore: metodo empirico (Di Benedetto, 1998), metodo semiempirico (Alonso et al., 1996) e metodo teorico (Castelli, 1999).*

Attualmente, tra i molteplici set estesi di trasformazioni di colore disponibili in letteratura, nessuno risulta privo di imperfezioni su tutto l'intervallo di temperature che ci interessano (vedi ad esempio la discussione in Girardi et al., 2002 [32]). Descriviamo di seguito le caratteristiche di alcuni tra i più noti in letteratura:

1. **Kurucz (1992** [33]**)**: Tali trasformazioni sono puramente teoriche e, sebbene coprano una griglia estesa in composizioni chimiche e temperature, non riproducono bene i dati osservativi per quanto riguarda le temperature caratteristiche dei rami delle giganti rosse negli ammassi globulari. La principale causa di questo difetto è l'imprecisione con cui è stata trattata la convezione in queste strutture stellari. Tali modelli risultano ormai superati da quelli di Castelli et al. (1997 [34] [35]) e Castelli (1999 [36], vedi dopo) e li citiamo solo perché sono ancora usati da alcuni autori.

2. **Castelli, Gratton & Kurucz (1997) e Castelli (1999)**: Sono tabulati i colori e le correzioni bolometriche ottenute con il codice aggiornato di Kurucz (ATLAS9, versione del Giugno del 1995). Le tabelle raggiungono una temperatura effettiva minima pari a $3500\,K$ anche se ci sono dubbi sulla precisione dei risultati per temperature inferiori ai $\sim 5000\,K$ (vedi ad esempio Hauschildt, 1999 e Girardi, 2002).

3. **Lejeune, Cuisinier & Buser (1997** [38]**, 1998** [39]**)**: Queste tabulazioni, note anche con il nome di "BaSeL", si basano su spettri teorici di diversi autori: Kurucz (1995) per temperature alte e Fluks et al. (1994 [40]) e Bessell et al. (1989 [41], 1991 [42]) a temperature più basse. Tutti questi spettri sono stati "corretti" con lo scopo di riprodurre i valori empirici ovvero di eliminare le discrepanze con le relazioni empiriche. In pratica Lejeune et al. hanno calcolato, in funzione della temperatura effettiva e della lunghezza d'onda, le correzioni che devono essere applicate al modello teorico con abbondanza solare perché i colori Johson-Cousins siano in accordo con le calibrazioni della relazione T_e-colore ottenute empiricamente dalle osservazioni.

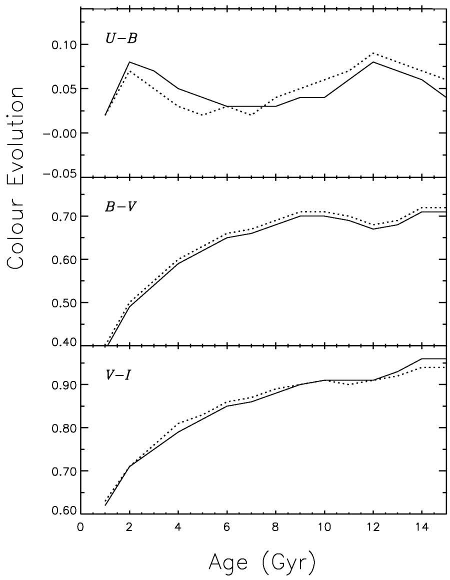

Figura 2.6: *Sono riportati i risultati ottenuti da Yi (2003) utilizzando due diverse relazioni T_e-colore: la linea continua indica l'utilizzo dei modelli di atmosfera di Lejeune et al. (1997, 1998) mentre la tratteggiata quelli di Kurucz (1992). I modelli sono relativi ad una metallicità pari a* $Z = 0.001$.

4. **Alonso et al. (1996** [43], **1999** [44]): Si tratta di relazioni T_e-colore ottenute semi-empiricamente per le stelle nane (1996) e per le giganti (1999). Le calibrazioni dei colori si basano su di un campione di stelle di campo e di ammassi globulari. Il range di temperature che interessa le stelle giganti è $3500\,K \leq T_e \leq 8000\,K$ mentre la metallicità $-3.0 \leq [Fe/H] \leq 0.5$. Per le stelle di piccola massa invece il range di temperatura è $4000\,K \leq T_e \leq 8000\,K$ e per la metallicità $-2.5 \leq [Fe/H] \leq 0.0$.

È ovvio che l'uso di diverse trasformazioni di colore influenza i risultati dei modelli sintetici. Come esempio, in figura 2.6, vengono confrontati i risultati ottenuti da Yi (2003) utilizzando le relazioni T_e-colore di Kurucz (1992) e quelle di Lejeune et al. (1997, 1998). In questo caso le differenze sono abbastanza piccole ma, come abbiamo visto in figura 2.5, potrebbero essere anche maggiori. Tuttavia occorre ricordare che (come discusso in dettaglio nel cap.4) il primo controllo per i modelli sintetici è che il diagramma colore-magnitudine sintetico riproduca quello osservato in ammassi globulari ed aperti di opportuna composizione chimica. Questo significa, ad esempio, che in dipendenza della trasformazione di colore adottata, l'efficienza della convezione esterna nei modelli teorici va calibrata in maniera da riprodurre il colore del ramo delle giganti rosse e delle stelle di sequenza principale; inoltre, dato un set di modelli teorici, possiamo usare solo le trasformazioni di colore che ci permettono di riprodurre il colore dell'RGB e della sequenza principale. Utilizzando tale metodo di lavoro le incertezze sui risultati derivanti dalle trasformazioni di colore e dall'efficienza della convezione utilizzata sono praticamente eliminate.

2.4 Le fluttuazioni statistiche

Prima di tentare un confronto tra i risultati teorici e le osservazioni è necessario affrontare il problema degli effetti statistici dovuti alla natura stocastica della IMF e al numero di stelle presenti nel cluster. La stocasticità della IMF diviene non trascurabile quando si ha a che fare con le fasi post-MS che sono poco popolate e presentano tempi evolutivi brevi rispetto a quelli della combustione centrale di idrogeno. Ammassi di stessa massa e stessa età possono quindi presentare diversi valori delle quantità integrate osservate. È necessario quindi conoscere l'effetto di tali fluttuazioni del numero di stelle in fase post-MS, come le giganti rosse e le stelle di ramo asintotico, che regolano l'andamento dei colori integrati nell'infrarosso. Inoltre è fondamentale stimare le fluttuazioni dovute alle stelle di grande massa in fase di sequenza principale, presenti in ammassi giovani, che influenzano i colori nel blu e nell'ultravioletto.

L'effetto delle fluttuazioni statistiche sui colori integrati varia sia con il numero di stelle utilizzate nel sintetico, e quindi con la magnitudine totale osservata dell'ammasso, sia con l'età dell'ammasso stesso. Il primo fenomeno è dovuto al fatto che minore è il numero di stelle e minore è il numero di giganti presenti sia in fase di sequenza principale che in fasi avanzate; tali stelle sono molto luminose ed evolvono velocemente, possono quindi portare a grandi fluttuazioni del colore totale. Inoltre, per simulare gli effetti stocastici, viene utilizzato il metodo Monte Carlo e la statistica utilizzata è la distribuzione di Poisson per cui l'errore andrà come $N^{1/2}$, dove N è il numero totale di stelle. La variazione delle fluttuazioni statistiche con l'età del modello, laddove il numero di stelle sia tenuto costante, è invece dovuta al fatto che diminuendo l'età diminuisce prima il numero di stelle in fase di AGB ed RGB e poi diviene sempre più probabile la presenza di giganti blu, stelle molto luminose e che evolvono molto velocemente causando, con la loro presenza stocastica, grandi fluttuazioni.

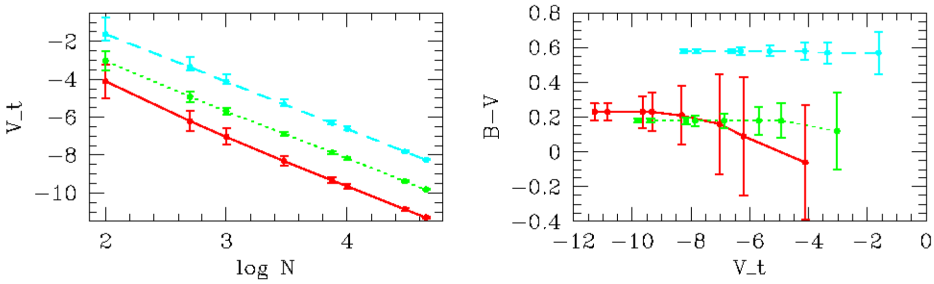

Figura 2.7: *A sinistra è riportato l'andamento della magnitudine totale come funzione del numero di stelle generate, nell'intervallo di massa* $0.6 \div 25\,M_{\odot}$*, per un modello con composizione chimica solare per tre diverse età:* $10\,Myr$ *(rosso),* $100\,Myr$ *(verde),* $1\,Gyr$ *(blu). Nel riquadro di destra è riportato l'andamento del* $(B-V)$ *integrato con la magnitudine totale* V*. Gli errori statistici sono la deviazione standard dei risultati ottenuti su* 100 *simulazioni Monte Carlo. Da Brocato et al. (1998).*

In figura 2.7 riportiamo i risultati ottenuti da Brocato et al. (1998). Nel riquadro in alto a sinistra è graficato l'andamento della magnitudine totale V con il logaritmo del numero di stelle N generate nell'intervallo di massa $0.6 \div 25\,M_{\odot}$ per le tre età indicate. Si nota come, al diminuire di N, l'errore statistico aumenta. Nel riquadro di destra è riportato l'andamento del $(B-V)$ con la magnitudine totale nel V a tre diverse età. Al diminuire di V, e quindi con l'aumentare del numero di stelle, diminuiscono gli errori statistici. Inoltre, a parità di magnitudine, si osserva l'aumento degli errori al diminuire dell'età, dovuta appunto alla presenza di stelle di sequanza principale superiore (giganti blu). Gli errori, nel caso $t = 10\,Myr$, risultano inferiori alle $0.1\,mag$ per $V \simeq -11$ e quindi per un numero di stelle pari a $\sim 10^5$. Per il modello ad $1\,Gyr$ invece si ha un errore di $0.1\,mag$ a circa $V = -4$ che corrisponde a $\sim 10^3$ stelle.

Ciò fornisce un'idea della dipendenza degli errori sia dall'età che dal numero di stelle che popola il sintetico. È ovvio che per ammassi con luminosità (e quindi numero di stelle) tali da essere molto sensibile agli errori statistici, anche la stima dell'errore dipende dal numero di prove effettuate per modello. In figura 2.8 sono riportati i colori integrati in funzione della magnitudine totale di 5000 diverse simulazioni di un modello con $Z = 0.006$, $t = 15\,Gyr$ e 10^5 stelle nell'intervallo di massa $0.1 \div 1.5\,M_{\odot}$ e stessi parametri iniziali. Le differenze tra le diverse simulazioni sono dovute al fatto che si utilizza un metodo Monte Carlo per simulare le fluttuazioni in massa dovute alla stocasticità della funzione di massa iniziale. Come è giusto aspettarsi, le fluttuazioni dei colori integrati aumentano man mano che ci si sposta verso il rosso; infatti a $t = 15\,Gyr$ le fluttuazioni sono dovute per lo più alle stelle in fase di AGB e di RGB che sono molto luminose, rosse e molto meno numerose delle stelle di sequenza principale.

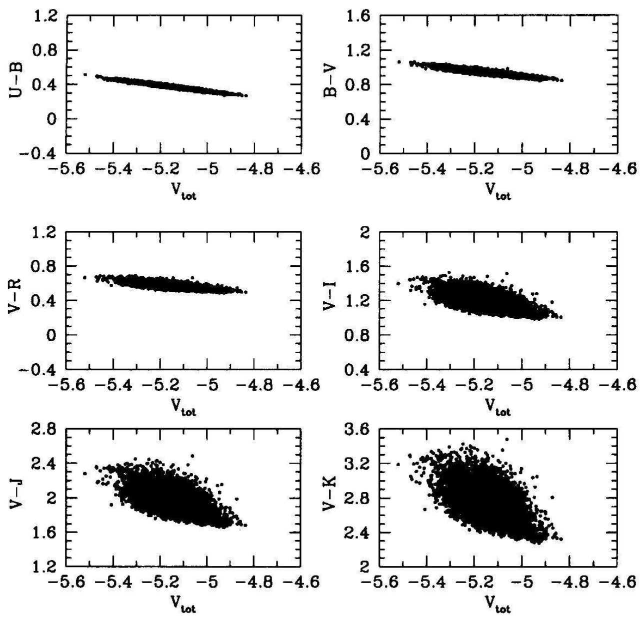

Figura 2.8: *Colori integrati in funzione della manitudine totale nel* V *di* 5000 *diverse simulazioni Monte Carlo del modello con* $Z = 0.006$*,* $t = 15\,Gyr$ *e* 10^5 *stelle nell'intervallo di massa* $0.1 \div 1.5\,M_{\odot}$*. Da Brocato et al. (1998).*

2.5 Lo scenario evolutivo

Nei primi tentativi di sintesi dei colori integrati venivano trascurate stelle in fasi evolutive particolari come il ramo orizzontale ed il ramo asintotico. In alcuni casi questa mancanza è stata compensata parzialmente per mezzo di correzioni semiempiriche o qualitative. In seguito, man mano che i modelli evolutivi di queste fasi divenivano più dettagliati, si è resa possibile l'introduzione, in maniera evolutivamente consistente, di tali fasi nei modelli sintetici. Per considerare, nel calcolo sia dei colori integrati che della luminosità integrata, le fasi evolutive successive all'RGB, è necessario non solo conoscere la morfologia delle sequenze nel diagramma HR ma, soprattutto, il numero di stelle che le popolano. Nei primi modelli sintetici (vedi ad esempio Buzzoni, 1989) si utilizzava, per il conteggio delle stelle nelle fasi successive alla sequenza principale (PMS da *Post MS*) un'approssimazione analitica (*Fuel Consupmtion Theorem*) per cui la luminosità dovuta alle stelle in fasi post-MS risulta semplicemente proporzionale alle risorse nucleari e gravitazionali disponibili alla stella al TO. Adesso, avendo a disposizione le tracce evolutive per queste fasi, è possibile trattare il problema in maniera più precisa.

2.5.1 Ramo Orizzontale (HB: *Horizontal Branch*)

Come abbiamo precedentemente visto, nelle popolazioni stellari antiche ($10 \div 15\,Gyr$) la massa tipica in evoluzione post-sequenza principale è dell'ordine di $0.8 \div 1.0\,M_\odot$. Tali masse, a causa della degenerazione elettronica che interessa le regioni centrali in fase di gigante rossa, riescono ad innescare l'elio centrale solo quando la massa del nucleo raggiunge le $0.45 \div 0.50\,M_\odot$, quasi indipendentemente dal valore della massa iniziale. Una volta innescato l'elio centrale e rimossa la degenerazione elettronica, la stella brucia quiescentemente He al centro ed H in una shell, a luminosità notevolmente più bassa rispetto a quella dell'innesco dell'elio (fase di HB, vedi §1.2). Le stelle di ramo orizzontale di un ammasso provengono tutte da un progenitore di stessa massa e quindi, al momento dell'innesco dell'elio, possiedono la stessa massa del nucleo di He; ciò che varia, a causa della natura stocastica della perdita di massa nelle regioni più esterne in fase di gigante rossa, è la massa dell'inviluppo (M_{env}). Le perdite di massa subite in RGB hanno conseguenze visibili solo nella fase successiva, il ramo orizzontale. La massa dell'inviluppo infatti determina il colore della stella: una grande perdita di massa, e quindi un sottile inviluppo, portano la stella a temperature efficaci maggiori e quindi verso il blu, al contrario una minore perdita di massa implica un colore più rosso in HB (vedi ad esempio Rood, 1973 [45]). La luminosità del ramo orizzontale è la somma del contributo della shell di idrogeno e del nucleo di elio. Per quanto abbiamo detto, maggiore è la temperatura efficace e più sottile è l'inviluppo, quindi la shell di idrogeno è più esterna e fredda e la luminosità è guidata per lo più dal nucleo (che brucia elio in carbonio e ossigeno); al contrario se la perdita di massa non ha ridotto troppo l'inviluppo la shell di idrogeno è efficiente e contribuisce sensibilmente alla luminosità totale.

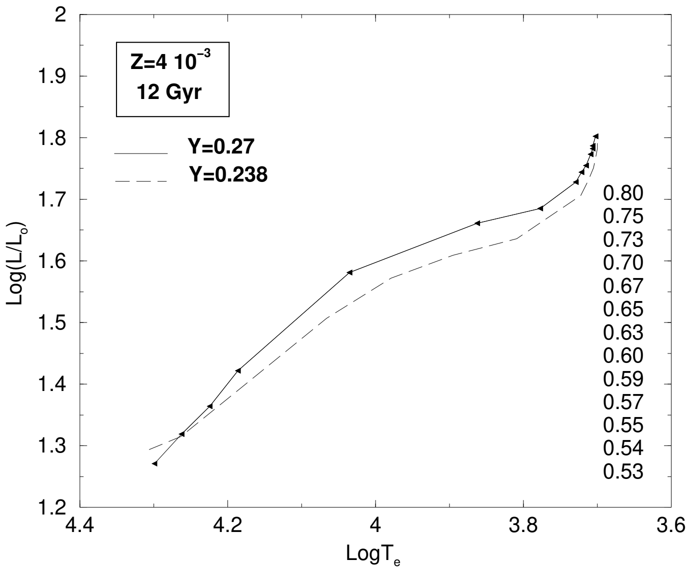

Figura 2.9: *Posizione nel diagramma HR di stelle in fase iniziale di combustione centrale di elio (Zero Age Horizontal Branch, ZAHB) per diversi valori della massa totale (riportati sulla destra in masse solari) e per due diversi valori dell'abbondanza di elio:* $Y = 0.238$, *che è il valore relativo a* $Z = 0.004$, *e* $Y = 0.27$, *relativo a* $Z = Z_{\odot}$, *ottenuti assumendo abbondanza primordiale di elio* $Y_0 = 0.23$ *e la relazione* $\Delta Y/\Delta Z \simeq 2$ *(vedi anche §4.2). Dati da "Pisa Evolutionary Library" [9].*

Vediamo brevemente quali sono gli effetti sulla luminosità del ramo orizzontale dell'aumento di Y e Z:

- L'aumento dell'efficienza della combustione di idrogeno in RGB, dovuto all'aumento di Y e Z, fa sì che la stella anticipi l'innesco dell'elio centrale, di conseguenza il nucleo di He, M_c, all'innesco presenterà dimensioni minori e si avrà quindi un minore contributo alla luminosità totale

- In fase di HB sia all'aumentare di Z che di Y aumenta l'efficienza della shell di idrogeno che quindi contribuisce in maggior misura alla luminosità totale della combustione dell'elio

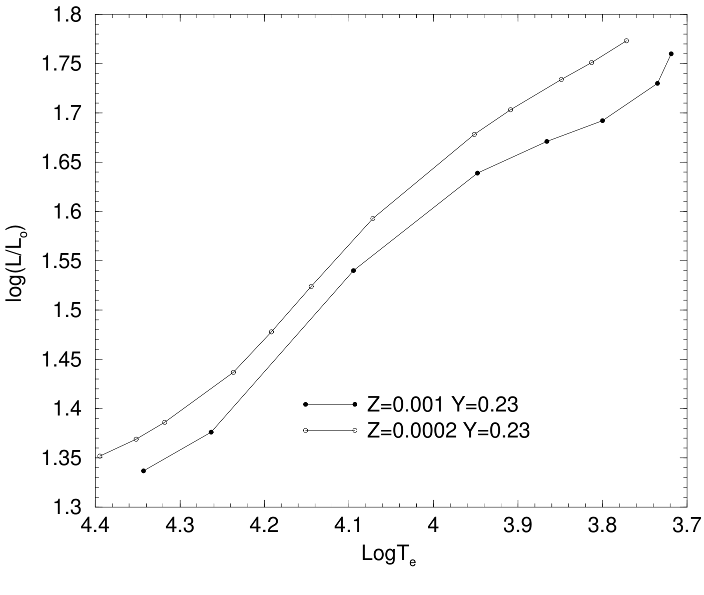

Figura 2.10: *Come in figura 2.9 ma per abbondanza dell'elio fissata a* $Y = 0.23$ *e due diversi valori della metallicità:* $Z = 0.001$ *e* $Z = 0.0002$*; il valore dell'elio è accettabile per entrambi i valor della metallicità (vedi §4.2). Dati da "Pisa Evolutionary Library" [9].*

La variazione della luminosità al variare della composizione chimica dipende quindi da quale sia la fonte principale di energia che sostiene la struttura, se la combustione di elio nel nucleo (ad alte temperature efficaci) o quella dell'idrogeno in shell (a temperature più fredde). Ma gli effetti di un aumento di Y sono, in misura, diversi da quelli di un aumento di Z. Così mentre all'aumentare dell'elio a basse temperature la shell ha efficienza tale da contrastare il diminuito contributo della combustione dell'elio (vedi fig. 2.9), un aumento di Z sembra influire soprattutto sulla massa del nucleo provocando un abbassamento totale della luminosità dell'HB (fig. 2.10).

Nonostante sia ormai accertato che la dispersione in colore delle stelle in fase di combustione centrale di elio sia dovuta principalmente alla perdita di massa in fase di gigante rossa, resta ancora da stabilire quali siano i parametri che determinano la morfologia del ramo orizzontale, ovvero il colore medio. Il primo parametro a regolare il colore dell'HB è la metallicità, dato che all'aumentare di Z aumenta l'opacità delle stelle che si portano verso temperature effettive minori. Ma questo non avviene in tutti i casi, è tipico l'esempio degli ammassi globulari M3 e M13 che si suppone abbiano la stessa composizione chimica ma mostrano una morfologia del ramo orizzontale completamente diversa. Per spiegare queste anomalie si suppone che esista, oltre alla metallicità, almeno un *secondo parametro* (vedi ad esempio Freeman & Norris, 1981 [46]) al variare del quale si riprodurrebbero gli HB osservati. Vari autori sostengono che l'età dell'ammasso possa essere questo secondo parametro che controlla la morfologia dell'HB (vedi ad esempio Salaris & Weiss, 2002 [47]) infatti, all'aumentare dell'età, diminuisce la massa iniziale in evoluzione, aumenta il tempo in RGB e quindi la perdita di massa spostando l'HB a temperature maggiori. Comunque, su questo punto, c'è discordanza tra le opinioni dei ricercatori ed il problema rimane quindi ancora aperto. Inoltre per alcuni ammassi globulari sembrerebbero essere necessari tre o più parametri per spiegare la morfologia peculiare dei loro HB (vedi ad esempio Recio-Blanco, 2002 [48]). Tra le ipotesi avanzate ricordiamo gli effetti non trascurabili che potrebbero essere causati dalla rotazione delle stelle (Castellani et al., 1980 [49]; Sills & Pinsonneault, 2000 [50]) e dalla variazione dell'abbondanza di elio e di C, N e O che influenzano principalmente l'efficienza della combustione in shell (Castellani & Tornambè, 1977 [51]; Kraft, 1994 [52]). Comunque, calibrando la perdita di massa in RGB nei modelli teorici, è possibile riprodurre con buona precisione la morfologia del ramo orizzontale indipendentemente da quali siano i parametri che l'hanno provocata. Nel calcolo dei colori integrati la procedura corretta è quindi quella di calibrare la perdita di massa in RGB su ammassi globulari ben osservati (vedi cap. 4).

Solitamente la morfologia del ramo orizzontale viene classificata come segue: "blu" (BHB), "red" o intermedia (IHB) e "red-clump" (RHB). Per caratterizzare numericamente la morfologia del ramo orizzontale vengono definite blu (B) le stelle a sinistra della regione occupata dalle RR Lyrae[4] mentre le altre vengono definite rosse (R) e viene introdotto il parametro $B/(B+R)$, ovvero il rapporto tra il numero di stelle del ramo orizzontale nel blu e il numero totale di stelle in HB.

Riportiamo la classificazione di Alcaino (1979 [53]) largamente utilizzata in letteratura:

- $B/(B+R) \leq 0.3 \rightarrow$ HB rosso, RHB
- $0.3 \leq B/(B+R) \leq 0.7 \rightarrow$ HB intermedio, IHB
- $B/(B+R) \geq 0.7 \rightarrow$ HB blu, BHB

Una quantità analoga è data da $(B-R)/(B+V+R)$, introdotta da Lee et al. (1988 [54]), dove B, V e R sono rispettivamente il numero di stelle blu, di RR Lyrae e di stelle rosse. Il $(B-R)/(B+V+R)$ risulta essere più sensibile del $B/(B+R)$ proprio perché include il numero di RR Lyrae (Zinn, 1985 [55]; Lee, 1990 [56]). Il parametro $(B-V)/(B+V+R)$ varia da -1, nel caso di ammassi solo con un HB rosso (per esempio 47 Tuc), a $+1$ per quelli che contengono solo stelle blu. Per ammassi che mostrano un numero simile di stelle blu e rosse il parametro risulta circa zero.

In Covino et al. (1994 [57]) è stata studiata l'influenza della morfologia del ramo orizzontale sui colori integrati per ammassi globulari. Per gli ammassi della Galassia la morfologia dei bracci orizzontali è disponibile in letteratura ma non in maniera omogenea quindi, quando possibile, gli autori si sono serviti del parametro $B/(B+R)$.

L'autore conclude che i colori integrati di ammassi globulari non siano molto influenzati dalla morfologia dell'HB, essendo le variazioni massime nel $(B-V)$ di circa $0.05\,mag$ e minori nell'$(U-B)$. Nello stesso lavoro sono poi stati confrontati i modelli sintetizzati con i dati osservativi per ammassi globulari della Galassia e di M31 in

[4] Le RR Lyrae sono stelle variabili con periodo da 0.2 a 1.2 giorni e con ampiezza $0.2 \div 2\,mag$; sono le stelle di ramo orizzontale che si trovano nella striscia di instabilità che attraversa il diagramma HR.

diagrammi a due colori per i vari sistemi fotometrici disponibili. Per quanto riguarda la Galassia gli autori hanno riscontrato un accordo generale tra le osservazioni e i modelli costruiti assumendo $15\,Gyr$, $s = 2.35$ per diverse morfologie dell'HB. In particolare per $Z \leq 0.04$ i modelli con BHB e IHB fittano bene i dati osservativi. Gli ammassi che presentano un andamento discordante da quello generale sono quelli vicini al disco galattico o nella zona centrale della Galassia.

Nei primi lavori di sintesi del ramo orizzontale si assumeva direttamente una delle tre morfologie tipiche (vedi ad esempio Worthey, 1994 [19] in cui l'HB veniva rappresentato come *red clump*) e si popolava la ZAHB ricavando il numero di stelle dalla relazione:

$$N_{HB} \propto \frac{t_{HB}}{t_{RGB}}\ N_{RGB} \tag{2.14}$$

ed utilizzando relazioni analitiche per ottenere t_{HB} in funzione della massa del progenitore, del nucleo di He e della composizione chimica (vedi ad esempio Sweigart, 1987 [58]). In questo modo quindi non veniva considerata l'estensione dell'HB in luminosità dovuta all'evoluzione delle strutture in fase di combustione centrale di elio. In seguito, avendo a disposizione le tracce evolutive delle stelle a partire dalla ZAHB fino al primo pulso termico, è stato possibile procedere diversamente popolando direttamente le tracce. Molti studi hanno adottato la gaussiana come funzione di distribuzione di massa per simulare la dispersione in colore del ramo orizzontale. Il valore della dispersione gaussiana per la massa che vari autori indicano come adatto a riprodurre la morfologia dell'HB osservato nella maggioranza degli ammassi globulari, è in generale attorno a $0.02\,M_{\odot}$ (vedi ad esempio Catelan, 2000 [59]), eccezion fatta per alcuni ammassi che presentano una distribuzione in colore multimodale come ad esempio M15. La relazione che lega il valore medio della T_e e la perdita di massa in fase di gigante rossa viene ricavata dai modelli evolutivi.

Per il calcolo della perdita di massa in RGB, viene comunemente assunta la formula di Reimers (1975, 1977 [60] [61]) ottenuta per mezzo dello studio delle proprietà spettrali delle giganti rosse:

$$\frac{dM}{dt} = -4 \times 10^{-13}\ \eta\ \frac{L}{gR} \qquad M_{\odot}(yr)^{-1} \qquad \text{con} \qquad \eta \sim 1 \tag{2.15}$$

dove η è un parametro libero.

2.5.2 Ramo Asintotico (AGB: *Asymptotic Giant Branch*)

La fase di combustione in doppia shell è identificata, nel diagramma HR, con il ramo asintotico (AGB) così denominato perché all'aumentare della luminosità tende ad avvicinarsi "asintoticamente" al ramo delle giganti rosse (RGB). Nelle fasi finali di AGB si ha il fenomeno dei pulsi termici (*Thermal Pulses, TP*). I pulsi termici sono conseguenza dell'inevitabile avvicinamento della shell di elio a quella di idrogeno, avvicinamento che provoca particolari eventi interni alla stella con conseguenti variazioni nella luminosità e nel raggio. A questo punto è necessario soffermarci a descrivere più in dettaglio questa fase anche perché una parte del mio lavoro è consistita (come descritto nel cap. 3) nell'introdurre, nel codice di sintesi di popolazione, la fase dei pulsi termici in maniera evolutivamente consistente.

Come abbiamo visto, potremmo riassumere l'evoluzione di una stella come l'alternarsi di combustioni centrali e in *shell*, ovvero negli strati circostanti il nucleo ormai composto dalla materia sintetizzata durante la precedente combustione centrale. Mentre durante la fase di gigante rossa è presente un'unica shell, in fase di AGB le shell sono due, una di idrogeno e una di elio, che bruciano a temperature diverse. Quando la shell di idrogeno è spenta e quella di elio accesa la seconda avanza accumulando dietro di sé carbonio e ossigeno e avvicinandosi alla shell di idrogeno. Quando sono vicine perché possano sussistere le due shell, una accesa e l'altra spenta, si renderebbe necessario un gradiente di temperatura molto alto e ciò non è permesso dalla struttura stessa. Di conseguenza la shell di elio, che portandosi verso l'esterno raggiunge zone relativamente più fredde, si spegne e la struttura contrae portando all'accensione della shell di idrogeno. La shell di idrogeno brucia quindi H in He accumulando la massa sopra la shell di elio che si riscalda fino ad accendersi nuovamente. L'innesco dell'elio avviene in una zona parzialmente degenere e quindi per mezzo di un $flash$ che, come durante l'uscita dalla fase di gigante rossa, libera un'enorme quantità di energia. In una prima fase l'energia liberata influenza solo la zona tra le due shell che inizia ad espandersi spingendo la shell di idrogeno verso l'esterno e facendola quindi raffreddare e infine spegnere. Privata della combustione di idrogeno la stella contrae e diviene meno luminosa fino a quando l'energia prodotta dalla shell di elio non arriva a far espandere di nuovo la superficie aumentandone anche la luminosità nonostante l'efficienza della combustione dell'elio stia diminuendo. La luminosità e il raggio raggiungono un massimo per poi diminuire a causa della diminuzione dell'efficienza della combustione dell'elio. Ciò però provoca anche la contrazione della zona di intershell e la riaccensione della shell di idrogeno che torna a predominare. Ora la diminuzione della luminosità è rallentata e raggiunge un minimo quando la produzione da parte della shell di idrogeno diviene comparabile con quella della shell di elio, quindi la luminosità riprende ad aumentare fino ad un valore abbastanza costante che manterrà fino a quando le due shell non torneranno ad essere sufficientemente vicine da ricreare le condizioni necessarie al pulso. È chiaro quindi che quello dei pulsi termici si presenta come processo iterativo (vedi fig. 3.9). Molti autori trovano conveniente dividere l'AGB in EAGB (*Early AGB*), ovvero la fase antecedente l'inizio dei pulsi, e TP-AGB (*Thermal Pulse AGB*). Durante i pulsi termici, quando la struttura è molto espansa, la stella è soggetta a perdite di massa che possono anche essere molto violente fino a farla uscire prematuramente dalla fase di AGB. Il fenomeno dei pulsi termici è inoltre causa di *dredge-up* (cioè un trasporto negli strati superficiali di prodotti di combustione interni) che avviene quando la shell di H si spegne e la convezione superficiale affonda sino a superare la discontinuità He-H intaccando così la zona contaminata dal precedente pulso (è noto infatti come una shell in combustione si comporti come un limite invalicabile per la convezione). L'effetto principale del dredge-up è, in fase di pulsi termici, di trasformare le stelle in "stelle C" ovvero particolarmente ricche di carbonio, ma questo non è di interesse ai fini di questa tesi. Un altro effetto legato ai TP e al dredge-up è quello dell'*Hot Bottom Burning* (HBB), la combustione di idrogeno che può svilupparsi alla base dell'inviluppo convettivo di H (rimandiamo ai lavori di Renzini & Voli, 1981 [62] e Sackmann & Boothroyd, 1991 [63], per una descrizione dettagliata del fenomeno). Questo processo brucia quindi il carbonio portato su dal dredge-up (impedendo quindi la formazione di stelle C) contribuendo alla luminosità totale.

Seguire l'evoluzione di una stella attraverso i pulsi termici è un processo per il quale è necessaria una grandissima precisione di calcolo e che richiede moltissimo tempo. Per questo motivo non sono disponibili in letteratura set di tracce evolutive che includono i pulsi termici e, generalmente, l'evoluzione viene interrotta al primo pulso. Questo fatto, ovviamente, crea un problema per i modelli sintetici visto che, data la loro notevole luminosità, le stelle in fase di pulsi termici devono essere necessariamente incluse nelle simulazioni.

Descriviamo ora brevemente come il problema della sintesi di TP-AGB è stato affrontato fino ad oggi. Il numero di TP che una stella subisce dipende dalla massa iniziale e varia da poche decine per stelle di $M \sim 1\,M_{\odot}$ a diverse migliaia per stelle di $M \sim 4 \div 5\,M_{\odot}$. Nei primi lavori sull'argomento, quando erano difficili anche i calcoli dell'evoluzione in EAGB fino al primo pulso termico, si utilizzava, per l'inserimento dell'evoluzione di AGB nel diagramma HR, la relazione $\log(L/L_{\odot})$, $\log T_e$ del ramo delle giganti rosse (vedi ad esempio Buzzoni 1989 [18]). Tale andamento sottostima la temperatura effettiva perché in realtà l'AGB si trova a temperature effettive maggiori dell'RGB ma la differenza in colore non è comunque eccessiva ($\sim 0.2\,mag$ in $B-V$) alla base e diminuisce successivamente. In Buzzoni (1989) per quanto riguarda la fase di EAGB è stata assunta una funzione di luminosità bolometrica piatta, cioè un numero costante di stelle per intervallo di luminosità, a partire dall'HB dato che ciò che conta per il tempo trascorso in questa fase è la quantità di combustibile disponibile. I pulsi termici possono essere considerati in termini dell'aumento del tempo trascorso in AGB mentre per la perdita di massa è stata utilizzata la stessa trattazione dell'RGB seguendo passo per passo l'evoluzione fino a quando la massa della stella raggiunge il valore limite per l'abbandono dell'AGB.

Naturalmente questo tipo di trattazione non è molto precisa. È quindi preferibile ricavare l'andamento temporale delle osservabili luminosità e temperatura partendo dalle conoscenze delle caratteristiche interne della stella. In primo luogo è la massa del nucleo di elio (M_c) a guidare l'evoluzione della struttura; sappiamo che per tali stelle la luminosità è una funzione lineare crescente di M_c ed è ormai comunemente accettato che anche il periodo di interpulso (T_{ip}) sia dipendente dalla massa del nucleo mentre la massa dell'inviluppo sembra essere del tutto ininfluente (in questo caso è il $\log T_{ip}$ ad avere una dipendenza lineare, ora decrescente, dalla M_c). Tali relazioni (Paczynski, 1975 [64]) possono essere soggette a diversi tipi di incertezze, per esempio per masse del nucleo molto grandi la zona convettiva esterna potrebbe raggiungere zone abbastanza interne da variare l'andamento sia della luminosità che del periodo di interpulso. Inoltre esiste sicuramente una dipendenza dalla composizione chimica ed è quindi necessario avere a disposizione le relazioni relative a diversi valori della metallicità. Successivamente al lavoro di Paczynski che ha fornito le relazioni $M_c{-}L$ e $\log T_{ip}{-}M_c$ per composizione chimica $Y = 0.27$ e $Z = 0.03$ altri autori hanno ricavato le stesse relazioni per diverse composizioni chimiche e diversi intervalli di massa iniziale (vedi ad esempio Boothroyd & Sackmann (1988a-d [65], [66], [67], [68]). Tra i lavori presenti in letteratura sulla costruzione di sintetici di AGB riportiamo brevemente quelli che ci sono sembrati più interessanti per i nostri scopi. Groenewegen & de Jong (1993 [69], GdJ) e Marigo, Bressan e Chiosi (1996 [70], MBC) hanno sviluppato modelli sintetici di AGB occupandosi soprattutto dell'evoluzione della composizione chimica superficiale dovuta alla presenza di dredge-up. In realtà quello che a noi interessa non è la variazione della composizione chimica superficiale quanto la tecnica con cui hanno costruito i loro modelli sintetici. Un aspetto interessante è che GdJ hanno tenuto conto, rispetto ai lavori precedenti, del fatto che i primi pulsi non raggiungono la massima ampiezza e del fatto che durante il $\sim 20\%$ del tempo seguente un pulso la luminosità è di $\sim 0.5\,mag$ più bassa del valore precedente il $flash$. Inoltre, per la prima volta, tengono conto del fenomeno dell'Hot Bottom Burning. Le assunzioni necessarie per costruire modelli di stelle in fase di pulsi termici sono:

- Le condizioni al primo pulso
- Le leggi analitiche ricavate da calcoli evolutivi per esprimere:
  - La relazione tra la massa del nucleo di He e la luminosità
  - La relazione tra la massa del nucleo di He e il periodo di interpulso
  - La velocità di evoluzione lungo il TP-AGB
  - (dredge-up)
- Una prescrizione semiempirica per valutare la velocità del fenomeno di perdita di massa per effetto del vento stellare
- Un algoritmo numerico per calcolare:

– La temperatura effettiva T_e

– Hot Bottom Burning

Date le condizioni iniziali al primo pulso, il calcolo è portato avanti fino a quando accade una della seguenti cose:

- A causa del vento stellare tutto l'inviluppo viene eiettato, la stella esce quindi dalla fase di AGB e si sposta verso la fase di nana bianca

- La massa del nucleo cresce sopra il valore di Chandrasekhar ($\sim 1.4 M_\odot$) e la stella sarebbe soggetta ad un'esplosione della struttura.

La costruzione del modello sintetico inizia quindi con la descrizione delle condizioni iniziali ovvero il valore della massa del nucleo e della luminosità della stella al primo pulso che sono fornite in funzione della composizione chimica e della massa iniziale (vedi ad esempio Lattanzio 1991 [71], Renzini & Voli 1981 [62], ecc...) oppure, nel caso di chi studia i colori integrati e quindi deve riprodurre l'intero diagramma HR, sono direttamente fornite dalle tracce evolutive.

Una volta note le condizioni iniziali è necessario conoscere la relazione che lega la luminosità (di interpulso, ovvero quella prodotta dalla shell di idrogeno) e il periodo di interpulso T_{ip} alla massa del nucleo M_c nella fase in cui i pulsi hanno raggiunto l'ampiezza massima.

Nei lavori più recenti di sintesi dell'AGB, per tenere conto del fatto che i primi 6 pulsi hanno una luminosità minore di quella data dalle relazioni $L - M_c$, solitamente la luminosità dei primi pulsi viene riscalata per mezzo di un fattore correttivo dipendente dal tempo speso dalla stella in AGB. Anche il periodo di interpulso è minore per i primi pulsi simulando il comportamento delle stelle di massa maggiore nella fase dei pulsi di massima ampiezza; per calcolare i primi tempi di interpulso è possibile quindi, per esempio, utilizzare le relazioni note aggiungendo alla massa del nucleo un opportuno fattore correttivo ΔM_c.

Poiché la fonte di energia durante la maggior parte del periodo di interpulso è la combustione dell'idrogeno, la velocità di evoluzione della stella in TPAGB è data con buona approssimazione dalla velocità con cui viene accumulato elio sul nucleo ovvero dalla velocità di crescita di quest'ultimo:

$$\frac{dM_c}{dt} = 9.555\ 10^{-12}\ \frac{L_H}{X} \qquad M_\odot\, yr^{-1} \tag{2.16}$$

dove L_H è la luminosità fornita dalla combustione dell'idrogeno e quindi la luminosità di interpulso, in unità solari e il fattore numerico include l'energia rilasciata dalla combustione di $1g$ di H ($6.4\ 10^{18}\ erg$). In realtà anche la combustione dell'elio e la gravità contribuiscono alla luminosità totale ed è possibile tenerne conto per mezzo di relazioni che dipendono sia dalla massa del nucleo di elio che da quella totale (vedi ad esempio Iben & Truran (1978 [72]). La correzione che se ne ricava è comunque piccola, soprattutto per stelle di piccola massa.

Per popolare il ramo asintotico è ovviamente necessario conoscere il tempo di permanenza della stella in AGB (t_{AGB}). È naturale aspettarsi che quest'ultimo sia regolato principalmente dalla perdita di massa. Per prima cosa per stelle di massa sufficientemente grande (intorno alle $7\,M_\odot$) la fase di AGB termina quando il nucleo raggiunge la massa di Chandrasekhar, quindi il tempo di permanenza in AGB è determinato, in questo caso, dal tempo impiegato dal nucleo a passare dal valore iniziale $M_c(1)$ a $\sim 1.4 M_\odot$. Una struttura di massa intermedio-grande può comunque perdere tanta massa da non raggiungere le $\sim 1.4 M_\odot$, anche se per le masse più grandi tale eventualità è poco probabile. Per stelle di massa piccolo-intermedia la perdita di massa provoca infine lo spegnimento delle shell di combustione e la stella lascia la fase di AGB divenendo una nana bianca.

Infine, per ottenere la posizione delle stelle nel diagramma HR, abbiamo bisogno di una relazione che leghi la luminosità alla temperatura effettiva; un errore sulla temperatura effettiva influenza, in linea di principio, la perdita di massa che dipende dal raggio della stella e quindi dalla sua T_e.

Nonostante che i lavori di Groenewegen & de Jong (1993) e Marigo, Bressan & Chiosi (1996) abbiano contribuito molto a portare avanti la conoscenza dell'evoluzione in AGB, restano ancora da chiarire molti punti: i dati utilizzati da GdJ sono parzialmente incompleti rendendo necessarie interpolazioni ed estrapolazioni ad-hoc poiché i risultati ottenuti in tre decadi sono stati combinati tra di loro e spesso sono stati semplificati, come nel caso dell'HBB (rimandiamo ai lavori stessi per maggiori informazioni). Gli effetti dell'HBB sono funzioni non lineari della M_{tot} e del parametro della *mixing−length* α. Nel nostro lavoro, come verrà dettagliatamente descritto nel cap.3, sono stati utilizzati i risultati di Wagenhuber & Groenewegen (1998 [73]) che hanno cercato di ridurre tali problemi.

Perdite di massa

La perdita di massa in AGB ha come principale conseguenza l'uscita della stella dal ramo asintotico e l'inizio della sua fase di raffreddamento. La formula di Reimers (2.15), utilizzata per le perdite di massa in RGB, non è in grado di riprodurre le perdite di massa osservate in AGB e necessarie per la creazione di una nebulosa planetaria, una nube di gas al centro della quale si trova la nana bianca. È ormai comunemente accettato che le nebulose planetarie siano il risultato di una fase di *superwind* in cui la stella eietterebbe in poco tempo l'inviluppo rimasto (Renzini & Voli, 1981 [62]). In letteratura sono presenti molteplici lavori che propongono diverse leggi, molte delle quali sono per lo più delle modificazioni della legge di Reimers. Altre leggi si basano sull'osservazione di stelle pulsanti in AGB (vedi ad esempio Vassiliadis & Wood, 1993 [74]; Schild, 1989 [75]) e Whitelock et al. (1990 [76]) ed utilizzano una relazione tra la perdita di massa ed il periodo di pulsazione nel modo fondamentale. I grafici empirici dell'efficienza della perdita di massa in funzione del periodo di pulsazione mostrano due fasi distinte di perdita di massa, una più moderata e il *superwind* che inizia a $P \sim 500\ d$. Il problema principale per questo tipo di approccio è la mancanza di dati per stelle con periodo inferiore ai $350\,giorni$.

In generale comunque sembra essere confermato un andamento del tipo $\dot{M} \propto L^\gamma$ (nel caso della legge di Reimers $\gamma = 1$). Sul valore dell'esponente γ c'è ancora, purtroppo, un'incertezza piuttosto grande. Un confronto tra le diverse leggi di perdita di massa proposte in letteratura è stato fatto da Groenewegen & de Jong (1993c [77]) con la conclusione che i modelli con una dipendenza della perdita di massa dalla luminosità data da una legge di potenza con esponente $1 < \gamma \lesssim 4$ soddisfano le condizioni osservative imposte.

Più recentemente Girardi et al. (1998 [78]) ha confrontato i colori integrati di modelli realizzati con diverse leggi di perdita di massa in AGB. L'autore conclude che la scelta della perdita di massa in AGB può influenzare sensibilmente i colori integrati, soprattutto il $(V-K)$ e in particolar modo per età inferiori ad $1\,Gyr$.

Uscita dalla fase di AGB

Resta da stabilire quando la stella lasci la fase di AGB. Sono possibili due approcci diversi, il primo stabilisce come condizione per il termine della fase di AGB l'espulsione istantanea di quella che si suppone essere una nebulosa planetaria ($\sim 10\,\%$ della massa iniziale, vedi de Jong, 1990 [79]). Il secondo approccio invece determina la fine dell'AGB quando la massa dell'inviluppo scende sotto un valore critico cioè quando la stella inizia a muoversi verso T_e maggiori. Quest'ultimo metodo è stato adottato da Groenewegen & de Jong (1993 [69]) con l'assunzione che il valore della massa critica dell'inviluppo M_{end} sia data da:

$$M_{end} = 0.1\,\frac{dM_c}{dt}\,T_{ip} \tag{2.17}$$

Al decrescere della metallicità T_{ip} aumenta e quindi anche M_{end} aumenta.

2.5.3 PAGB: *Post Asymptotic Giant Branch*

Abbiamo già visto come, alla fine dell'AGB, la stella si trasforma in nana bianca oppure va in contro alla deflagrazione del carbonio esplodendo come supernova. Le stelle che lasciano l'AGB spostandosi a T_e maggiori per poi divenire nane bianche non vengono solitamente prese in considerazione perché comunque il tempo scala della fase di passaggio dall'AGB alle curve di raffreddamento di nana bianca (*Post AGB*, PAGB) è molto piccolo: $10^4 \div 10^5\,yr$ a seconda della massa (vedi ad esempio Blöcker & Schönberner, 1997 [80]) e quindi anche in ammassi globulari molto popolati la presenza di stelle in questa fase è un evento raro e stocastico. È possibile quantificare il valore teorico del numero di stelle in fase di PAGB utilizzando quello di stelle in HB:

$$N_{PAGB} = \frac{t_{PAGB}}{t_{HB}}\;N_{HB} \tag{2.18}$$

In Brocato et al. (2000 [21]) viene riportato, in accordo con esperimenti numerici, il numero previsto di stelle in PAGB come funzione della magnitudine assoluta integrata dell'ammasso M_V^{tot} insieme al corrispondente numero di stelle in fase di combustione dell'elio. I risultati confermano la trascurabilità delle stelle in PAGB. Yi (2003 [22]), nel suo lavoro sulle fonti di incertezza per i colori integrati, sostiene che le stelle in PAGB sono trascurabili, eccetto per la banda UV per popolazioni molto giovani dato che per età maggiori sono le stelle in HB ad essere dominanti nell'UV.

2.5.4 La sequenza di raffreddamento: le Nane Bianche

Come abbiamo già descritto precedentemente, alla fine della fase di AGB la stella eietta l'inviluppo esterno nella fase di *superwind* e, al centro della nube di materia espulsa (nebulosa planetaria, PN), inizia la fase di raffreddamento ovvero di nana bianca (WD). La nana bianca è quindi composta dal nucleo di C+O degenere, che la stella ha accresciuto durante la fase di AGB, da un sottile strato di elio ($M_{He} \sim 10^{-2}\, M_{WD}$) e da un ancora più sottile strato di idrogeno ($M_H \sim 10^{-4}\, M_{WD}$). In realtà è possibile che si formino nane bianche di ossigeno e neon. Tali nane sono il residuo di stelle di massa maggiore a M_{up}, che quindi innescano il carbonio, ma che perdono sufficientemente massa da scendere sotto le $1.4\, M_\odot$ ed andare quindi in nana. Il numero di queste strutture è comunque trascurabile.

Sotto le condizioni di degenerazione elettronica del nucleo di C+O ($\sim 99\,\%$ della massa totale) le equazioni che regolano la struttura sono tali che stabilita la massa anche il raggio R e la densità centrale ρ_c restano fissati. Inoltre, al contrario di quanto accadeva per le strutture non degeneri, ora al crescere della massa il raggio della struttura diminuisce, infatti la ρ_c necessaria per sostenere la struttura cresce con la massa dato che la pressione ora dipende solo dalla densità e non dalla temperatura. Le stelle quindi si raffreddano seguendo una sequenza a raggio costante che nel diagramma HR $\log(L/L_\odot), \log T_e$ sono rappresentate da linee quasi parallele (vedi fig. 2.11). Inizialmente la struttura dissipa l'energia di agitazione termica degli ioni, poi il calore di liquefazione e infine quello di cristallizzazione sino a divenire, asintoticamente, un corpo freddo in equilibrio con il fondo cosmico dell'universo.

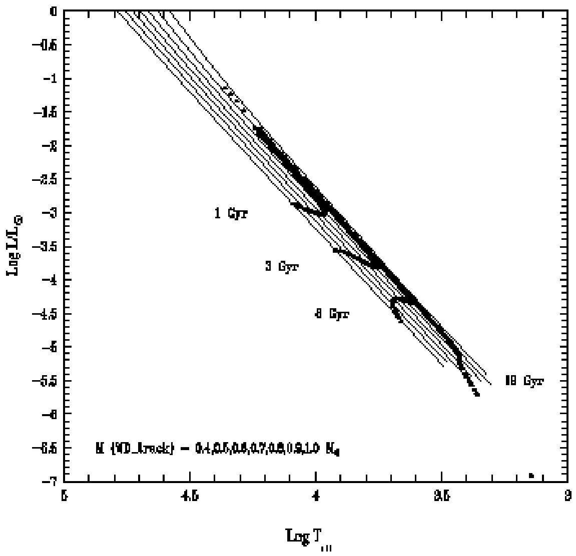

Figura 2.11: *Isocrone di nana bianca a diverse età (riportate in Gyr); Da Brocato et al. (1998 [81]).*

La prima fase di raffreddamento è più lenta per le masse maggiori e diviene più veloce al diminuire della massa. Successivamente, con la cristallizzazione, l'andamento è invertito e le stelle di massa maggiore riprendono ad "accelerare" lungo la sequenza di raffreddamento. A causa di queste variazioni nella velocità le isocrone presentano un andamento ad "uncino" (vedi figura 2.11) che al crescere dell'età inizia a dispiegarsi dato che le stelle di massa maggiore raggiungono la fase di cristallizzazione e quindi raffreddano più velocemente.

Per costruire un'isocrona delle stelle in fase di WD è necessario sapere quando le stelle entrano in tale fase e la velocità di evoluzione lungo questa. Naturalmente il momento di ingresso della stella sulla sequenza di raffreddamento coincide con la fine dell'evoluzione in AGB (dato che la fase di PAGB è molto veloce) e quindi per sapere quando la stella diviene una nana bianca è necessario conoscere il tempo impiegato per evolvere fino alla cima dell'AGB. Dato che però la fase di AGB è caratterizzata dalle perdite di massa e soprattutto dal *superwind* non è banale riuscire a identificare una massa di nana bianca con una traccia evolutiva precedente, ovvero trovare una relazione che leghi la massa finale (cioè di nana) con quella iniziale (cioè in sequenza principale). Ancora oggi il problema di ricavere la massa in fase di WD da quella iniziale è oggetto di studi anche a causa della presenza di molte incertezze, inoltre non è chiaro se una tale relazione esista con validità universale (la perdita di massa è comunque un fenomeno stocastico). Chiaramente, a parità di altri fattori, strutture di massa maggiore arrivano sino alle ultime fasi di AGB aumentando le dimensioni del core di C+O e quindi della futura nana. Una forte perdita di massa porterebbe comunque ad una precoce fuoriuscita dall'AGB e quindi ad una nana di massa minore. Inoltre aspetti come la rotazione, l'efficienza della convezione interna e la possibile presenza di *overshooting* causano un'ulteriore indeterminazione sulla massa finale. Le attuali osservazioni sembrerebbero indicare l'esistenza di una relazione univoca (Weidemann, 2000 [82]). Un metodo semi-empirico utilizzato per determinare la massa del progenitore è quello usato da Weidemann & Koester nel 1983 [83] che però è fortemente dipendente dal modello teorico adottato e, più in generale, dalle incertezze sull'estensione del nucleo convettivo in fase di pre-nana bianca e sui tempi di raffreddamento che si ripercuotono in maniera significativa sulle previsioni per la massa del progenitore. A basse metallicità gli unici risultati disponibili sono quelli di Dominguez et al. (1999 [84]) che sono puramente teorici e analizzano il rapporto massa finale-massa iniziale con un dettagliato studio della fase dei pulsi termici, fase in cui il nucleo di C+O cresce sensibilmente.

Capitolo 3

Il codice di sintesi di popolazione stellare

In questo lavoro abbiamo aggiornato ed implementato il codice per la sintesi di popolazioni stellari di Brocato et al. (1986 [85]). Il codice è in grado di calcolare il diagramma colore-magnitudine teorico in vari sistemi fotometrici e le proprietà integrate corrispondenti come i colori e i rapporti luminosità su massa. Come già ampiamente discusso questo lavoro prende in considerazione solo le popolazioni semplici, SSP, di cui calcoleremo colori integrati, luminosità, magnitudini totali e i rapporti M/L nelle varie bande ed inoltre il rapporto tra il numero di stelle in HB e il numero di stelle in RGB. Ogni modello di SSP è basato su di un set di parametri iniziali che lo caratterizzano:

- Età t della popolazione
- Distribuzione iniziale della massa (IMF)
- Composizione chimica (X, Y, Z)
- Numero totale di stelle N_{tot}

Per generare la massa di ogni singola stella della popolazione la cui IMF sia stata fissata, vengono utilizzate simulazioni *Monte Carlo* con cui si generano le masse casualmente secondo la distribuzione dettata dalla IMF scelta. La massa minore, che corrisponde al limite inferiore per l'innesco dell'idrogeno al centro, è $M_l \sim 0.1$ mentre per la massa maggiore, M_u, abbiamo assunto il valore di $11\,M_\odot$ che corrisponde ad una minima età dell'ammasso di circa $20\,Myr$. A questo punto, per procedere alla sintesi della popolazione semplice, è necessario disporre di un *database* di tracce evolutive e di uno di atmosfere stellari. Infatti, una volta "generate" le masse delle stelle che costituiscono la popolazione semplice (che ricordiamo essere composta da stelle che possono essere considerate di stessa età e stessa composizione chimica iniziale) vengono calcolate la luminosità e la temperatura efficace di ogni stella interpolando in massa ed in età sulle tracce evolutive, disponibili per valori discreti della massa e composte da un numero finito di punti (età). A questo punto si può costruire il diagramma HR teorico. Per passare alla sua controparte osservativa, il diagramma colore-magnitudine CM, si utilizzano modelli di atmosfera che permettono di trasformare la luminosità in magnitudine in una data banda fotometrica e la temperatura efficace in indice di colore. Infine non resta altro da fare che "sommare" il contributo di ogni stella in un determinato indice di colore o banda fotometrica. Notiamo che ciò che si ottiene non è comunque corretto dagli effetti di assorbimento da parte di polveri e gas interstellare e non si considerano né le emissioni da parte del gas interstellare né le emissioni non termiche. In definitiva quindi il flusso totale (cioè integrato) emesso in una banda X è la somma, dei flussi $\Phi_X[L(M,t,Y,Z),T_e(M,t,Y,Z),Y,Z]$ di ogni singola stella costituente la popolazione. Come abbiamo visto nel cap.2, ci sono fasi dell'evoluzione che necessitano di una trattazione particolare: la fase di combustione centrale di elio (ramo orizzontale) e quella di combustione in doppia shell (AGB e pulsi termici). Le principali modifiche da noi apportate al codice riguardano il trattamento dell'evoluzione dopo il primo pulso termico (vedi §3.3), l'introduzione nel codice delle tracce di nana bianca, l'aggiornamento delle tracce evolutive utilizzate in fase di combustione nucleare e quello delle trasformazioni di colore utilizzate (vedi §3.1). Descriviamo adesso più in dettaglio la procedura da noi utilizzata per produrre le popolazioni stellari semplici sintetiche.

Tabella 3.1: *Confronto tra le principali caratteristiche dei set di modelli evolutivi più recenti presenti in letteratura, dati da Cariulo et al. (2004 [92]).*

Modelli	Presente	Yi et al. 2001	Girardi et al. 2000	Ginevra
Range di massa [$M_\odot$]	0.6-11	0.4-5	0.15-7	0.8-120
Metallicità (Z)	$2 \cdot 10^{-4} \div 8 \cdot 10^{-3}$	$10^{-5} \div 8 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-4} \div 3 \cdot 10^{-2}$	$10^{-3} \div 10^{-1}$
Fasi evolutive	H+He	H	H+He	H+He
α	1.9-2.3	1.74	1.68	1.6
Diffusione	Thoul et al. 1994	Thoul et al. 1994	NO	NO
Overshooting	NO	0.2 Hp	0.25 Hp	0.20Hp
EOS	OPAL96+Str.1998	OPAL96+Yale	Padova+MHD	Genova
Opacità	OPAL96+Alex.1994	OPAL96+Alex.1994	OPAL92+Alex.1994	OPAL92+Kur.1991
Reazioni nucl.	NACRE	Bahcall&P.1992	Caug.&Fow.1988	Caug.&Fow.1988
Conduzione el.	Itoh et al.1983	Hubb.Lampe1969	Hubb.Lampe 1969	Hubb.Lampe 1969
Neutrini	Itoh et al.1996	Itoh et al.1989	Munakata et al.1985	Itoh et al.1989
Modelli atmosfera	Castelli et al.1999	Lejeune et al.1999	Castelli et al.1999	Lejeune et al.1999

3.1 *Tracce evolutive e trasformazioni di colore*

La versione originale del programma di Brocato et al. utilizzava un database di tracce evolutive basate su input fisici non aggiornati (Straniero & Chieffi, 1991 [86]; Castellani et al., 1991 [87]; Castellani et al., 1992a [88]; Cassisi et al., 1994 [89]) come ad esempio le tabelle di opacità di Los Alamos (Huebner et al., 1971 [90]). Per passare dalla temperatura effettiva all'indice di colore venivano utilizzate le trasformazioni di Lejeune et al. (1997 [38], 1998 [39]) che, come abbiamo visto (§2.3) sono la correzione empirica delle relazioni di diversi autori e la cui affidabilità non è quindi sicura. Adesso si sono resi disponibili modelli evolutivi basati su di una fisica più recente e trasformazioni di colore che coprono un ampio intervallo di composizioni chimiche. Di conseguenza il programma è stato aggiornato al fine di utilizzarle. Per le fasi evolutive che vanno dalla sequenza principale fino all'estremità dell'RGB e poi dal ramo orizzontale fino all'inizio dei pulsi termici, sono state utilizzate le tracce evolutive del database di Pisa ("Pisa Evolutionary Library" [9], vedi anche Castellani et al., 2003 [91] e Cariulo et al., 2003 [92]). Queste tracce sono state calcolate per mezzo di una versione aggiornata del codice evolutivo FRANEC (vedi Ciacio et al., 1997 [93] e Cassisi et al. 1998 [94]).

La tabella 3.1 riassume i principali input fisici utilizzati nel calcolo dei più recenti modelli (tracce e isocrone) presenti in letteratura (Yi et al., 2001 [95]; Girardi et al., 2000 [96], Salasnich et al., 2000 [97], Mowlavi et al., 1998 [98]) che ricoprono un ampio intervallo di composizioni chimiche, masse (per le tracce) ed età (per le isocrone). I modelli riportati in tabella, pur rappresentando gli unici recenti set estesi in età e composizione chimica di modelli evolutivi, non esauriscono ovviamente l'ampio scenario di modelli teorici presente in letteratura, notiamo ad esempio che tali set non comprendono i modelli di VLM che sono generalmente pubblicati su lavori specifici. La tabella 3.1 riporta nelle prime tre righe il range di masse, metallicità e fasi evolutive relative ai set di modelli; nelle successive tre righe sono invece riportate informazioni sulla fisica macroscopica utilizzata (è indicato il valore del parametro della $mixing-lenght$ α e se sono presenti o meno i fenomeni di diffusione e $overshooting$). Le successive cinque righe riportano informazioni sugli input fisici: equazione di stato (*Equation of State, EOS*), opacità, sezione d'urto delle reazioni nucleari, conduzione elettronica in presenza di materia degenere e produzione di termo-neutrini. Infine è riportato il modello di atmosfera utilizzato.

Per quanto riguarda le nane bianche abbiamo utilizzato le sequenze di raffreddamento di Salaris et al. (2000 [99]) che attualmente sono gli unici modelli con input fisici aggiornati che raggiungono età dell'ordine di quella dell'Universo per un ampio range di masse. Per popolare le sequenze di raffreddamento abbiamo ricavato le masse delle nane bianche per mezzo della relazione massa del progenitore-massa di nana di Dominguez (1999 [84]). Le masse dei progenitori sono state generate secondo la IMF assunta nell'intervallo dato dalla massa di maggior luminosità in RGB o al valore maggiore della massa presente nel sintetico a seconda che si sia sviluppato o meno il ramo orizzontale. Il limite superiore delle masse dei progenitori è stato fissata a $7\,M_{\odot}$, infatti, come abbiamo visto nel §1.2, sopra questo valore le strutture vanno generalmente incontro a destini diversi da quello di nana.

Come già discusso le stelle di piccola massa ($M \lesssim 0.6\,M_{\odot}$) si trovano ancora in sequenza principale anche per età uguali a quella stimata dell'Universo, non è quindi necessario calcolare le tracce evolutive ma solo la loro posizione "iniziale" sulla sequenza principale. In questo lavoro sono stati utilizzati i modelli di Baraffe et al.

(1997 [100]) che si basano su input fisici recenti e che tengono conto delle proprietà meccaniche e termiche di queste strutture particolari.

Per riportare il diagramma HR ($\log L/L_\odot$, $\log T_e$) al diagramma colore-magnitudine è stata intrododotta una subroutine con lo scopo di "colorare" i modelli sopra descritti. I sistemi fotometrici che abbiamo utilizzato sono il *Johnson-Cousins-Glass System* e, per quanto riguarda i colori *HST* (*Hubble Space Telescope*), il *WFPC2* (*Wide Field Camera 2* e il *NICMOS* (*Near Infrared Camera and Multi-Object Spectrometer*). Per il sistema fotometrico Johnson-Cousins le trasformazioni di colore utilizzate nel range di masse superiori alle $0.6\,M_\odot$ sono quelle di Castelli (1999 [36]; vedi anche Castelli et al. 1997 [34]) che attualmente sono tra le più aggiornate presenti in letteratura (vedi anche Girardi et al., 2002 [32]) e che ricoprono una vasta griglia di metallicità e temperature. Come discusso da vari autori (vedi ad esempio Baraffe et al., 1997 [100] e Hauschildt et al., 1999 [37]), le relazioni di Castelli (1997) non possono essere utilizzate per le stelle di massa inferiore alle $0.6\,M_\odot$ dato che, a causa della temperatura molto bassa che le caratterizza, presentano atmosfere ricche di molecole e grani in misura non trascurabile per il calcolo dell'equazione di stato e dell'opacità (per maggiori dettagli vedi Dorman et al., 1989 [101]), fenomeno non tenuto in considerazione nei calcoli di Castelli et al. (1997) ed in quelli di altri autori come ad esempio Lejeune et al. (1997, 1998). I modelli di piccola massa da Baraffe et al. (1997 [100]) sono invece stati "colorati" dagli autori stessi utilizzando le trasformazioni di Allard & Hauschildt (1997 [102]) che sono adatte per le strutture di piccola massa proprio perché trattano le righe di assorbimento molecolari utilizzando la fisica più recente. Infine per le nane sono state utilizzate le relazioni di Saumon & Jacobson (1999 [103]) per $T < 4000\,K$, che adottano una trattazione dettagliata dell'assorbimento indotto dalla collisione della molecola H_2 mentre, per temperature maggiori, sono state utilizzate le relazioni di Bergeron et al. (1995 [104]).

Nel calcolo dei colori integrati HST sono state utilizzate le trasformazioni di colore di Origlia & Leitherer (2000 [105]) ed, in particolare, la versione che utilizza i modelli di atmosfera di Bessell et al. (1998 [106]) basati sui modelli senza *overshooting* di Castelli et al. (1997). Nel calcolo dei colori integrati HST non abbiamo incluso le masse piccolissime dato che, come abbiamo già discusso e come vedremo più in dettaglio nel §4.1, l'inclusione delle strutture con $M \lesssim 0.6\,M_{\odot}$ è importante solo per il rapporto luminosità su massa mentre è trascurabile per i colori integrati; quindi, data la difficoltà di trovare colori HST affidabili per masse così piccole, abbiamo preferito escluderle dal calcolo. Dato che le stelle molto piccole oltre ad influire in maniera trascurabile sulla luminosità totale emettono principalmente nell'infrarosso, non sono generalmente disponibili in letteratura le magnitudini nel B e nel U; nei nostri calcoli quindi non verranno considerate per il calcolo del $B-V$ e dell'$U-B$. In figura 3.1 sono riportati i diagrammi colore-magnitudine di un modello sintetico di età $t = 11\,Gyr$ e $Z = 0.0002$ ottenuto con le nostre tracce come precedentemente descritto. Si nota come le piccole masse di Baraffe et al. (1998), trasformate nel piano osservativo con i colori di Allard & Hauschildt (1997), siano un buon prolungamento, in tutte le bande disponibili, della sequenza principale ($M \gtrsim 0.6\,M_{\odot}$) ottenuta per mezzo delle tracce di Pisa e delle trasformazioni temperatura-colore di Castelli et al. (1997). Infatti, come notato anche da Hauschildt, le sue trasformazioni di colore e quelle di Castelli et al. (1997) coincidono per temperature superiori a circa $5000\,K$. Si noti inoltre che nelle tracce evolutive il parametro α ($mixing-length$, vedi §2.2) che regola l'efficienza della convezione superadiabatica è stato calibrato in modo da riprodurre, con le trasformazioni di colore utilizzate, il colore del ramo delle giganti rosse di ammassi ben osservati (M68, M3 ecc...) a metallicità diverse (vedi Cariulo et al., 2004 [92]). Più precisamente gli autori ricavano che un valore di $\alpha = 1.9 \div 2.0$ permette di riprodurre soddisfacentemente i diagrammi colore-magnitudine di ammassi con metallicità tra $Z = 0.0001$ e $Z = 0.008$ (vedi anche Castellani et al., 2003). Per dare un'idea degli effetti sul diagramma colore magnitudine dell'incertezza sull'influenza della convezione esterna, in figura 3.2 è riportato il diagramma $\log L/L_{\odot}$, $\log T_e$ ottenuto con $\alpha = 1.6$ (rosso) e con $\alpha = 2.0$ (nero), due valori entrambi plausibili, per un modello con $Z = 0.001$, $Y = 0.23$ e $t = 15\,Gyr$; come noto al decrescere della $mixing-length$, e quindi dell'efficienza della convezione esterna, sia il ramo delle giganti rosse che il ramo orizzontale si trovano a temperature più fredde. Nelle figure 3.3 - 3.6 sono riportati i diagrammi $\log(L/L_{\odot})$, $\log T_e$ e i relativi diagrammi colore-magnitudine in varie bande fotometriche per età $t = 500\,Myr$, $1\,Gyr$, $5\,Gyr$ e $11\,Gyr$. Nei diagrammi in figura 3.1 - 3.6 non sono stati simulati gli errori osservativi che è possibile aggiungere,

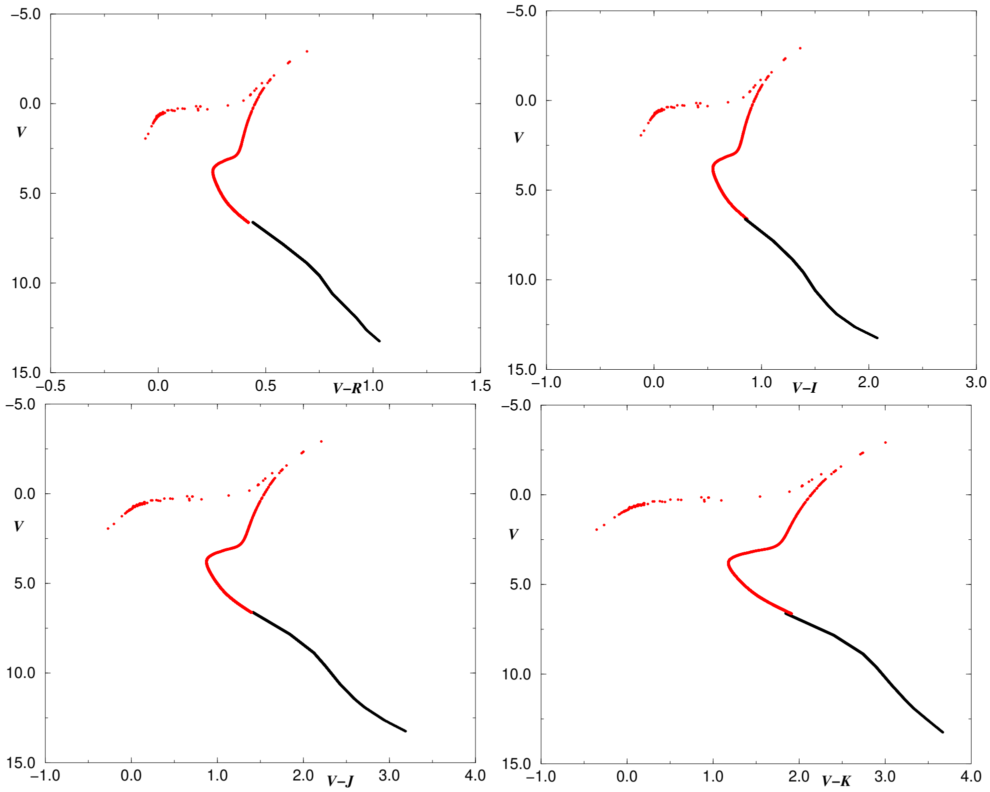

Figura 3.1: *Diagrammi colore-magnitudine, in diversi colori, del modello con età* $t = 11\,Gyr$ *e composiziona chimica* $Z = 0.0002$, $Y = 0.23$. *In nero sono riportate le piccole masse, ottenute interpolando i modelli di Baraffe (1997 [100]), in rosso le* $M \gtrsim 0.6\,M_{\odot}$ *ottenute con le tracce del database di Pisa e trasformate per mezzo delle relazioni di Castelli et al. (1999, vedi testo).*

come mostrato in figura 3.7 dove è riportato il diagramma colore-magnitudine di un modello sintetico di un ammasso con $Z = 0.001$, $Y = 0.23$ ed età $t = 15\,Gyr$ e dove è simulata la dispersione sul piano osservativo dovuta alle incertezze fotometriche (sono riportate anche le stelle di massa piccolissima e le nane bianche).

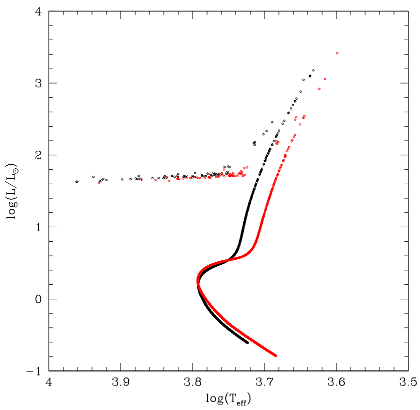

Figura 3.2: *Diagramma sintetico* $\log L/L_\odot$, $\log T_e$, *per un modello di composizione chimica* $Z = 0.001$, $Y = 0.23$ *ed età* $t = 15\,Gyr$, *ottenuto con due diversi valori del parametro della* $mixing-length$: $\alpha = 1.6$ *(rosso) e con* $\alpha = 2.0$ *(nero) per un modello di composizione chimica* $Z = 0.001$, $Y = 0.23$ *ed età* $t = 15\,Gyr$.

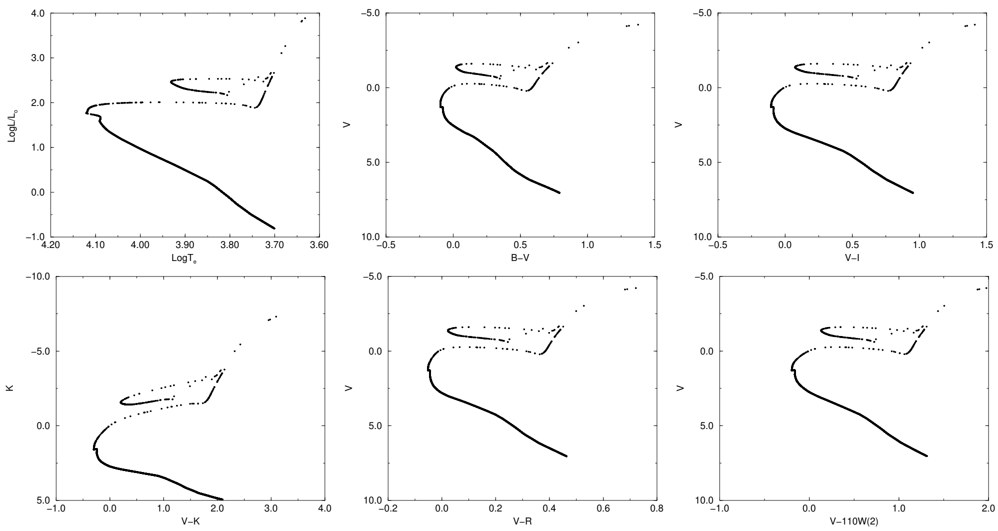

Figura 3.3: *Diagramma* $\log(L/L_\odot)$, $\log T_e$ *del modello sintetico di composizione chimica* $Z = 0.0002$, $Y = 0.23$ *ed età* $t = 500\,Myr$ *confrontato con i diagrammi colore-magnitudine corrispondenti in diverse bande fotometriche.*

3.2 *Morfologia del Ramo Orizzontale*

Come già ampiamente descritto (vedi §1.2), la morfologia del ramo orizzontale è guidata dalla perdita di massa che le strutture subiscono in fase di gigante rossa. Dato

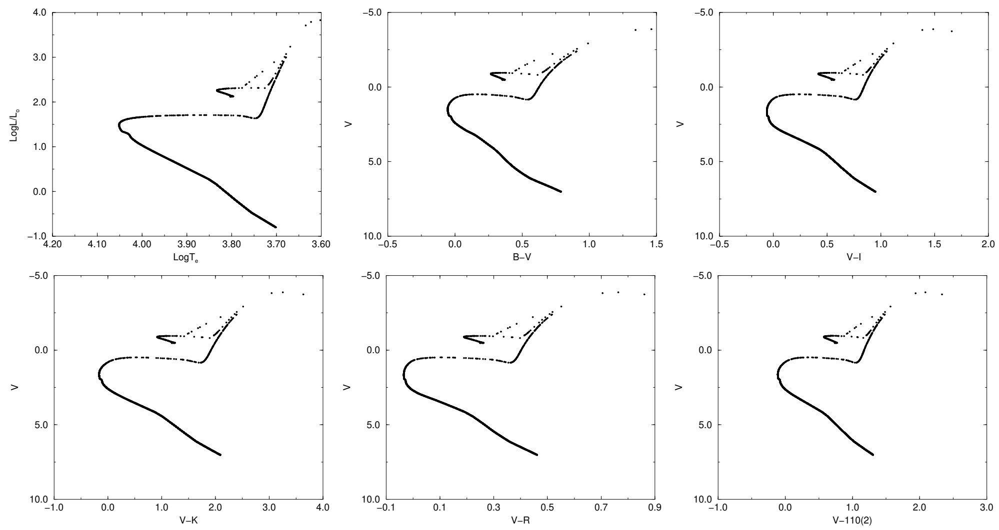

Figura 3.4: *Come in figura 3.3 ma per età* $t = 1\,Gyr$.

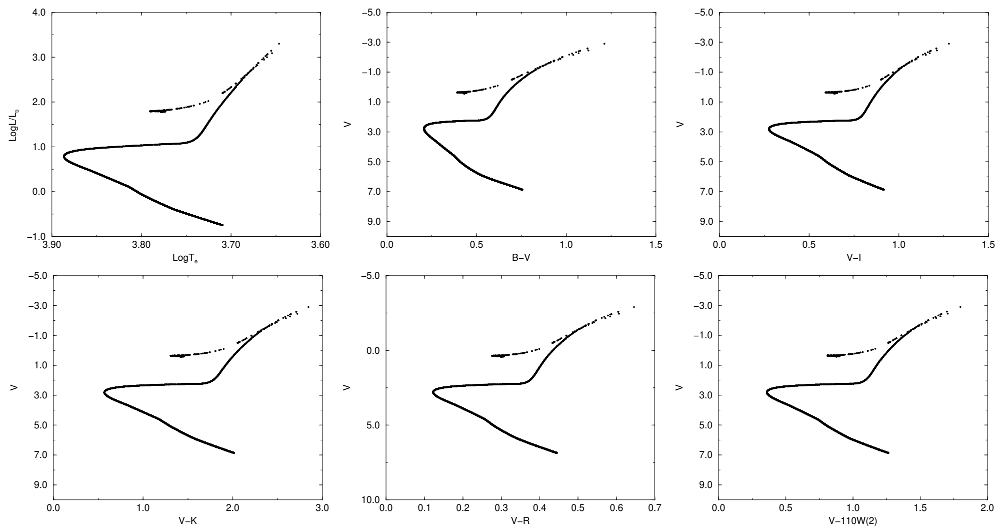

Figura 3.5: *Come in figura 3.3 ma per età* $t = 5\,Gyr$.

che il ramo delle giganti rosse non risulta influenzato dalla perdita di massa, è possibile, per costruire il sintetico, utilizzare tracce evolutive che non ne tengano conto. Le dimensioni del nucleo di He al $flash$ dipendono solo dalla composizione chimica e dalla massa iniziale (in sequenza principale) della struttura. Quanto detto resta valido solo nel caso in cui l'efficienza della perdita di massa non raggiunga valori troppo

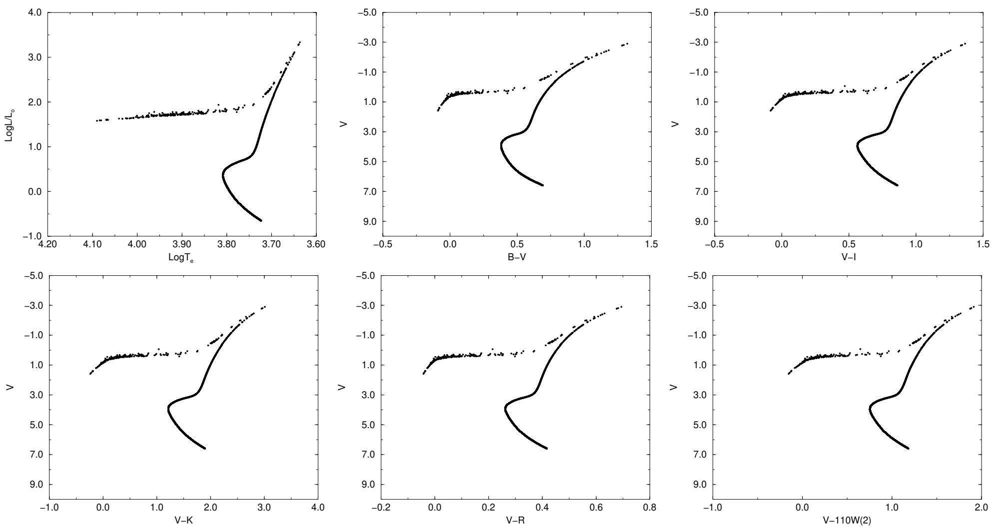

Figura 3.6: *Come in figura 3.3 ma per età* $t = 12\,Gyr$.

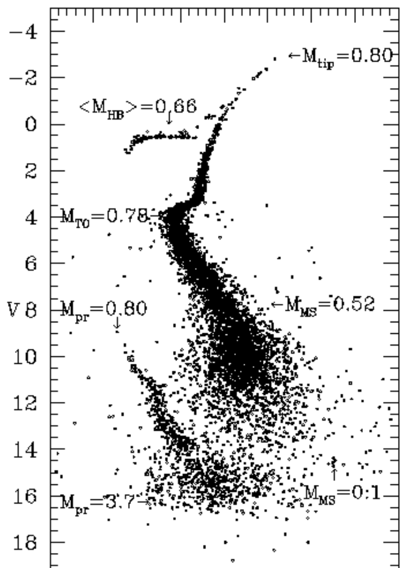

Figura 3.7: *Diagramma colore-magnitudine del modello sintetico con composizione chimica* $Z = 0.001$, $Y = 0.001$ *ed età* $t = 11\,Gyr$. *È simulata la dispersione dovuta agli errori fotometrici (Brocato et al., 2000 [21]). Sono riportate anche le nane bianche (*M_{pr} *indica la massa dei progenitori).*

alti, in tal caso la struttura evolverebbe prematuramente fuori dall'RGB innescando il *flash* dell'elio in fasi successive o finendo direttamente in nana bianca di He (Castellani & Castellani, 1993 [107]). Noi adotteremo, per le perdite di massa in RGB, la parametrizzazione di Reimers (1975, vedi §2.5.1) largamente usata in letteratura:

$$\dot{M} = -4 \times 10^{-13}\ \eta\ \frac{L}{gR} \qquad [M_\odot\ yr^{-1}] \tag{3.1}$$

Con questo formalismo la perdita di massa risulta strettamente legata alle proprietà della stella e al parametro libero η che stabilisce l'efficienza del processo. Dato che la

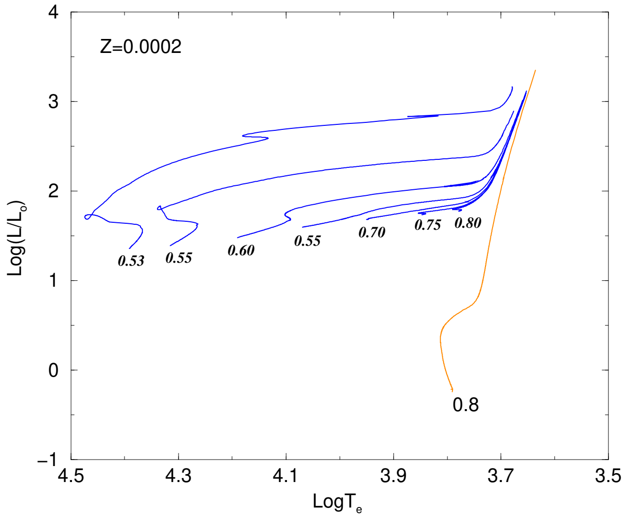

Figura 3.8: *Sono riportate (blu) le tracce evolutive dalla fase di combustione centrale di He, fino al primo pulso termico, al variare della massa in HB, e la traccia del progenitore di* $0.8\,M_\odot$ *(in arancione).*

perdita di massa non influenza gli stessi L, M, e T_{eff} da cui dipende, è possibile integrare lungo l'evoluzione dei modelli calcolati senza perdita di massa ottenendo così la perdita di massa totale al termine della fase di RGB. In questo modo, una volta stabilito il valore del parametro η, è possibile valutare la massa originale (cioè senza perdita di massa) nel punto di massima luminosità dell'RGB e la perdita subita e stabilire così la massa media in HB, la sua posizione nel diagramma colore-magnitudine e il tempo evolutivo in questa fase. Quest'ultima quantità sarà utilizzata per determinare il numero di stelle in HB (N_{HB}) per mezzo del numero, a questo punto noto, di stelle in RGB. Abbiamo infatti visto come per le fasi successive la sequenza principale i tempi evolutivi caratteristici diminuiscano sufficientemente perché il numero di stelle sia loro proporzionale:

$$\frac{N_{HB}}{N_{RGB}} \propto \frac{t_{HB}}{t_{RGB}} \tag{3.2}$$

Una volta noti il numero di stelle in HB e la massa media resta solo da stabilire la dispersione in massa per ottenere la morfologia del ramo orizzontale che, come abbiamo visto, è ben riprodotta da una Gaussiana. In media il valore $\eta = 0.4$ sembra essere in grado di riprodurre la morfologia di HB più diffusa degli ammassi globulari Galattici (Renzini & Fusi Pecci, 1988 [31]); comunque un valore più preciso verrà definito dal confronto con gli ammassi M68, M30 e M15 (vedi §4.2). Per la dispersione in massa, invece, di solito si assumono valori che si aggirano attorno a $\sigma_M = 0.02$. Per simulare la dispersione in temperatura dell'HB è possibile procedere assumendo non una dispersione in massa ma nell'efficienza della perdita di massa η come nel nostro caso (vedi §4.2), i valori per la dispersione in η, σ_η, sono chiaramente diversi da quelli per σ_M. Una volta generate, le masse in fase di HB vengono posizionate sulle tracce di HB con una distribuzione casuale (piatta) delle possibili età in fase di combustione centrale di He da zero fino alla massima età della massa media. Viene inoltre tenuto conto della perdita di massa e quindi del fatto che le stelle possono allontanarsi dalla traccia ed entrare in fase di nana bianca prima del primo pulso termico.

3.3 *Ramo Asintotico e Pulsi Termici*

Tutte le tracce evolutive (comprese le nostre) si fermano generalmente al primo pulso termico dato che, come abbiamo già accennato, risulta molto complicato il calcolo evolutivo di una struttura oltre questo punto. La versione originale del programma prevedeva l'estensione di ciascuna delle tracce evolutive utilizzate tramite opportune formule analitiche (vedi §2.5.2) ma questo sistema era molto scomodo e di precisione piuttosto incerta. Per questo motivo è stata introdotta nel codice una subroutine che tratta la fase di TP-AGB secondo le prescrizioni teoriche più recenti. Prima però è necessario tener conto della possibilità che la perdita di massa riduca la massa dell'inviluppo della struttura oltre un certo valore critico per cui la stella abbandona la fase di AGB, anche prima dei pulsi termici, per stabilirsi sulla sequenza di raffreddamento e divenire così una nana bianca. Per tenere conto di questo fenomeno, in fase di EAGB, abbiamo utilizzato la relazione per la massa critica dell'inviluppo ottenuta fittando i risultati di Castellani et al. (1992 [108]):

$$M_{cr}^{env} = 0.0153 \cdot [\log(L/L_{\odot})]^2 - 0.0905 \cdot \log(L/L_{\odot}) + 0.1481 \tag{3.3}$$

In fase di TP-AGB invece la massa critica è stata calcolata per mezzo della relazione, generalmente utilizzata, di Iben (1985 [109]):

$$M_{cr}^{env} = 0.1\,\Delta M_c \tag{3.4}$$

dove ΔM_c è l'incremento della massa del nucleo di elio subito durante il pulso termico. Quindi, quando la massa dell'inviluppo, calcolata come la differenza tra la massa totale della stella e la massa del nucleo di elio, scende al di sotto del valore critico, la stella viene tolta dall'AGB e aggiunta alle nane bianche. Il calcolo della perdita di massa lungo il ramo asintotico è stato effettuato per mezzo della relazione di Reimers, con la stessa efficienza utilizzata per il ramo delle giganti rosse, nel caso dell'EAGB mentre in fase di TP-AGB è stata utilizzata quella di Baud & Habing (1983 [110]):

$$\dot{M} = -4 \cdot 10^{-13}\ \eta_{AGB}\ \frac{M_{env,0}}{M}\ \frac{LR}{M_{env}} \qquad [M_{\odot}\ yr^{-1}] \tag{3.5}$$

dove M_{env} è la massa attuale dell'inviluppo e $M_{env,0}$ la corrispondente massa all'ingresso in AGB e dove, per l'efficienza della perdita di massa, è stato assunto il valore $\eta_{AGB} \simeq 3$ (vedi Groenewegen & de Jong, 1994 [77]). La principale differenza tra questa formula e quella di Reimers, adottata per il ramo delle giganti rosse, è la dipendenza dalla massa dell'inviluppo. In questo modo infatti la violenta perdita della massa che caratterizza le fasi finali è legata al rapporto $M_{env,0}/M_{env}$ che diventa sostanzialmente diverso da 1 solo alla fine dell'AGB.

Vediamo ora in dettaglio il formalismo utilizzato per riprodurre i pulsi termici. Abbiamo già visto quanto sia difficile costruire un modello per la fase di TP-AGB a causa dei pulsi stessi, delle enormi perdite di massa (*superwind*) che possono interessare l'inviluppo e dell'*Hot Bottom Burning* (*HBB* , vedi §2.5.2). Recentemente si sono resi disponibili lavori accurati che forniscono le relazioni che regolano i pulsi permettendoci di includere, nel sintetico, anche questa fase. La presenza dei pulsi infatti può influire molto sui colori integrati di una popolazione stellare (vedi Santos & Frogel, 1997 [111]). La procedura utilizzata in questo lavoro utilizza le relazioni per i pulsi termici di Wagenhuber & Groenewegen (1998 [73]) che trattano in maniera accurata l'HBB ed anche le variazioni rapide di luminosità che caratterizzano i TP. La relazione da noi utilizzata per legare luminosità e temperatura effettiva, necessaria per collocare i pulsi sul diagramma colore-magnitudine, è quella di Renzini & Voli (1981 [62]) la cui validità è stata confermata anche da lavori più recenti (vedi ad esempio Girardi & Bertalli, 1998 [78]). In figura 3.9 è riportato l'andamento nel tempo del logaritmo della luminosità durante un pulso termico e sono indicati i punti estremi (vedi anche §2.5.2):

- L_A: Luminosità massima durante la combustione quiescente di H
- L_B: Luminosità minima durante il rapido calo che si ha successivamente ad ogni pulso
- L_C: Luminosità di picco durante il pulso
- L_D: Luminosità minima, raggiunta "lentamente", durante la transizione da combustione di He a combustione di H
- L'_A: Luminosità massima durante la combustione quiescente di H che precede il pulso successivo

La durata della luminosità di picco del pulso L_C e quella della luminosità minima L_B sono molto brevi e per questo non sono state prese in considerazione. Inoltre l'efficienza dell'HBB è tale da portare L_A a valori maggiori di L_C e quindi è possibile trascure quest'ultima nel calcolo della perdita di massa. In definitiva quindi assumiamo come luminosità del pulso la luminosità massima durante la combustione quiescente dell'idrogeno L_A.

Il codice passa alla subroutine che calcola i pulsi termici quando l'età dell'ammasso supera l'età dell'ultimo punto sulla traccia di EAGB (che corrisponde al primo pulso)

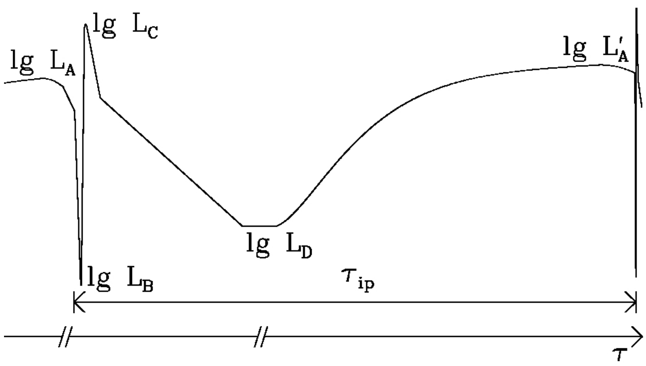

Figura 3.9: *Andamento di* $\log(L/L_\odot)$ *nel tempo durante un pulso termico. La scala dei tempi è dilatata nella fase del pulso. Da Wagenhuber & Groenewegen (1998 [73]).*

relativa alla stella in questione. La subroutine calcola[1] quindi, per mezzo delle relazioni che descriveremo tra breve, la luminosità massima durante la combustione quiescente (L_A e L'_A) e il periodo di interpulso. Successivamente, per ogni pulso, viene calcolata la perdita di massa secondo l'equazione (3.5). Quindi, con i nuovi valori della massa del nucleo di elio, della massa totale (e quindi di quella dell'inviluppo) e con la luminosità "finale" (ovvero quella che precede il pulso successivo) vengono di nuovo risolte le equazioni. Il passo temporale è quindi stabilito dal tempo di interpulso τ_{ip}. La stella abbandona la fase dei pulsi termici quando si verifica una delle seguenti condizioni:

- la massa dell'inviluppo, pari alla differenza tra la massa totale e la massa del nucleo di elio, scende sotto il valore critico

- la somma del tempo trascorso in TP-AGB (pari alla somma dei periodi di interpulso) e del tempo di evoluzione della stella fino al primo pulso (fine della traccia) supera l'età dell'ammasso

- La massa del nucleo di C+O raggiunge il valore limite per le strutture degeneri ($1.4\,M_\odot$, Massa di Chandrasekhar, vedi §1.2), il carbonio viene innescato in zone fortemente degeneri provocando la deflagrazione (supernova)

[1]Per risolvere il sistema di equazioni sono state utilizzate le subroutine pubblicate in Fortran Numerical Recipes [113] [114].

Quando si verifica una di queste condizioni la stella viene aggiunta al diagramma colore-magnitudine con luminosita' del pulso L_A.

Descriviamo ora di seguito le relazioni che sono state utilizzate per la luminosità.

Combustione di H quiescente

La luminosità massima durante la combustione quiescente di H (L_A) è strettamente legata alla massa del nucleo di elio[2] (M_c) attuale ed a quella del nucleo di elio al primo pulso ($M_{c,0}$), all'abbondanza di metalli nell'inviluppo (Z_i) e all'efficienza della convezione esterna (ovvero al valore della *mixing−length*, α, che è fissato). L'espressione per L_A è costituita da varie parti che sono state numerate separatamente per convenienza di discussione:

$$L_A = (18160 + 3980 Z_i)\,(M_c - 0.4468) \tag{3.6}$$

$$+10^{(2.705+1.649 M_c)}\times \tag{3.7}$$

$$\times\left(10^{[0.0237(\alpha-1.447)M_{c,0}^2 M_{env}^2 (1-e^{(-\Delta M_c/0.01)})]}\right)+ \tag{3.8}$$

$$-10^{[3.529-(M_{c,0}-0.4468)\Delta M_c/0.01]} \tag{3.9}$$

dove M_{env} è la massa dell'inviluppo e ΔM_c è l'aumento della massa del nucleo di elio definito come $\int max\{dM_c/d\tau\}d\tau$, di solito $\Delta M_c = M_c(\tau) - M_{c,0}$. La prima parte (3.6) del secondo membro dell'equazione per L_A è la relazione massa del nucleo-luminosità; la seconda parte (3.7), è la correzione, se si pone la parte (3.6) uguale ad 1 e non si considera la (3.9), dovuta al fatto che l'andamento di L_A con la massa del nucleo varia per $M_c \gtrsim 0.6\,M_\odot$ (vedi Iben & Truran 1978 [72]). La parte (3.8) è la correzione dovuta all'*HBB* che provoca un ripido aumento della L_A iniziale e una ricaduta quando la massa dell'inviluppo M_{env} diminuisce. L'*HBB* diventa efficiente solo per valori della massa iniziale $M_i < 5\,M_\odot$ (D'Antona & Mazzitelli, 1993 [112]). Infine l'ultima parte, la (3.9), tiene conto del fatto che i pulsi, soprattutto per $M_c \lesssim 0.65 M_\odot$ non raggiungono

[2] in questo caso il nucleo è definito come la zona racchiusa dai punti dove il contenuto di idrogeno è circa la metà di quello fotosferico. Poiché la shell di H è estremamente sottile, sia in raggio che in massa, questa definizione coincide con le altre date in letteratura.

subito la piena efficienza e che quindi i primi hanno una luminosità inferiore rispetto a quella ricavata utilizzando solo i primi tre termini.
La crescita della massa del nucleo di elio è descritta dall'equazione (2.16) nella forma:

$$\frac{dM_c}{dt} = \frac{q}{X_m}\, L_H \tag{3.10}$$

dove q è la massa bruciata per unità di energia rilasciata e dipende dalla metallicità Z a causa del contributo che questa fornisce al processo di combustione dell'H tramite il ciclo CNO:

$$q = (1.02 + 0.017Z)\, 10^{-11} \qquad (M_\odot/(L_\odot yr)) \tag{3.11}$$

Il termine L_H è la luminosità dovuta alla combustione di idrogeno ed è, anche se di poco, diversa dalla luminosità totale che è la somma di L_H, del contributo dell'energia gravitazionale dovuta alla contrazione del nucleo ed al flusso di materia processata dal mantello nel nucleo, ed infine del contributo della combustione di He residua:

$$\log(L_H/L_A) = -0.012 - 10^{(-1.25-113\Delta M_c)} - 0.0016M_{env} \tag{3.12}$$

Il valore di L_A da usare in questa equazione è quello con il termine di HBB (equazione 3.8) posto uguale ad 1.

Il periodo di interpulso

Il periodo di interpulso τ_{ip}, ovvero l'intervallo di tempo che intercorre tra due pulsi successivi (quindi tra due massimi di luminosità), è ora l'ultimo termine che resta da introdurre. L'espressione per τ_{ip}, composta anch'essa da vari contributi numerati separatamente per comodità di lettura, è la seguente:

$$\log \tau_{ip} = (-3.628 + 0.1337Z_i)(M_c - 1.9454) + \tag{3.13}$$

$$-10^{[-2.080-0.353Z_i+0.200(M_{env}+\alpha-1.5)]} + \tag{3.14}$$

$$-10^{[-0.626-70.30(M_{c,0}-Z_i)\Delta M_c]} \tag{3.15}$$

Ancora una volta i vari termini tengono conto sia della minore luminosità dei primi pulsi (3.15) che dell'HBB (3.14). Notiamo la forte dipendenza del periodo di interpulso dalla metallicità. Infatti al diminuire della metallicità il periodo di interpulso aumenta, ciò significa che la shell di H brucia più a lungo accrescendo quindi maggiormente la shell di He e rendendo i TP più violenti, anche a causa del fatto che aumenta la degenerazione elettronica.

Capitolo 4

Calibrazione

4.1 Premessa

Il nostro scopo è quello di riuscire ad ottenere informazioni dai colori integrati di popolazioni semplici (SSP) che non siano risolvibili stella per stella. Per fare questo è necessario testare il nostro codice su ammassi stellari, nel nostro caso ammassi globulari galattici, che sono ricchi di stelle e sufficientemente vicini perché sia disponibile il loro diagramma colore-magnitudine. In questo modo è possibile stabilire i parametri d'ingresso tali da riprodurre, prima di tutto, le caratteristiche del diagramma colore-magnitudine come il colore del ramo delle giganti rosse e la morfologia del ramo orizzontale. I risultati del codice per i colori integrati verranno successivamente confrontati anche con i colori integrati di un ampio campione di ammassi appartenenti alla Grande Nube di Magellano che coprono età che vanno dalle decine di milioni a $12-15$ miliardi di anni.

Prima ancora di questo, dato che ci occuperemo nel seguito non solo di colori integrati ma anche di rapporti M/L, abbiamo indagato l'effetto su queste quantità della presenza o meno delle stelle di piccola massa e delle nane bianche, quantità che già altri autori hanno dimostrato essere scarsamente influenti sui colori integrati. Tale analisi è stata effettuata per tre diverse età degli ammassi: $500\,Myr$, $2\,Gyr$, $11\,Gyr$. A questo scopo abbiamo assunto un modello di riferimento di composizione chimica degli ammassi globulari scarsamente metallici ($Z = 0.0002$ e $Y = 0.23$). Il valore del parametro dell'efficienza di perdita di massa in RGB è stato posto pari a $\eta = 0.3$ e la dispersione in η a $\sigma_\eta = 0.08$ che, come vedremo, sono i valori con cui riusciamo, per l'età $t = 11\,Gyr$, a riprodurre la morfologia del ramo orizzontale di M68; l'esponente della IMF è $s = 2.35$ (vedi §2.1) sopra le $0.5\,M_\odot$ e $s = 1.3$ sotto le $0.5\,M_\odot$ (vedi §2.1). Il numero di stelle è stato variato con lo scopo di mantenere costante, per quanto possibile, la magnitudine assoluta nel V al valore di -7.35 (che è il valore dell'ammasso M68). La figura 4.1 mostra il diagramma sintetico colore-magnitudine nel $(V, V-I)$, nel quale sono riportate anche le nane bianche e le stelle di piccolissima massa (fino a $0.1\,M_\odot$) per popolazioni stellari semplici di tre diverse età con la stessa magnitudine totale nel V.

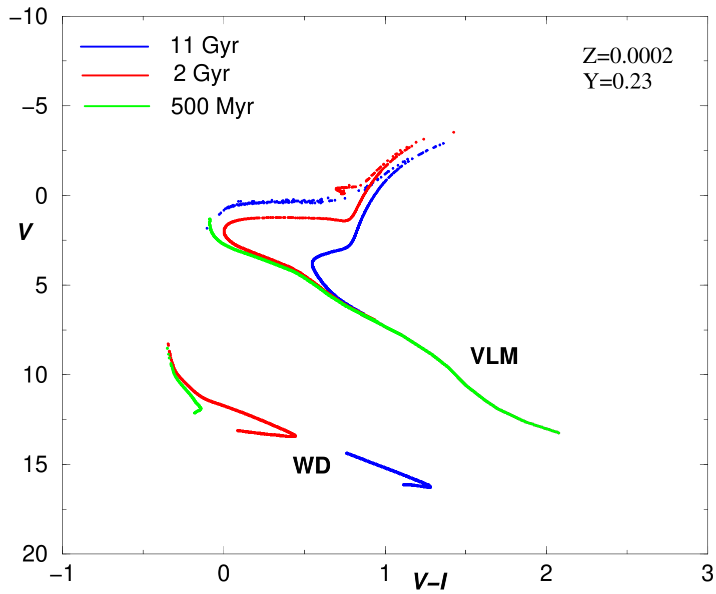

Figura 4.1: *Diagrammi colore-magnitudine per popolazioni stellari semplici di tre età diverse ($t = 500\,Myr, 2\,Gyr$ e $11\,Gyr$) e stessa magnitudine totale nel $V \simeq -7.35$, stessa efficienza della perdita di massa $\eta = 0.3$ e stessa dispersione della perdita di massa in RGB, $\sigma_\eta = 0.08$ (valori che riproducono la morfologia intermedia del ramo orizzontale, vedi §4.2.1) Sono riportate anche le nane bianche (WD) e le stelle di massa piccolissima (VLM) fino a $0.1\,M_\odot$.*

Tabella 4.1: *Colori integrati dei modelli con composiziona chimica* $Z = 0.0002$ *e* $Y = 0.23$*, efficienza della perdita di massa in RGB* $\eta = 0.3$ *e dispersione* $\sigma_\eta = 0.08$*, a tre diverse età (*$11\,Gyr$*,* $2\,Gyr$ *e* $500\,Myr$*) ottenuti con e senza le nane bianche.*

	V	$U-B$	$B-V$	$V-R$	$V-I$	$V-J$	$V-K$
$11\,Gyr$							
completo	−7.34	0.00	0.60	0.42	0.87	1.47	2.04
errore (±)	0.05	0.02	0.02	0.01	0.02	0.03	0.04
no WD	−7.35	0.00	0.60	0.42	0.88	1.47	2.05
errore (±)	0.05	0.01	0.02	0.01	0.02	0.02	0.03
$2\,Gyr$							
completo	−7.33	0.02	0.45	0.32	0.70	1.23	1.76
errore (±)	0.06	0.01	0.03	0.02	0.03	0.06	0.08
no WD	−7.33	0.02	0.45	0.32	0.71	1.23	1.77
errore (±)	0.06	0.01	0.03	0.02	0.03	0.06	0.08
$500\,Myr$							
completo	−7.36	−0.01	0.20	0.18	0.44	0.85	1.31
errore (±)	0.10	0.02	0.06	0.05	0.12	0.22	0.04
no WD	−7.33	−0.02	0.18	0.17	0.40	0.79	1.23
errore (±)	0.10	0.01	0.03	0.03	0.08	0.15	0.23

Influenza delle nane bianche

Le tabelle 4.1 e 4.2 mostrano l'andamento dei colori integrati e dei valori di M/L in varie bande per tre diverse età del campione completo e di quello in cui non sono state incluse le nane bianche. Inoltre nella tabella 4.3 sono riportati separatamente i valori della massa totale e della luminosità totale nelle varie bande; per quest'ultima è riportato, per dare un'idea delle grandi fluttuazioni in gioco, l'ordine di grandezza dell'errore stimato per il modello a $2\,Gyr$, valido anche per le altre età. Il numero di stelle nel sintetico è stato scelto in modo da produrre sempre la magnitudine assoluta nel V di -7.35 entro i limiti dell'incertezza statistica. La magnitudine visuale assoluta è infatti generalmente la principale osservabile per ammassi stellari non risolti. L'incertezza riportata nelle tabelle, compresa quella della magnitudine nel V, è stata calcolata come la deviazione standard sui valori delle grandezze relative a dieci diversi modelli con stessi parametri d'ingresso (vedi §2.4). Innanzitutto, come andamento generale che discuteremo più in dettaglio nel cap.5, notiamo che al diminuire

Tabella 4.2: *Rapporti massa (in masse solari) su luminosità totale (in luminosità solari) nelle varie bande per i modelli con composizione chimica $Z = 0.0002$ e $Y = 0.23$, efficienza della perdita di massa in RGB $\eta = 0.3$ e dispersione $\sigma_\eta = 0.08$, a tre diverse età ($11\,Gyr$, $2\,Gyr$, $500\,Myr$) ottenuti con e senza le nane bianche.*

	$(M/L)_V$	$(M/L)_U$	$(M/L)_B$	$(M/L)_R$	$(M/L)_I$	$(M/L)_J$	$(M/L)_K$
$11\,Gyr$							
completo	1.87	1.75	1.91	1.78	1.61	1.38	1.15
errore (±)	0.08	0.04	0.06	0.08	0.08	0.08	0.08
no WD	1.44	1.36	1.48	1.37	1.24	1.07	0.88
errore (±)	0.07	0.04	0.06	0.07	0.07	0.07	0.07
$2\,Gyr$							
completo	0.57	0.44	0.47	0.59	0.58	0.53	0.46
errore (±)	0.03	0.01	0.02	0.04	0.04	0.05	0.05
no WD	0.51	0.39	0.42	0.52	0.51	0.47	0.40
errore (±)	0.03	0.01	0.01	0.03	0.04	0.05	0.05
$500\,Myr$							
completo	0.23	0.13	0.15	0.27	0.30	0.31	0.29
errore (±)	0.02	0.01	0.01	0.03	0.05	0.08	0.11
no WD	0.22	0.13	0.14	0.27	0.30	0.32	0.30
errore (±)	0.02	0.01	0.01	0.03	0.05	0.07	0.10

Tabella 4.3: *Luminosità totale nelle varie bande fotometriche e massa totale ottenute per i modelli con composizione chimica $Z = 0.0002$ e $Y = 0.23$ e con efficienza della perdita di massa in RGB $\eta = 0.3$ e dispersione $\sigma_\eta = 0.08$, a tre diverse età ($11\,Gyr$, $2\,Gyr$ e $500\,Myr$), con e senza le nane bianche.*

	$L_V/L_{V\odot}$	$L_U/L_{U\odot}$	$L_B/L_{B\odot}$	$L_R/L_{R\odot}$	$L_I/L_{I\odot}$	$L_J/L_{J\odot}$	$L_K/L_{K\odot}$	$M_{tot}/M_\odot$
errore ±	$\sim 5\ 10^3$	$\sim 3\ 10^3$	$\sim 4\ 10^3$	$\sim 5\ 10^3$	$\sim 7\ 10^3$	$\sim 9\ 10^3$	$\sim 13\ 10^3$	–
$11\,Gyr$								
completo	$7.4\ 10^4$	$8.0\ 10^4$	$7.3\ 10^4$	$7.9\ 10^4$	$8.7\ 10^4$	$10.1\ 10^4$	$12.2\ 10^4$	139554 ± 115
no WD	$7.5\ 10^4$	$8.0\ 10^4$	$7.4\ 10^4$	$7.9\ 10^4$	$8.8\ 10^4$	$10.2\ 10^4$	$12.4\ 10^4$	108921 ± 75
$2\,Gyr$								
completo	$7.2\ 10^4$	$9.3\ 10^4$	$8.8\ 10^4$	$7.0\ 10^4$	$7.1\ 10^4$	$7.8\ 10^4$	$9.1\ 10^4$	41364 ± 42
no WD	$7.3\ 10^4$	$9.4\ 10^4$	$8.9\ 10^4$	$7.1\ 10^4$	$7.3\ 10^4$	$7.9\ 10^4$	$9.3\ 10^4$	37123 ± 32
$500\,Myr$								
completo	$7.6\ 10^4$	$12.7\ 10^4$	$11.6\ 10^4$	$6.4\ 10^4$	$5.9\ 10^4$	$5.8\ 10^4$	$6.3\ 10^4$	17275 ± 50
no WD	$7.3\ 10^4$	$12.7\ 10^4$	$11.5\ 10^4$	$6.1\ 10^4$	$5.5\ 10^4$	$5.3\ 10^4$	$5.6\ 10^4$	16429 ± 52

dell'età aumenta il numero di stelle di grande massa, di conseguenza diminuiscono i colori nelle bande U e B mentre quelli nell'infrarosso aumentano. Come si vede dalla figura 4.1 le nane bianche si collocano a luminosità inferiori rispetto alle fasi che le precedono (la fase di ingresso in nana bianca, ad alta luminosità, è veloce e quindi scarsamente popolata), ci aspettiamo quindi che il loro contributo alla luminosità nelle varie bande sia piccolo. Dalle tabelle riportate (4.1 e 4.2) risulta infatti che in tutti i tre casi ($11\,Gyr$, $2\,Gyr$ e $500\,Myr$) i colori integrati non variano entro i limiti dell'errore anche togliendo del tutto il contributo delle nane bianche. Il contributo delle nane bianche al rapporto M/L non è trascurabile, almeno per grandi età (come abbiamo visto le nane contribuiscono solo alla massa totale). Per popolazioni sufficientemente giovani ($t \lesssim 2\,Gyr$) il numero di stelle che hanno fatto in tempo ad evolvere fino alla fase di nana bianca diminuisce sensibilmente e di conseguenza anche la massa totale di nana. Notiamo inoltre che l'errore statistico dei colori integrati e dei rapporti M/L aumentano in percentuale al diminuire dell'età. Ciò è dovuto principalmente al fatto che minore è l'età e minore è il numero di stelle necessario per produrre una determinata magnitudine (essendo le strutture in evoluzione di massa maggiore e quindi più luminose) e quindi la stocasticità dell'IMF porta ad una maggiore fluttuazione dei risultati. Nel caso dei rapporti M/L è comunque da notare che l'incertezza dipende sia dalle fluttuazioni della luminosità in una data banda che da quelle della massa totale.

Influenza delle stelle di piccola massa

Per stelle di piccola massa si intendono le stelle al di sotto delle $0.6\,M_\odot$ che all'età stimata dell'Universo si trovano ancora tutte in fase iniziale di combustione centrale di idrogeno (*Zero Age Main Sequence, ZAMS*). Tali stelle sono più numerose delle nane bianche, ci aspettiamo quindi che il loro contributo ai colori integrati ed al rapporto M/L sia maggiore anche se vari autori hanno già stimato che il loro contributo ai colori integrati può essere trascurato (vedi ad esempio Brocato et al. 1998 [20]). I range di massa che analizziamo sono $M < 0.4\,M_\odot$, $0.4 < M/M_\odot < 0.6$ e $M > 0.6\,M_\odot$. Dato che le stelle di piccola massa emettono per lo più nel rosso i colori che dovrebbero risentire maggiormente della loro assenza sono il $(V-R)$, $(V-I)$, $(V-J)$ e $(V-K)$. Come si può vedere dai valori riportati nella tabella 4.4, le variazioni sono

Tabella 4.4: *Colori integrati dei modelli con composizione chimi* $Z = 0.0002$ *e* $Y = 0.23$ *e con efficienza della perdita di massa* $\eta = 0.3$ *e* $\sigma_\eta = 0.08$*, a tre diverse età (*$11\,Gyr$*,* $2\,Gyr$ *e* $500\,Myr$*), ottenuti con e senza le stelle di massa* $M < 0.4\,M_\odot$ *e e con e senza quelle di massa* $M < 0.6\,M_\odot$*.*

	V	$V-R$	$V-I$	$V-J$	$V-K$
$11\,Gyr$					
completo	−7.34	0.42	0.87	1.47	2.04
errore (±)	0.05	0.01	0.02	0.03	0.04
no $M < 0.4M_\odot$	−7.36	0.40	0.85	1.43	2.00
errore (±)	0.06	0.01	0.02	0.02	0.03
no $M < 0.6M_\odot$	−7.36	0.40	0.84	1.41	1.98
errore (±)	0.06	0.01	0.02	0.03	0.04
$2\,Gyr$					
completo	−7.33	0.32	0.70	1.23	1.76
errore (±)	0.06	0.02	0.03	0.06	0.08
no $M < 0.4M_\odot$	−7.36	0.32	0.70	1.23	1.77
errore (±)	0.05	0.01	0.03	0.05	0.07
no $M < 0.6M_\odot$	−7.40	0.32	0.70	1.23	1.77
errore (±)	0.07	0.02	0.03	0.06	0.08
$500\,Myr$					
completo	−7.36	0.18	0.44	0.85	1.31
errore (±)	0.10	0.05	0.12	0.23	0.33
no $M < 0.4M_\odot$	−7.35	0.18	0.44	0.84	1.30
errore (±)	0.10	0.05	0.12	0.23	0.34
no $M < 0.6M_\odot$	−7.35	0.18	0.43	0.83	1.29
errore (±)	0.10	0.05	0.12	0.23	0.34

però minori degli errori stimati. I rapporti M/L invece risentono della presenza delle stelle di piccola massa. In tabella 4.5 sono riportati i valori del modello completo, di quello senza le strutture con massa $M < 0.4\,M_\odot$ e del modello senza stelle di massa $M < 0.6\,M_\odot$. Le stelle di piccola massa costituiscono più della metà della massa totale. Abbiamo già osservato come le stelle sotto le $0.6\,M_\odot$ non contribuiscano in maniera significativa alla luminosità totale, le differenze tra i rapporti M/L sono quindi dovute alla variazione della massa totale. In tabella 4.6 sono riportate le luminosità totali nelle varie bande fotometriche, le variazioni risultano all'interno dell'errore stimato. Inoltre tale effetto è scarsamente sensibile all'età della popolazione. La figura 4.2 mostra le curve cumulative in massa, a partire dalle grandi masse, relative alle tre diverse

Tabella 4.5: *Rapporti massa totale (in masse solari) su luminosità totale (in luminosità solari) nelle varie bande per i modelli con composizione chimica* $Z = 0.0002$ *e* $Y = 0.23$ *e con efficienza della perdita di massa* $\eta = 0.3$ *e dispersione* $\sigma_\eta = 0.08$*, a tre diverse età (*$11\,Gyr$*,* $2\,Gyr$ *e* $500\,Gyr$*) ottenuti con e senza le stelle di massa* $M < 0.4\,M_\odot$ *e con e senza le stelle di massa* $< 0.6\,M_\odot$*.*

	$(M/L)_V$	$(M/L)_U$	$(M/L)_B$	$(M/L)_R$	$(M/L)_I$	$(M/L)_J$	$(M/L)_K$
$11\,Gyr$							
completo	1.88	1.75	1.91	1.78	1.61	1.38	1.15
errore (±)	0.08	0.04	0.06	0.08	0.08	0.08	0.08
no $M < 0.4M_\odot$	0.85	0.74	0.80	0.81	0.74	0.65	0.54
errore (±)	0.05	0.02	0.03	0.05	0.05	0.05	0.04
no $M < 0.6M_\odot$	0.68	0.58	0.63	0.66	0.60	0.53	0.44
errore (±)	0.04	0.02	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04
$2\,Gyr$							
completo	0.57	0.44	0.47	0.59	0.57	0.53	0.46
errore (±)	0.03	0.01	0.02	0.04	0.04	0.05	0.05
no $M < 0.4M_\odot$	0.29	0.23	0.24	0.31	0.30	0.27	0.23
errore (±)	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.03
no $M < 0.6M_\odot$	0.23	0.18	0.19	0.24	0.24	0.22	0.19
errore (±)	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02
$500\,Myr$							
completo	0.23	0.13	0.15	0.27	0.30	0.31	0.29
errore (±)	0.02	0.01	0.01	0.03	0.05	0.08	0.11
no $M < 0.4M_\odot$	0.13	0.076	0.083	0.15	0.17	0.18	0.17
errore (±)	0.01	0.003	0.004	0.02	0.03	0.05	0.07
no $M < 0.6M_\odot$	0.11	0.063	0.069	0.13	0.14	0.15	0.14
errore (±)	0.01	0.002	0.003	0.02	0.03	0.04	0.05

età, si vede come il contributo sotto le $0.5\,M_\odot$ non sia trascurabile, soprattutto per $t = 11\,Gyr$.

Possiamo quindi concludere, in accordo con altri autori, che i colori integrati non dipendono dalle stelle di massa $M < 0.6\,M_\odot$ e dalle nane bianche. Tali strutture non sono comunque trascurabili nel caso in cui si vogliano stimare i rapporti M/L.

In figura 4.3 è riportato l'andamento nel diagramma colore-magnitudine dell'integrato del sintetico ottenuto con numero di stelle generate nell'intervallo $0.6 \div 11\,M_\odot$ fissato a 30000. Come atteso all'aumentare dell'età il sintetico presenta magnitudine crescente (e quindi una luminosità decrescente) dato che diminuisce la massa delle

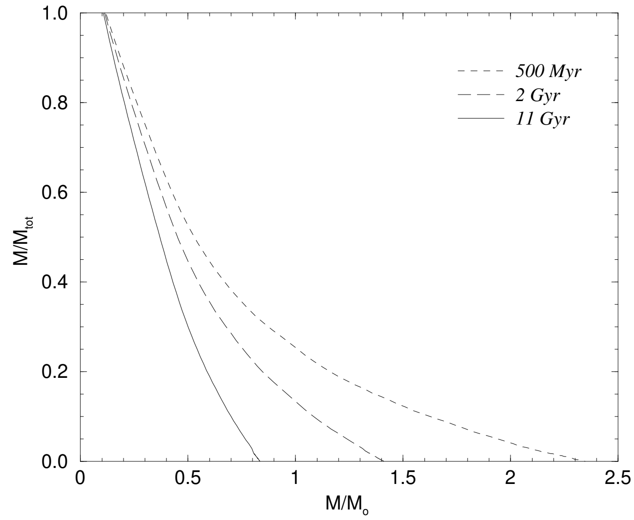

Figura 4.2: *Curve cumulative della massa normalizzate ad uno per le tre età indicate e per la composizione chimica $Z = 0.0002$ e $Y = 0.23$. La magnitudine totale nel visibile è mantenuta costante a $V = -8$.*

Tabella 4.6: *Luminosità totale nelle varie bande fotometriche e massa totale per i modelli con composizione chimica $Z = 0.0002$ e $Y = 0.23$ e con efficienza della perdita di massa $\eta = 0.3$ e $\sigma_\eta = 0.08$, a tre diverse età ($11\,Gyr$, $2\,Gyr$ e $500\,Myr$) ottenuti con e senza le stelle di massa $M < 0.4\,M_\odot$ e con e senza le stelle di massa $M < 0.6\,M_\odot$.*

	$L_V/L_{V\odot}$	$L_U/L_{U\odot}$	$L_B/L_{B\odot}$	$L_R/L_{R\odot}$	$L_I/L_{I\odot}$	$L_J/L_{J\odot}$	$L_K/L_{K\odot}$	$M_{tot}/M_\odot$
errore $\pm$	$\sim 5\ 10^3$	$\sim 3\ 10^3$	$\sim 4\ 10^3$	$\sim 5\ 10^3$	$\sim 7\ 10^3$	$\sim 9\ 10^3$	$\sim 13\ 10^3$	–
$11\,Gyr$								
completo	$7.4\ 10^4$	$8.0\ 10^4$	$7.3\ 10^4$	$7.8\ 10^4$	$8.6\ 10^4$	$10.1\ 10^4$	$12.1\ 10^4$	139554 ± 115
no $M < 0.4\,M_\odot$	$7.6\ 10^4$	$8.7\ 10^4$	$8.0\ 10^4$	$7.9\ 10^4$	$8.6\ 10^4$	$9.8\ 10^4$	$11.9\ 10^4$	64321 ± 71
no $M < 0.6\,M_\odot$	$7.5\ 10^4$	$8.8\ 10^4$	$8.1\ 10^4$	$7.8\ 10^4$	$8.5\ 10^4$	$9.7\ 10^4$	$11.7\ 10^4$	51393 ± 81
$2\,Gyr$								
completo	$7.2\ 10^4$	$9.3\ 10^4$	$8.8\ 10^4$	$6.9\ 10^4$	$7.1\ 10^4$	$7.8\ 10^4$	$9.1\ 10^4$	41364 ± 42
no $M < 0.4\,M_\odot$	$7.5\ 10^4$	$9.8\ 10^4$	$9.2\ 10^4$	$7.3\ 10^4$	$7.5\ 10^4$	$8.2\ 10^4$	$9.6\ 10^4$	22393 ± 50
no $M < 0.6\,M_\odot$	$8.0\ 10^4$	$10.4\ 10^4$	$9.8\ 10^4$	$7.7\ 10^4$	$7.9\ 10^4$	$8.7\ 10^4$	$10.2\ 10^4$	18736 ± 70
$500\,Myr$								
completo	$7.5\ 10^4$	$12.7\ 10^4$	$11.6\ 10^4$	$6.4\ 10^4$	$5.9\ 10^4$	$5.8\ 10^4$	$6.3\ 10^4$	17275 ± 50
no $M < 0.4\,M_\odot$	$7.5\ 10^4$	$12.7\ 10^4$	$11.6\ 10^4$	$6.4\ 10^4$	$5.8\ 10^4$	$5.7\ 10^4$	$6.2\ 10^4$	9650 ± 50
no $M < 0.6\,M_\odot$	$7.5\ 10^4$	$12.7\ 10^4$	$11.6\ 10^4$	$6.3\ 10^4$	$5.8\ 10^4$	$5.6\ 10^4$	$6.2\ 10^4$	8021 ± 50

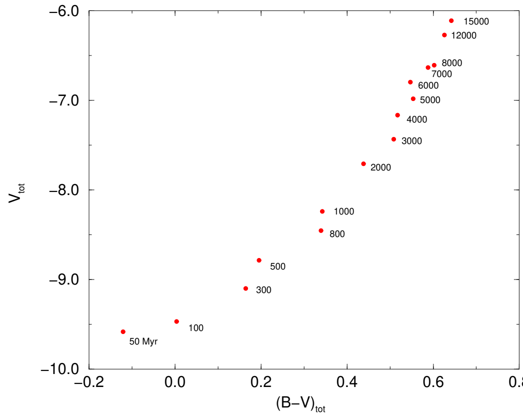

Figura 4.3: *Evoluzione nel tempo teorica nel piano* $(V, B-V)$ *di un ammasso con numero di stelle generate nell'intervallo* $0.6 \div 11\, M_{\odot}$ *fissato a* 30000 *e con composizione chimica* $Z = 0.0002$ *e* $Y = 0.23$. *Le età sono riportate, a fianco dei punti, in* Myr.

Tabella 4.7: *Rapporti massa-luminosità bolometrica (in* $M_{\odot}/L_{\odot}$*) per il modello completo, senza nane, senza le strutture con massa infariore alle* $0.4\, M_{\odot}$ *e alle* $0.6\, M_{\odot}$, *a* $V = -7.35$ *e* $Z = 0.0002$, *per le età indicate.*

	M/L_{bol}			
	completo	senza WD	senza $M < 0.4$	senza $M < 0.6$
$11\, Gyr$	1.57 ± 0.08	1.21 ± 0.07	0.72 ± 0.04	0.58 ± 0.03
$2\, Gyr$	0.49 ± 0.03	0.44 ± 0.03	0.25 ± 0.01	0.20 ± 0.01
$500\, Myr$	0.18 ± 0.02	0.10 ± 0.01	0.10 ± 0.01	0.08 ± 0.01

stelle in evoluzione. Inoltre il colore integrato risulta sempre più rosso, ciò è dovuto al fatto che vengono a mancare sempre più le giganti blu e si sviluppano il ramo delle giganti rosse e il ramo asintotico.

4.2 Calibrazione con le osservazioni

Prima di produrre qualunque risultato è necessario testare la nostra procedura di sintesi. Per farlo cerchiamo di riprodurre non solo i colori integrati ma anche il diagramma colore-magnitudine per ammassi le cui stelle siano risolubili. Naturalmente nella determinazione dei colori integrati il numero di stelle, o meglio la proporzione del numero di stelle nelle varie fasi, è di importanza fondamentale. È quindi ovvio che non si tratta solo di un test di verifica del modello ma anche di un primo tentativo di calibrare i parametri di ingresso (come l'esponente della funzione di massa iniziale s, l'efficienza della perdita di massa η, la dispersione di perdita di massa per stelle di ramo orizzontale σ_η ecc...) e, prima ancora, di una verifica della bontà delle tracce evolutive utilizzate (e quindi, per esempio, della scelta della $mixing-length\ \alpha$). Dato che in seguito presenteremo i risultati per le due morfologie di ramo orizzontale tipiche, abbiamo scelto, tra gli ammassi globulari ricchi di stelle e ben osservati, M68 come esempio di ramo orizzontale intermedio e M30 come rappresentativo di un ramo orizzontale blu. Abbiamo anche cercato di riprodurre il colore dell'ammasso M15 che presenta un ramo orizzontale bimodale. Per tali ammassi il valore dell'arrossamento è sufficientemente basso da non costituire un grosso problema per il fit dell'ammasso, inoltre la metallicità è stimata con buona precisione. Il valore che viene fornito in letteratura in realtà non è la metallicità totale ma l'abbondanza in massa di ferro rispetto a quella dell'idrogeno $[Fe/H]$[1], valore ricavabile spettroscopicamente. La metallicità Z risulta legata a $[Fe/H]$, nel caso di ammassi con proporzione delle abbondanze di metalli di tipo solare, per mezzo della relazione:

$$[Fe/H] = \log Z_0 + 1.75 \tag{4.1}$$

dove Z_0 rappresenta la metallicità calcolata senza il contributo degli elementi α, come O, Ne, Mg, Si, S, Ca; infatti per gli ammassi globulari, che come noto presentano rispetto al Sole un aumento della proporzione di tali elementi, (fenomeno detto α-*enhancement*, vedi Salaris et al., 1993 [115]), la metallicità viene poi corretta per mezzo della relazione:

$$Z = Z_0\ (0.638\, f_\alpha + 0.362) \qquad \text{con} \qquad f_\alpha = 10^{[\alpha/Fe]} \tag{4.2}$$

dove il rapporto $[\alpha/Fe]$ indica proprio l'α-*enhancement* per cui è stato stimato, per gli ammassi globulari galattici a bassa metallicità, un valore $[\alpha/Fe] \simeq 0.3$ (vedi ad esempio Cassisi et al., 1999 [116]). In tabella 4.8 sono riportate, oltre al parametro $(B-R)/(B+V+R)$ e alle fonti della fotometria, il valore di $[Fe/H]$ e di Z ricavato

[1] $[Fe/H] = \log \frac{(Fe/H)}{(Fe/H)_\odot}$

Tabella 4.8: *Tabella riassuntiva delle caratteristiche degli ammassi presi in considerazione, oltre alla metallicità Z, come ricavata da $[Fe/H]$ per mezzo delle equazioni 4.1 e 4.2, è riportato anche il parametro $(B-R)/(B+V+R)$ (i dati provengono dal catalogo di Harris (2003 [117]) e le fonti della fotometria.*

	$[Fe/H]$	Z	DM	$E(B-V)$	$(B-R)/(B+V+R)$	*Fotometria*
M68	-2.06	0.00025	15.19	0.05	0.17	Walker (1994 [118])
M30	-2.12	0.00022	14.62	0.03	0.89	Piotto et al. (2002 [119], [120])
M15	-2.26	0.00016	15.37	0.09	0.67	Piotto et al. (2002)

tramite le formule 4.1 e 4.2. Le stime degli errori per $[Fe/H]$ che si trovano in letteratura variano generalmente da 0.01 a 0.05; per i tre ammassi abbiamo quindi scelto tracce evolutive con $Z = 0.0002$, valore in accordo con quelli ricavati dalle equazioni precedenti se si considerano appunto gli errori con cui l'$[Fe/H]$ viene stimato. L'abbondanza originale di elio, Y, è stata ricavata assumendo abbondanza primordiale pari a $Y_0 = 0.23$ e la relazione $\Delta Y/\Delta Z = 2$ (vedi ad esempio Pagel & Portinari, 1998 [121]) ricavata utilizzando i dati a disposizione per stelle vicine per le quali magnitudine assoluta e temperatura effettiva sono note con buona precisione. Il valore di $\Delta Y/\Delta Z$ resta comunque affetto da una notevole incertezza.

I dati osservativi per i colori integrati che abbiamo utilizzato sono quelli del catalogo di Harris (2003 [117], [122]) da noi disarrossati per mezzo delle relazioni fornite da Reed et al. (1988 [123]):

$$E(U-B)/E(B-V) = 0.941 \pm 0.027 \tag{4.3}$$

$$E(V-R)/E(B-V) = 0.602 \pm 0.012 \tag{4.4}$$

$$E(V-I)/E(B-V) = 1.218 \pm 0.015 \tag{4.5}$$

Utilizzando le isocrone teoriche abbiamo stabilito l'età, il modulo di distanza (DM) e l'arrossamento ($E(B-V)$, vedi Appendice B) degli ammassi presi in considerazione. Per prima cosa, dato che la luminosità del ramo orizzontale è indipendente dall'età, abbiamo ricavato modulo di distanza ed arrossamento dal fit della luminosità di ramo orizzontale. Abbiamo quindi cercato di fittare con le isocrone teoriche la luminosità di Turn-Off (principale indicatore di età) e l'estensione il ramo delle subgiganti, che risulta dipendere particolarmente dall'età (vedi fig. 4.1). Dopodiché abbiamo verificato che, in dipendenza delle trasformazioni di colore, venisse riprodotto il colore del ramo delle giganti rosse. Una volta stabiliti il modulo della distanza, l'arrossamento e l'età dell'ammasso sono stati variati i parametri η (efficienza della perdita di massa) e σ_η (dispersione in η) fino a riprodurre la morfologia del ramo orizzontale. Come discuteremo in seguito, il valore necessario per produrre un ramo orizzontale intermedio risulta essere $\sigma_\eta = 0.08$ che abbiamo verificato corrispondere ad una dispersione in massa $\sigma_M = 0.02$, in accordo con i risultati di altri autori (vedi ad esempio Yi, 2003 [22]). Si noti, inoltre, che la riproduzione della morfologia del ramo orizzontale è assolutamente indipendente dalla stima dell'età e del modulo della distanza e debolmente dipendente da quello dell'arrossamento. A questo punto, utilizzando i valori di età, di perdita di massa ed arrossamento per cui otteniamo il miglior fit dell'ammasso, è possibile calcolare i colori integrati e confrontarli con le osservazioni. Dal punto di vista teorico, come abbiamo visto nel §2.4, l'errore statistico costituisce una fonte importante di incertezza. Inoltre le incertezze sugli input fisici e sulle trasformazioni di colore utilizzate nei modelli costituiscono, come già discusso, fonti di errore sistematico. Il numero di stelle utilizzato per ogni ammasso è stato scelto in modo da riprodurre la magnitudine assoluta nel V indicata nel catalogo di Harris (2003). Questa procedura è chiaramente influenzata da numerose fonti di incertezza. Prima di tutto, ovviamente, l'errore osservativo sul colore integrato, non sempre riportato in letteratura, e l'errore sulla stima dell'arrossamento. Prima di proseguire dobbiamo sottolineare che l'errore fotometrico in funzione della magnitudine non è disponibile quando si osservano ammassi non risolti e quindi non è riportato nelle nostre simulazioni. Vediamo ora più in dettaglio i risultati ottenuti per ognuno degli ammassi presi in considerazione.

4.2.1 Ramo orizzontale intermedio: M68

M68 è un ammasso globulare osservabile nella costellazione dell'Idra e distante circa 10 Kpc da noi. L'ammasso presenta un ramo orizzontale di morfologia intermedia estesa in temperatura. Per prima cosa abbiamo cercato di stabilirne distanza, arrossamento ed età ricavando dalla luminosità di TO e di HB e dall'estensione in temperatura della regione delle subgiganti i valori: $DM \simeq 15.29\,mag$ e $E(B-V) \simeq 0.05\,mag$, $t \simeq 11\,Gyr$, in accordo con i valori presenti in letteratura. La tabella 4.9 mostra i risultati ottenuti con efficienza della perdita di massa $\eta = 0.3$ e dispersione $\sigma_\eta = 0.08$. Tali risultati sono confrontati con i colori integrati osservativi del catalogo di Harris (2003) disarrossati per mezzo delle equazioni 4.3, 4.4 e 4.5. L'errore riportato è puramente statistico ed è calcolato come la deviazione standard dei colori integrati di dieci diversi modelli con stessi parametri iniziali. Per i valori osservativi non è fornita l'incertezza. Come funzione di massa (IMF) abbiamo assunto una Salpeter ($s = 2.35$)

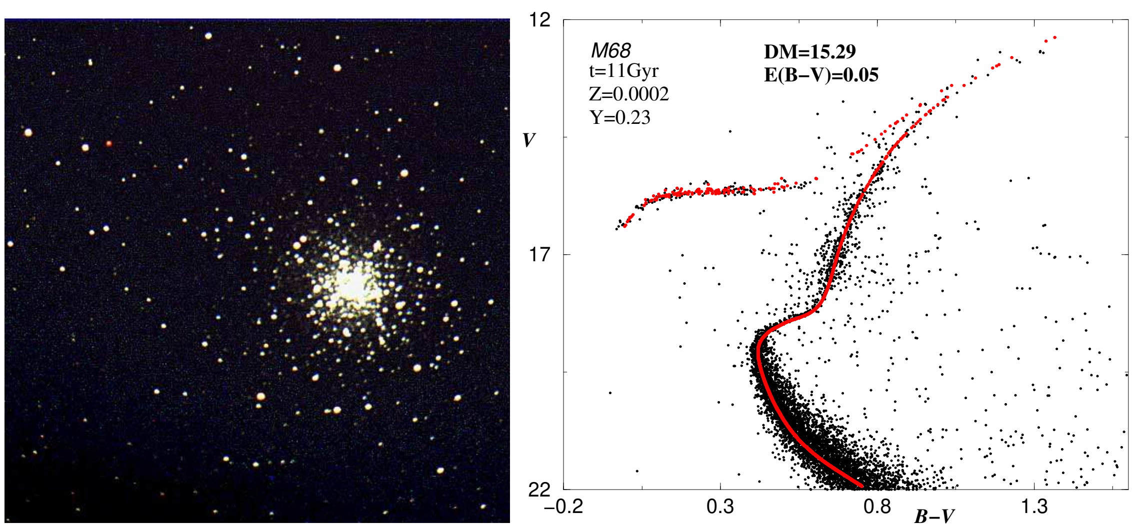

Figura 4.4: *A sinistra è riportata un'immagine dell'ammasso globulare M68 (Osservatorio di Grasslands) e a destra il diagramma colore magnitudine (Walker, 1994 [118]) con il sintetico ottenuto, per età $t = 11\,Gyr$, con efficienza della perdita di massa $\eta = 0.30$ e dispersione $\sigma_\eta = 0.08$.*

al di sopra delle $0.5\,M_\odot$ e $s = 1.3$ al di sotto; prima di procedere ricordiamo che, come visto nel paragrafo precedente, le stelle al di sotto delle $0.6\,M_\odot$ non contribuiscono ai colori integrati e non si hanno variazioni nemmeno togliendole del tutto dal modello; è chiaro quindi che qualunque scelta della funzione di massa in questo intervallo sarà del tutto ininfluente. Inoltre i risultati numerici riportati in tabella 4.10 dimostrano che ogni variazione del coefficiente della funzione di massa per $M \gtrsim 0.5\,M_\odot$ all'interno del range di valori proposti comunemente in letteratura risulta irrilevante ai fini dei colori integrati.

Tabella 4.9: *Valori dei colori integrati per il sintetico con* $Z = 0.0002$, $Y = 0.23$, *età* $t = 11\,Gyr$ *e* V *fissato al valore osservativo di* -7.34. *Per riprodurre l'HB sono stati utilizzati i valori dell'efficienza della perdita di massa* $\eta = 0.3$ *e della dispersione* $\sigma_\eta = 0.08$.

	V	$U-B$	$B-V$	$V-R$	$V-I$	$V-J$	$V-K$
Sintetico	-7.34	0.00	0.60	0.42	0.87	1.47	2.04
errore (±)	0.05	0.02	0.02	0.01	0.02	0.03	0.04
Harris	-7.35	-0.01	0.58	0.43	0.88	–	–

Tabella 4.10: *Colori integrati del modello di età* $t = 11\,Gyr$ *per diversi valori dell'esponente della IMF al di sopra delle* $0.5\,M_\odot$

	V	$U-B$	$B-V$	$V-R$	$V-I$	$V-J$	$V-K$
s=2.00	-7.36	0.01	0.61	0.42	0.88	1.47	2.05
errore (±)	0.04	0.01	0.02	0.01	0.02	0.03	0.04
s=2.15	-7.35	0.00	0.61	0.42	0.87	1.47	2.05
errore (±)	0.06	0.02	0.03	0.01	0.02	0.03	0.04
s=2.45	-7.35	0.00	0.62	0.42	0.88	1.48	2.05
errore (±)	0.08	0.02	0.02	0.01	0.03	0.04	0.06
s=2.6	-7.40	-0.01	0.60	0.42	0.87	1.47	2.03
errore ±	0.05	0.01	0.02	0.01	0.01	0.02	0.03

In figura 4.4 sono riportati il diagramma colore-magnitudine osservativo e quello sintetico ottenuto per l'età $t = 11\,Gyr$ con un'efficienza di perdita di massa $\eta = 0.3$ e una dispersione in η pari a $\sigma_\eta = 0.08$. I colori integrati del sintetico sono in accordo, entro i limiti dell'errore, con quelli osservativi dell'ammasso. Notiamo che l'ammasso presenta due stelle in fase di Post-AGB, molto più luminose dell'HB (Zinn, 1972 [124]) e in genere molto rare a causa dell'alta velocità di evoluzione che caratterizza questa fase (vedi cap.2). Dato che la presenza di tali stelle non può essere riprodotta dal nostro sintetico, abbiamo aggiunto le due stelle in Post-AGB al sintetico per avere una stima del loro contributo al $(B-V)$. Il risultato è un arrossamento di $\sim 0.01\,mag$ che è quindi trascurabile.

4.2.2 Ramo orizzontale blu: M30

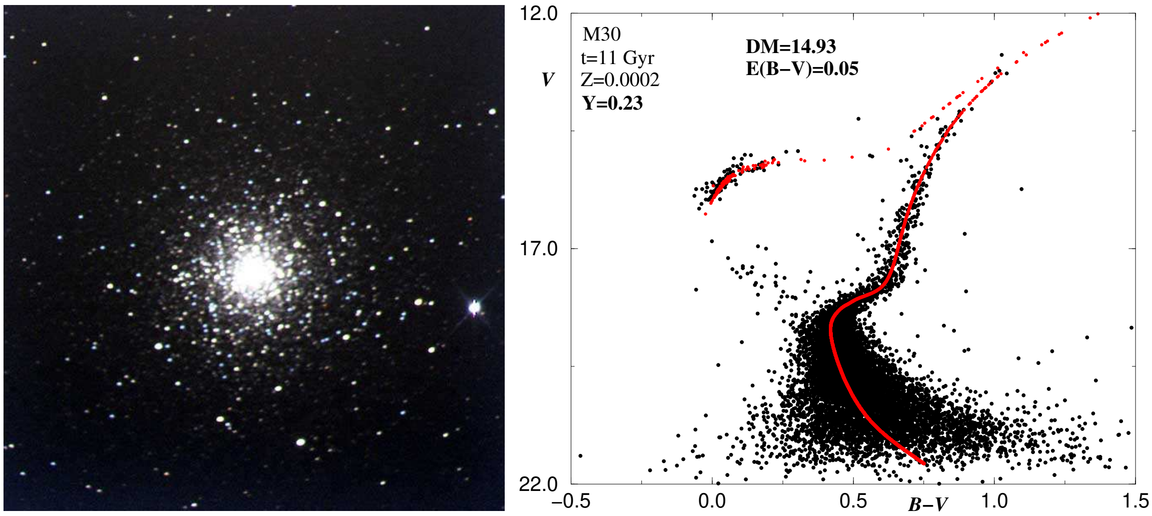

Figura 4.5: *A sinistra è riportata un'immagine di M30 (Osservatorio di Grasslands) e a destra il diagramma colore-magnitudine (Piotto et al. 2002 [119]) con il sintetico prodotto con efficienza della perdita di massa* $\eta = 0.40$ *e dispersione* $\sigma_\eta = 0.02$.

M30 è un piccolo ammasso globulare situato nella costellazione del Capricorno a circa $8\,Kpc$ da noi. Con la stessa procedura descritta per M30 abbiamo ottenuto $DM = 14.93$ e $E(B-V) = 0.05$, $t \simeq 11\,Gyr$, valori in accordo con i risultati di altri autori. La morfologia del ramo orizzontale è stata riprodotta al meglio con i valori $\eta = 0.4$ e $\sigma_\eta = 0.02$. Aumentando l'efficienza della perdita di massa ad $\eta = 0.44$ (vedi fig.4.6) il ramo orizzontale sintetico sembra presentare un'eccessiva quantità di stelle evolute ed un sovrappopolamento della parte più blu del ramo orizzontale. In tabella 4.11 sono riportati i valori medi dei risultati ottenuti su dieci diversi modelli e i relativi errori ottenuti come deviazione standard sia per il modello con $\eta = 0.4$ che per quello con $\eta = 0.44$; inoltre sono riportati, per confronto, i valori del catalogo di Harris (disarrossati). In entrambi i casi i colori del modello sono in buon accordo con

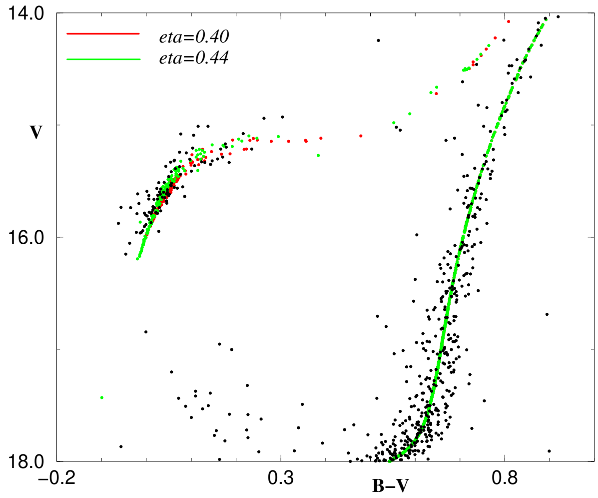

Figura 4.6: *Diagramma* $(V, B-V)$ *del ramo orizzontale di M30 (nero). I punti rossi rappresentano il modello con* $\eta = 0.4$*, sovrapposto (verde) è riportato il modello con* $\eta = 0.44$ *(*$\sigma_\eta = 0.02$*).*

quelli osservativi. Notiamo inoltre che l'aumento dell'efficienza della perdita di massa non provoca nessuna variazione nei colori integrati all'interno degli errori statistici.

Tabella 4.11: *Valori dei colori integrati per il sintetico con composizione chimica* $Z = 0.0002$*,* $Y = 0.23$ *ed età* $11\,Gyr$*, a magnitudine totale* $V = -7.43$*, tale da riprodurre le osservazioni dell'ammasso M30 per due diversi valori dell'efficienza della perdita di massa* η*.*

	η	V	$U-B$	$B-V$	$V-R$	$V-I$	$V-J$	$V-K$
Sintetico	0.40	−7.43	−0.01	0.59	0.41	0.87	1.46	2.04
errore (±)	–	0.05	0.01	0.02	0.01	0.02	0.02	0.03
Sintetico	0.44	−7.43	−0.02	0.59	0.42	0.87	1.47	2.05
errore (±)	–	0.05	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.03
Harris	–	−7.43	−0.02	0.55	0.38	0.80	–	–
errore (±)	–	–	0.02	0.04	0.02	0.04	–	–

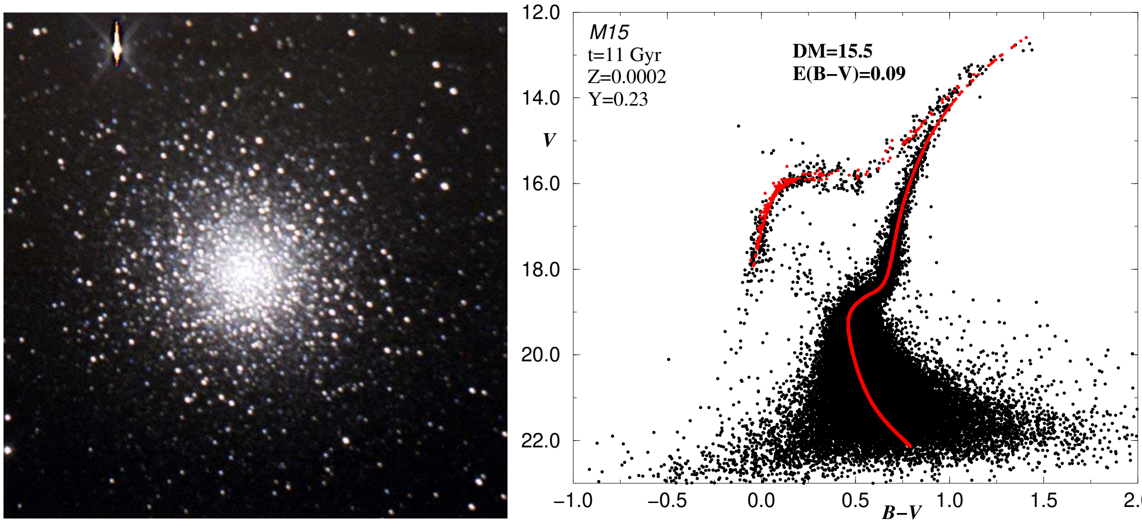

Figura 4.7: *A sinistra è riportata un'immagine di M15 (osservatorio di Grasslands) e a destra il diagramma colore-magnitudine (Piotto et al., 2002 [119]) con il sintetico ottenuto con efficienza della perdita di massa* $\eta = 0.44$ *e dispersione* $\sigma_\eta = 0.10$.

4.2.3 Ramo orizzontale bimodale: M15

L'ammasso M15 è un ammasso molto denso e luminoso che si trova nella costellazione di Pegaso a circa $10\,Kpc$ da noi. Al suo interno si trovano più di 100 stelle variabili e una nebulosa planetaria. Come nel caso precedente abbiamo ricavato età, arrossamento e modulo della distanza per mezzo del fit del TO, del ramo delle subgiganti e del ramo orizzontale. I valori ottenuti sono $t = 11\,Gyr$, $DM = 15.5$ e $E(B-V) = 0.09$, tali valori risultano in buon accordo con quelli presenti in letteratura.

Questo ammasso presenta un ramo orizzontale bimodale ovvero composto da due parti distinte: una "coda" blu, molto estesa, e la parte intermedia. L'origine della separazione tra queste due parti ($V \simeq 16.1$ e $(B-V) \simeq 0.1$, il cosiddetto *"gap"*) non è ancora stata spiegata esaurientemente. Come abbiamo precedentemente descritto (vedi §1.2) la posizione delle stelle in HB dipende da diversi fattori tra cui la composizione chimica e la perdita di massa in fase di gigante rossa; la distribuzione bimodale di uno di questi fattori potrebbe quindi essere la causa della bimodalità del ramo orizzontale di M15 (vedi ad esempio Durrell & Harris, 1992 [125]). Per riprodurre sia l'estesa parte blu del ramo che la morfologia a temperature basse, abbiamo dovuto utilizzare un'efficienza della perdita di massa ed una dispersione in η relativamente alte ($\eta = 0.44$ e $\sigma_\eta = 0.1$). Si nota che nella parte più rossa del ramo orizzontale è presente un raggruppamento di stelle a luminosità minore della luminosità media dell'HB; dato che l'andamento della ZAHB in questa zona è piuttosto costante in luminosità, queste stelle sono probabilmente stelle di campo e quindi non appartenenti all'ammasso; infatti la ZAHB corrisponde all'inviluppo inferiore del ramo orizzontale e quindi non è possibile che stelle in fase di combustione di elio si trovino a luminosità inferiori.

In tabella 4.12 sono riportati i colori integrati ottenuti. I colori nel blu sembrano essere in accordo con quelli riportati dal catalogo di Harris mentre il $(V-I)$ differisce di $\sim 0.1\,mag$ che comunque non risulta essere una grande discrepanza soprattutto se si tiene conto del fatto che la fotometria di M15 non è molto buona, a differenza di quella degli ammassi precedenti, e che l'arrossamento è alto.

In conclusione i colori integrati da noi ottenuti con modelli che riproducono al meglio i diagrammi colore-magnitudine dei tre ammassi sono in buon accordo con i dati osservativi, cosa che ci rende confidenti nella bontà del nostro codice sintetico.

Tabella 4.12: *Valori dei colori integrati per il sintetico con composizione chimica $Z = 0.0002$, $Y = 0.23$ ed età $11\,Gyr$ e $V = -9.17$ tale da riprodurre le osservazioni dell'ammasso M15, i valori assunti per l'efficienza della perdita di massa e la sua dispersione sono $\eta = 0.44$ e $\sigma_\eta = 0.1$.*

	V	$U-B$	$B-V$	$V-R$	$V-I$	$V-J$	$V-K$
Sintetico	−9.17	−0.01	0.60	0.42	0.88	1.48	2.06
errore (±)	0.05	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.03
Harris	−9.17	−0.02	0.59	–	0.74	–	–

4.2.4 La Grande Nube di Magellano

La Grande Nube di Magellano (*Large Magellanic Cloud, LMC*) e la Piccola Nube di Magellano (*Small Magellanic Cloud, SMC*) sono due galassie satellite della Via Lattea situate nell'emisfero celeste australe e prendono il nome da Ferdinando Mag-

Figura 4.8: *Immagine della Grande Nube di Magellano (Anglo-Australian Observatory/Royal Observatory, Edimburgo).*

ellano che le osservò per la prima volta. Entrambe le galassie contengono migliaia di ammassi e numerose stelle Cefeidi, fondamentali per la determinazione delle distanze. L'importanza delle Nubi di Magellano risiede nel fatto che, come la nostra Galassia, possiedono ammassi stellari di tutte le età ma i loro ammassi più giovani, oltre ad essere numerosi, contengono un alto numero di stelle a volte paragonabile a quello degli ammassi globulari nella nostra Galassia. In quest'ultimo test del nostro codice abbiamo fatto uso dei dati di Bica et al. (1996 [126]) che riportano i colori integrati di 504 ammassi e 120 associazioni stellari appartenenti alla Grande Nube di Magellano. In questo modo possiamo testare i nostri risultati su un ampio range di età, anche se in maniera molto meno precisa di quanto abbiamo fatto per gli ammassi globulari. Infatti la maggiore distanza delle nubi non ci permette di avere diagrammi colore-magnitudine così buoni da poter ripetere l'analisi fatta per gli ammassi globulari. Per gli ammassi giovani sono presenti ulteriori incertezze dovute alla mancanza di informazioni sulla percentuale di binarie e alla presenza o meno di *overshooting*. Abbiamo quindi controllato la riproducibilità di un diagramma a due colori $(U-B)/(B-V)$ osservativo. I dati osservativi sono riportati, in rosa, in figura 4.9. Ogni punto rappresenta un ammasso e gli ammassi coprono un ampio range in metallicità ed età.

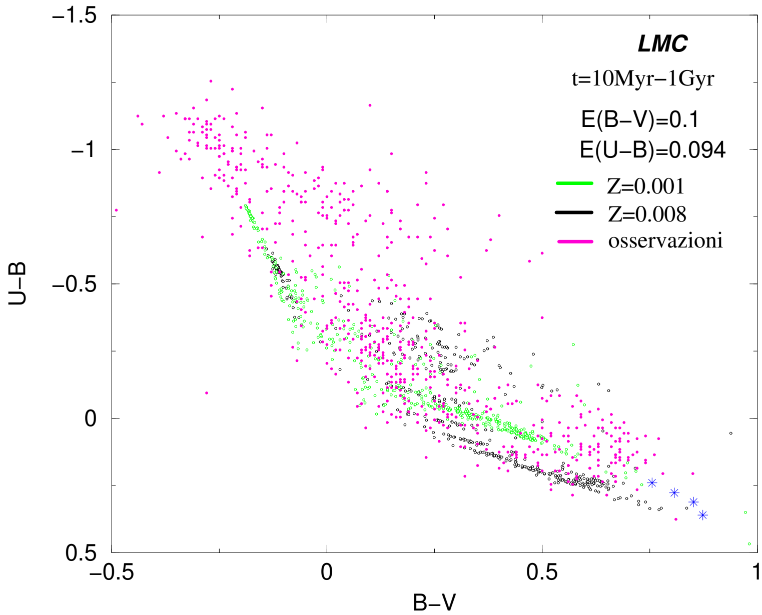

Figura 4.9: *Diagramma a due colori per la Grande Nube di Magellano. In nero e verde sono riportati i colori integrati dei modelli calcolati per età e metallicità riportate in figura. Gli asterischi blu indicano i valori medi su dieci modelli ottenuti per* 2 *,* 3 *,* 4 *e* $5\,Gyr$ *(in ordine crescente di* $B-V$*). I dati osservativi (rosa) sono di Bica et al. (1996 [126]).*

A questo scopo abbiamo calcolato modelli variando l'età da $10\,Myr$ a $5\,Gyr$ e a due diverse metallicità $Z = 0.001$ e $Z = 0.008$, che dovrebbero riprodurre il range coperto dalla maggior parte degli ammassi. I valori della metallicità da noi scelti sono, nel caso delle Nubi, plausibili in tutto il range di età considerato. Fissata l'età e la metallicità il numero di stelle è stato variato in modo da ottenere $V = -8, -6$ e -4 così da tener conto almeno parzialmente del diverso numero di stelle di cui sono popolati gli ammassi delle nubi. Inoltre, per considerare gli effetti dovuti alla stocasticità della funzione di massa, sono state effettuate 10 simulazioni per ogni modello (ovvero per ogni set di parametri di ingresso) e, a differenza del test sugli ammassi globulari, i valori ottenuti per età $t \lesssim 1\,Gyr$ sono stati riportati tutti sul diagramma per simulare la dispersione. Per poter confrontare i nostri risultati con i dati osservativi è necessario correggere quest'ultimi dall'effetto di arrossamento sia nell'$(U-B)$ che nel $(B-V)$. L'arrossamento $E(B-V)$ delle Nubi è dovuto a due distinti contributi, l'arrossamento galattico o di fondo e l'arrossamento intrinseco delle Nubi. In letteratura vengono riportati diversi valori per l'arrossamento, spesso però solo per quello di fondo (vedi ad esempio Schlegel, Finkbeiner & Davis, 1998 [127]). Oestreicher & Schmidt-Kaler (1995 [128]) hanno trattato anche l'arrossamento intrinseco di LMC trovando un valore massimo $E(B-V) = 0.29\,mag$ e mostrando che, in generale, l'arrossamento è maggiore per le stelle situate nella barra della spirale. In definitiva è difficile calcolare l'arrossamento per le Nubi di Magellano e quello che si fa generalmente è calcolare l'arrossamento, di fondo ed intrinseco per molti ammassi e fare una media. Walker (1999 [129]) stima come valore medio per la Grande Nube $E(B-V) \sim 0.10\,mag$; per confrontare il diagramma a due colori dei nostri modelli con quello osservativo abbiamo assunto questo valore e ricavato l'arrossamento nell'$(U-B)$, per mezzo dell'eq. (4.3), ottenendo $E(U-B) = 0.094$. I valori per età maggiori sono stati calcolati per $Z = 0.008$ ed è stato riportato solo il valore medio indicato con gli asterischi blu. È evidente dal diagramma che l'inviluppo inferiore della distribuzione è sufficientemente riprodotto dai modelli con $Z = 0.001$ ed età inferiore ad $1\,Gyr$ e che, in generale, la maggioranza degli ammassi del campione sembrerebbero avere un'età inferiore ad $1\,Gyr$.

Si nota inoltre come i modelli rientrino nella zona occupata dai dati osservativi ricoprendola per la maggior parte. È importante comunque ricordare che, soprattutto per età basse, le fluttuazioni statistiche sono più grandi di quelle che si possono ricavare da 10 *run* effettuati con gli stessi parametri (vedi §2.4). La parte superiore del diagramma, non riprodotta dalle nostre simulazioni corrisponde proprio alle popolazioni con età inferiore ai $10\,Myr$. Si nota inoltre che per età molto basse le simulazioni sembrano tendere all'inviluppo inferiore dei dati osservativi, soprattutto nella zona superiore (valori bassi di $(U-B)$). Il fatto che per valori bassi di $(U-B)$, popolati soprattutto da modelli molto giovani, la dispersione dovuta alle fluttuazioni dell'IMF abbia una direzione preferenziale nel diagramma $(U-B)/(B-V)$ è in accordo con i risultati dei lavori già presenti in letteratura ai quali si rimanda per un ulteriore approfondimento (Girardi et al.,1995 [130]).

Capitolo 5

Risultati per ammassi di Popolazione II

5.1 Introduzione

In questo capitolo presentiamo l'andamento in funzione del tempo dei colori integrati e dei rapporti M/L, nelle varie bande fotometriche, di modelli con metallicità $Z = 0.0002$, tipica di ammassi di Popolazione II. I valori che riportiamo per ciascun modello sono i valori medi dei risultati ottenuti su 10 estrazioni del nostro codice con semi diversi e l'errore è stato calcolato come la deviazione standard. Una tale stima dell'errore tiene conto solo delle fluttuazioni statistiche dovute alla stocasticità della funzione di massa iniziale e non di tutte le incertezze legate alla fisica utilizzata (vedi cap.2); per questo motivo gli errori riportati devono essere letti come un limite inferiore dell'incertezza reale. Dobbiamo inoltre considerare il fatto che una stima più precisa dell'errore statistico richiederebbe un maggior numero di prove (soprattutto per ammassi molto giovani); mediando su dieci modelli l'errore statistico stesso potrebbe essere soggetto a fluttuazioni, anche se costituisce comunque un'utilissima indicazione.

I nostri modelli sono stati ottenuti variando il numero di stelle in modo da mantenere costante, all'interno dell'errore stimato, la magnitudine totale nel V. Tale scelta è dettata dalla necessità di rendere confrontabili i risultati con i dati osservativi, dato che la magnitudine visuale assoluta costituisce la maggior osservabile per ammassi stellari non risolti.

Analizzeremo inoltre la dipendenza sia dei colori integrati che delle relazioni M/L dalla scelta della IMF e dell'efficienza di perdita di massa in fase di gigante rossa (η). Abbiamo quindi variato singolarmente i vari parametri in intervalli di valori plausibili. Inoltre abbiamo studiato la dipendenza dall'età dell'ammasso e dall'efficienza della perdita di massa del rapporto del numero di stelle in fase di combustione di elio rispetto a quello in fase di gigante rossa, che è anch'esso una buona osservabile in numerosi ammassi risolti.

Definiamo ora le caratteristiche del modello di riferimento:

- $Z = 0.0002$
- Coefficiente della IMF: $s = 1.3$ per $M < 0.5\,M_{\odot}$ e $s = 2.35$ per $M > 0.5\,M_{\odot}$
- Efficienza della perdita di massa $\eta = 0.3$, dispersione $\sigma_{\eta} = 0.08$ (vedi cap.4)

Prima di studiare gli effetti dovuti alle variazioni della IMF e della morfologia del ramo orizzontale abbiamo indagato l'influenza di una diversa scelta della magnitudine visuale assoluta, questo perché, ovviamente, gli ammassi della nostra Galassia presentano una variabilità nel valore del numero di stelle che li compongono (e quindi della magnitudine visuale assoluta) e ci si attende che questo valga anche in galassie esterne. Tuttavia, mentre nella nostra Galassia gli ammassi più giovani ($t \lesssim 8\,Gyr$) sono anche quelli meno ricchi di stelle, non è possibile stabilire una relazione di questo tipo, per esempio, per le Nubi di Magellano che presentano anche ammassi molto giovani ($t \lesssim 1\,Gyr$) ma con un numero di stelle confrontabile con quello degli ammassi globulari della Galassia. Fissati quindi i parametri iniziali del modello standard, abbiamo calcolato modelli sintetici a $V = -4$ e $V = -8$ che sono rispettivamente valori riscontrabili negli ammassi aperti e valori tipici degli ammassi globulari nella Galassia. In figura 5.2 e nelle tabelle A.1 e A.2 sono riportati i risultati ottenuti nei filtri U, B, V (Johnson) e R, I, J e K (Cousins) che sono i filtri generalmente usati nelle osservazioni. Le differenze tra i valori medi nei due casi non risultano apprezzabili e rientrano, tranne qualche sporadico caso, nell'errore statistico. Ciò che differisce maggiormente tra il modello a $V = -4$ e quello a $V = -8$ è l'ampiezza degli errori statistici. Un tale aumento era del tutto prevedibile (vedi anche §2.4) proprio perché, nel modello a $V = -4$, il numero di stelle per ammasso risulta molto minore. L'errore statistico stimato nei modelli a $V = -4$ è tale da rendere difficile l'interpretazione dei risultati, per questo motivo in seguito adotteremo il modello a $V = -8$.

In entrambi i modelli, inoltre, l'errore tende ad aumentare man mano che diminuisce l'età. Nel nostro caso, dato che il numero di stelle è stato variato per mantenere costante la luminosità totale, la crescita delle fluttuazioni statistiche col diminuire dell'età è dovuta sia alla diminuzione del numero di stelle sia al fatto che le stelle che popolano l'ammasso sono molto luminose e in fasi evolutive rapide (vedi §2.4). Questo andamento dell'errore è invertito per età minori di $70\,Myr$, infatti per stelle sopra una certa massa il numero di pulsi termici diminuisce sensibilmente. Ricordiamo che, come abbiamo visto nel §2.2, per età $t \lesssim 1\,Gyr$ si aggiunge anche l'incertezza dovuta alla presenza o meno di *overshooting*. Inoltre gli errori statistici, essendo causati, per età $t \lesssim 1\,Gyr$, soprattutto da stelle in fase di AGB e RGB, sono maggiori nei colori infrarossi.

In figura 5.1 riportiamo il diagramma colore-magnitudine a tre diverse età: $70\,Myr$, $2\,Gyr$ e $10\,Gyr$. Per età $t = 70\,Myr$ le stelle più luminose sono quelle che popolano la parte superiore della sequenza principale che è molto calda; al passare del tempo queste stelle evolvono in supernovae ed escono dal diagramma colore-magnitudine. Per età $t \simeq 1\,Gyr$ cominciano ad apparire in fase di gigante rossa le prime strutture che presentano il nucleo di elio parzialmente degenere ($\sim 2.5\,M_\odot$), i tempi di vita di questa fase cominciano ad allungarsi ed inizia quindi a svilupparsi il ramo delle giganti rosse. Quasi contemporaneamente inizia a svilupparsi anche il ramo asintotico. Come si vede dalla figura 5.1 all'età di $2\,Gyr$, quando il ramo delle giganti si è già formato, la fase di combustione centrale di elio non è ancora influenzata dalle perdite di massa in RGB e le stelle in combustione di He sono riunite nel *clump*. Per età $t \simeq 8\,Gyr$ la perdita di massa delle strutture in RGB comincia ad essere sufficientemente grande da causare lo sviluppo del ramo orizzontale con conseguente estensione nel blu.

Vediamo ora come tali variazioni nella disposizione delle strutture sul diagramma colore-magnitudine influenzino i colori integrati (vedi figura 5.2). Per prima cosa

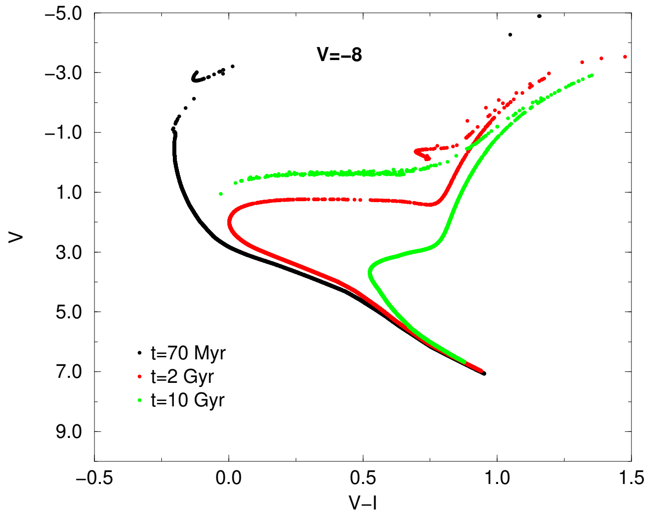

Figura 5.1: *Diagramma colore-magnitudine del modello standard, a* $V = -8$*, per tre diverse età:* $t = 70\,Myr$*,* $2\,Gyr$ *e* $10\,Gyr$*.*

notiamo che all'aumentare dell'età il colore $(U-B)$ aumenta variando di $\sim 0.6\,mag$ tra $50\,Myr$ e $\sim 1\,Gyr$; questo è dovuto in primo luogo alla scomparsa delle stelle più luminose della sequenza principale superiore, infatti l'effetto delle giganti rosse, per età $t \gtrsim 1\,Gyr$, risulta, all'interno degli errori stimati, del tutto trascurabile e il colore $(U-B)$ presenta un andamento indipendente dall'età. Nella prima parte dell'evoluzione il $(B-V)$ varia approssimativamente come l'$(U-B)$, successivamente però, per età $t \gtrsim 1\,Gyr$, continua ad arrossarsi a causa della maggior sensibilità alle stelle fredde. La maggiore pendenza dell'andamento ad età inferiori a circa $1\,Gyr$ è riscontrabile anche nei colori infrarossi, soprattutto nel $(V-J)$ e nel $(V-K)$, infatti, ricordando che la luminosità nel V è mantenuta costante, quella nei filtri J e K, fortemente influenzati dalle stelle fredde, aumenta in misura maggiore rispetto alla luminosità nelle bande R e I (vedi anche tabelle 4.3, §4.1).

Nelle figure 5.3 e 5.4 sono riportati gli andamenti temporali dei rapporti M/L nelle varie bande fotometriche per il modello standard a $V = -4$ (rosso) e quello a $V = -8$ (nero). Anche in questo caso i modelli a $V = -4$ presentano errori statistici maggiori rispetto a quelli a $V = -8$ e i valori medi variano entro gli errori stimati (vedi anche tabelle A.3 e A.4). Innanzitutto precisiamo che la massa totale di cui

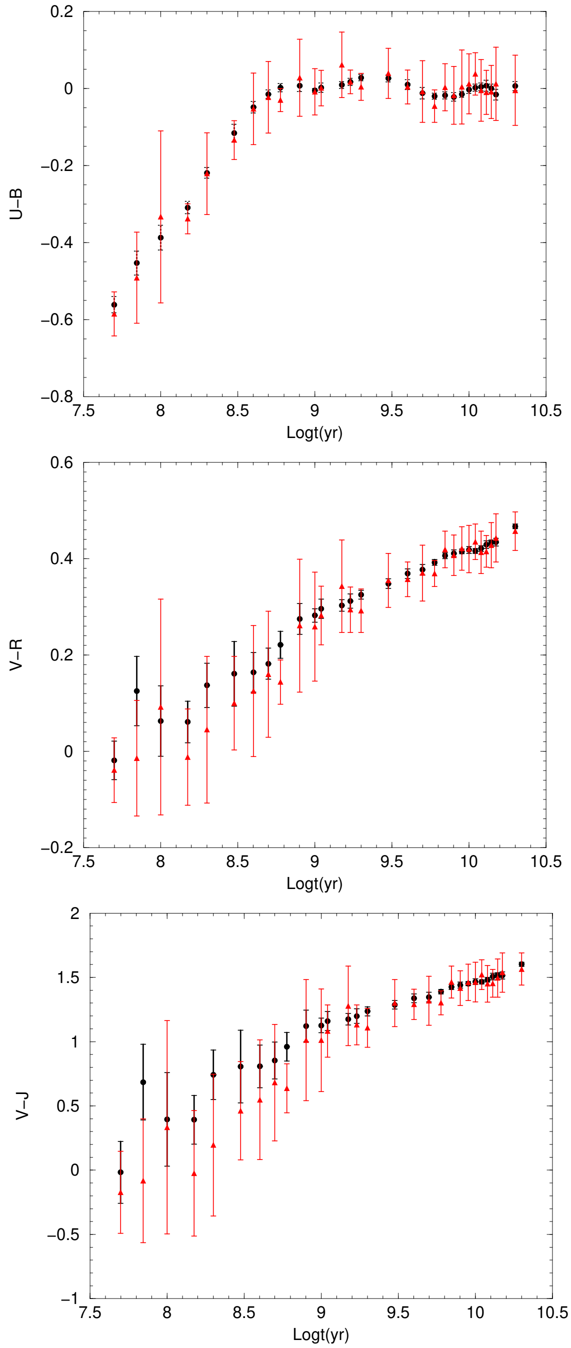

Figura 5.2: *Andamento nel tempo dei colori integrati per il nostro modello standard (vedi testo) a magnitudine totale costante* $V = -8$ *(nero) e* $V = -4$ *(rosso). Vedi anche tabelle A.1 e A.2.*

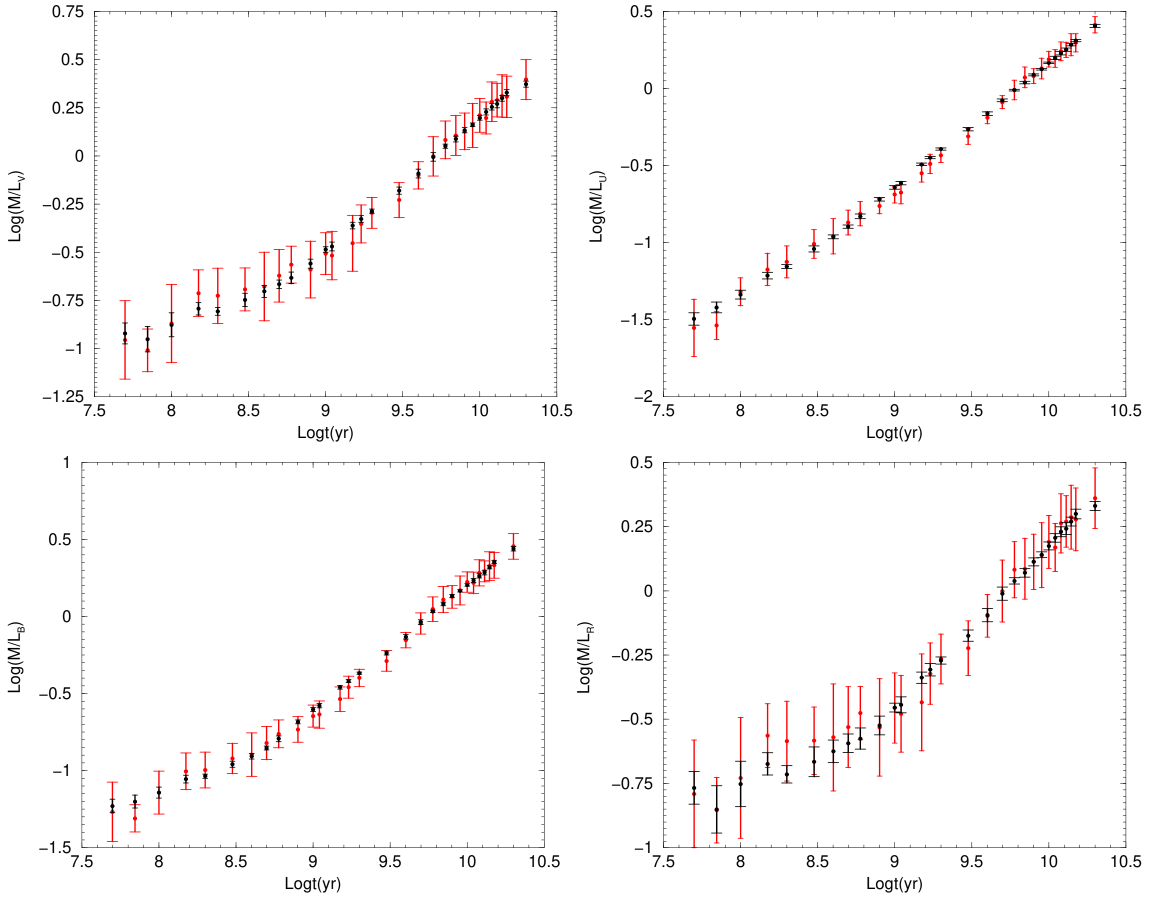

Figura 5.3: *Andamento temporale dei rapporti M/L, nelle bande fotometriche indicate, del modello standard nel caso in cui la magnitudine totale sia mantenuta costante a $V = -8$ (in nero) e $V = -4$ (in rosso). Vedi anche tabelle A.3 e A.4.*

parliamo è quella luminosa e quindi comprende anche la massa delle nane bianche e quella delle stelle di massa molto piccola. Queste stelle, come abbiamo ampiamente discusso nel §4.1, non contribuiscono alla luminosità totale ma il loro contributo in massa non può essere trascurato (vedi anche figura 4.2). Per comprendere l'andamento del rapporto M/L nelle varie bande fotometriche, occorre innanzitutto analizzare l'andamento della massa totale luminosa dell'ammasso in funzione dell'età (vedi figura 5.4). Tale andamento è dovuto al fatto che al crescere dell'età le strutture che popolano il diagramma presentano masse sempre più piccole e che la luminosità di una singola

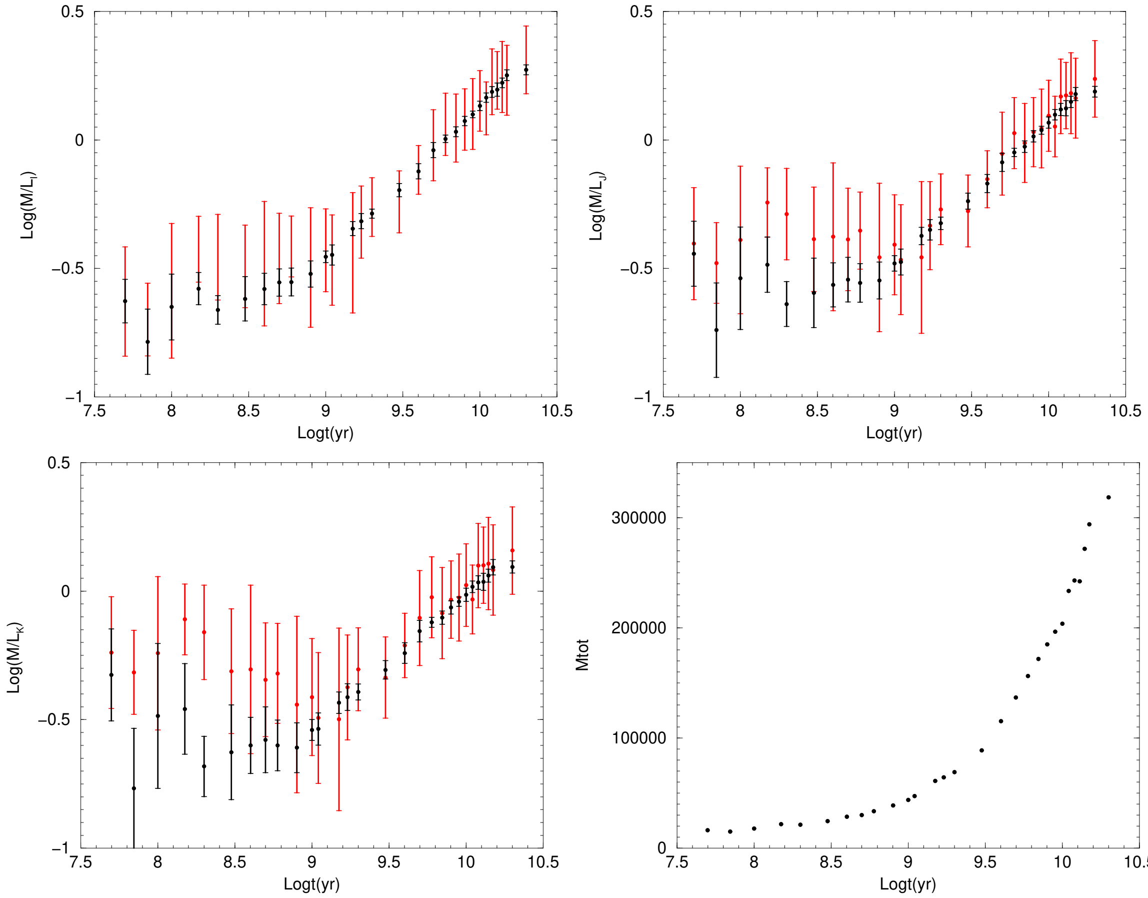

Figura 5.4: *Andamento temporale dei rapporti M/L, nelle bande fotometriche indicate, del modello standard nel caso in cui la magnitudine totale sia mantenuta costante a $V = -8$ (in nero) e $V = -4$ (in rosso). Nell'ultimo riquadro è riportato l'andamento temporale della massa luminosa totale per $V = -8$. Vedi anche tabelle A.3 e A.4.*

stella è legata alla massa da una relazione del tipo:

$$L \sim M^{\alpha} \qquad \alpha \simeq 3 \div 4 \tag{5.1}$$

Quindi per ottenere la stessa magnitudine visuale dell'ammasso, man mano che la massa delle strutture che lo popolano diminuisce, è necessario aumentare la massa totale. Inoltre all'aumentare dell'età aumenta il numero di nane bianche presenti sia perché, come è ovvio, un numero sempre maggiore di stelle è entrato nella sequenza di raffreddamento, sia perché queste stelle hanno bassa luminosità (vedi §4.1) e, dovendo aumentare per quanto detto il numero di stelle che contribuiscono alla luminosità totale, il loro numero aumenta in proporzione come stabilito dalla IMF. Per lo stesso motivo aumenta anche il numero di stelle, poco luminose, di $M < 0.5\,M_{\odot}$.

Dato che abbiamo fissato, per i nostri modelli, la magnitudine nel V, l'andamento del rapporto M/L_V rispecchia semplicemente l'andamento della massa totale. Nelle altre bande fotometriche invece è possibile osservare come le strutture di diversa temperatura e massa popolino il diagramma HR. Per prima cosa notiamo che in tutte le bande fotometriche l'andamento del logaritmo del rapporto massa su luminosità è, per età $t \gtrsim 1\,Gyr$, piuttosto lineare. Dato che la stessa cosa accade nel V possiamo concludere che sia la massa totale a dominare le variazioni dei rapporti M/L. Per $t \lesssim 1\,Gyr$ l'andamento sembra essere più piatto man mano che ci spostiamo nell'infrarosso e questo è dovuto al fatto che, come per i colori integrati, mentre la luminosità nelle bande U e B diminuisce a causa dell'estinzione della sequenza principale superiore, i flussi nell'infrarosso aumentano per la presenza dell'AGB. Notiamo che (tabella 4.3) mentre il flusso nelle bande infrarosse aumenta piuttosto costantemente, la diminuzione del flusso nelle bande U e B è maggiore da $500\,Myr$ a $2\,Gyr$ rispetto a quella che si ha da $2\,Gyr$ a $11\,Gyr$.

Influenza sui risultati della funzione iniziale di massa

Abbiamo già visto come le stelle di massa piccolissima non influenzino la luminosità totale e quindi i colori integrati, il loro contributo alla massa totale è comunque tale da rendere necessario lo studio degli effetti di una variazione della funzione di massa nei limiti proposti in letteratura. Prima di continuare ricordiamo che l'evoluzione dinamica di un ammasso può portare a variazioni della distribuzione di massa; in particolare ci riferiamo alla perdita, da parte dell'ammasso, di una frazione delle stelle di massa più piccola che raggiungono la velocità di fuga dell'ammasso. L'effetto di tale processo può quindi essere visto come un appiattimento, per valori bassi della massa, della IMF. Non è comunque nell'interesse di questa tesi affrontare tale problema.

La funzione di massa da noi scelta è quella di Kroupa (2002 [13]), vedi equazione (2.7), con $s = 1.3$ per $M < 0.5\,M_{\odot}$ e $s = 2.35$ per masse maggiori. Abbiamo quindi variato separatamente l'esponente nei due intervalli portandolo agli estremi dei valori proposti da Kroupa (2002). Nelle figure 5.5 e 5.6 (tabelle A.5 e A.6) sono riportati i valori ottenuti per variazioni dell'esponente per $M < 0.5\,M_\odot$ con $s = 0.8$ (rosso) e $s = 1.8$ (verde). Come ci aspettavamo la diminuzione dell'esponente comporta una diminuzione del numero di stelle con massa $M < 0.5\,M_\odot$ e quindi della massa generata in questo intervallo (ricordiamo ancora una volta che le luminosità non sono invece influenzate da tali variazioni). Di conseguenza i rapporti M/L diminuiscono; l'opposto accade aumentando l'esponente. L'effetto però è meno evidente per piccole età a causa dell'aumento degli errori.

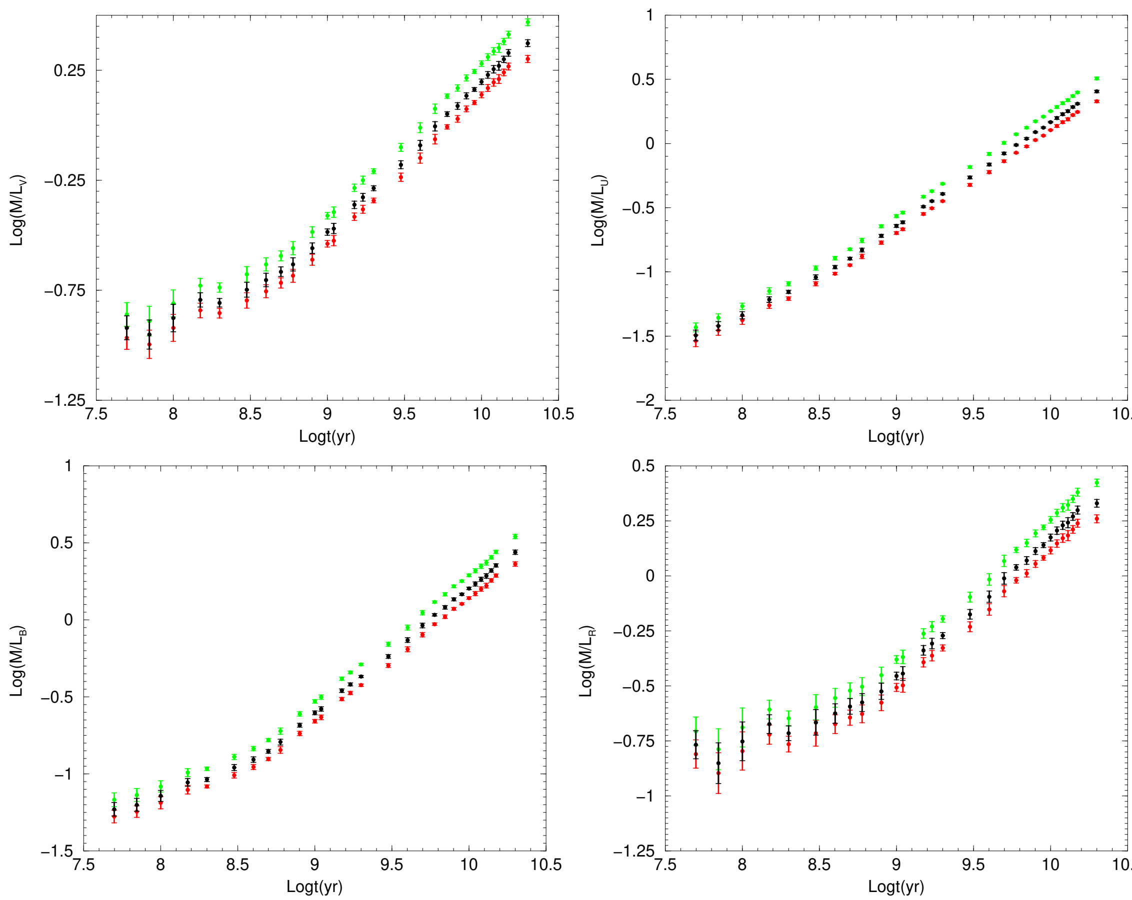

Figura 5.5: *Andamento temporale dei rapporti M/L, nelle bande fotometriche indicate, del modello standard, a $V = -8$, e dei modelli con stessi parametri ma esponente della IMF per $M < 0.5\,M_\odot$ posto pari a $s = 0.8$ (rosso) e a $s = 1.8$ (verde). Vedi anche tabelle A.5 e A.6.*

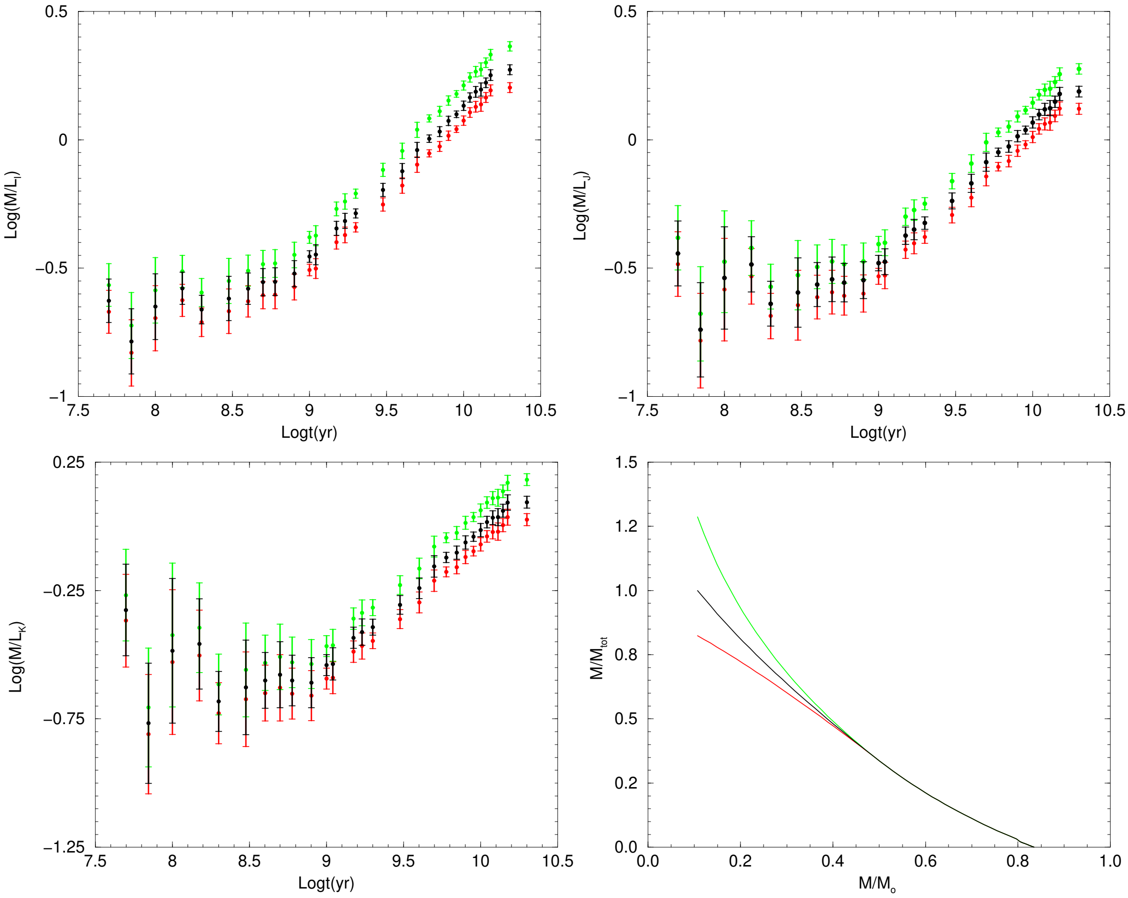

Figura 5.6: *Come in figura 5.5. Nell'ultimo riquadro sono riportate le curve cumulative, normalizzate rispetto alla massa totale del modello standard, relative all'età* $t = 11\,Gyr$ *e per i tre diversi valori del coefficiente dell'IMF sotto le* $0.5\,M_\odot$*, il rosso corrisponde ai modelli con* $s = 0.8$ *e il verde a quelli con* $s = 1.8$*. Vedi anche tabelle A.5 e A.6.*

Vediamo ora gli effetti della variazione dell'esponente per $M > 0.5\,M_\odot$ entro gli intervalli indicati come estremi da Kroupa. In figura 5.7 sono riportati, al variare del tempo, i colori integrati ottenuti con $s = 2.00$ (verde) e con $s = 2.6$ (rosso, vedi anche tabelle A.7 e A.8). Le variazioni sono tutte all'interno degli errori stimati. Questo risultato non è in contrasto con quello di Yi (2002 [22]) che otteneva variazioni massime di $0.05\,mag$ variando s nell'intervallo $1.35 \div 3.35$, quindi più ampio del nostro; una tale variazione infatti è comunque inferiore all'errore statistico da noi stimato.

In conclusione, quindi, i colori integrati non dipendono da variazioni dell'esponente

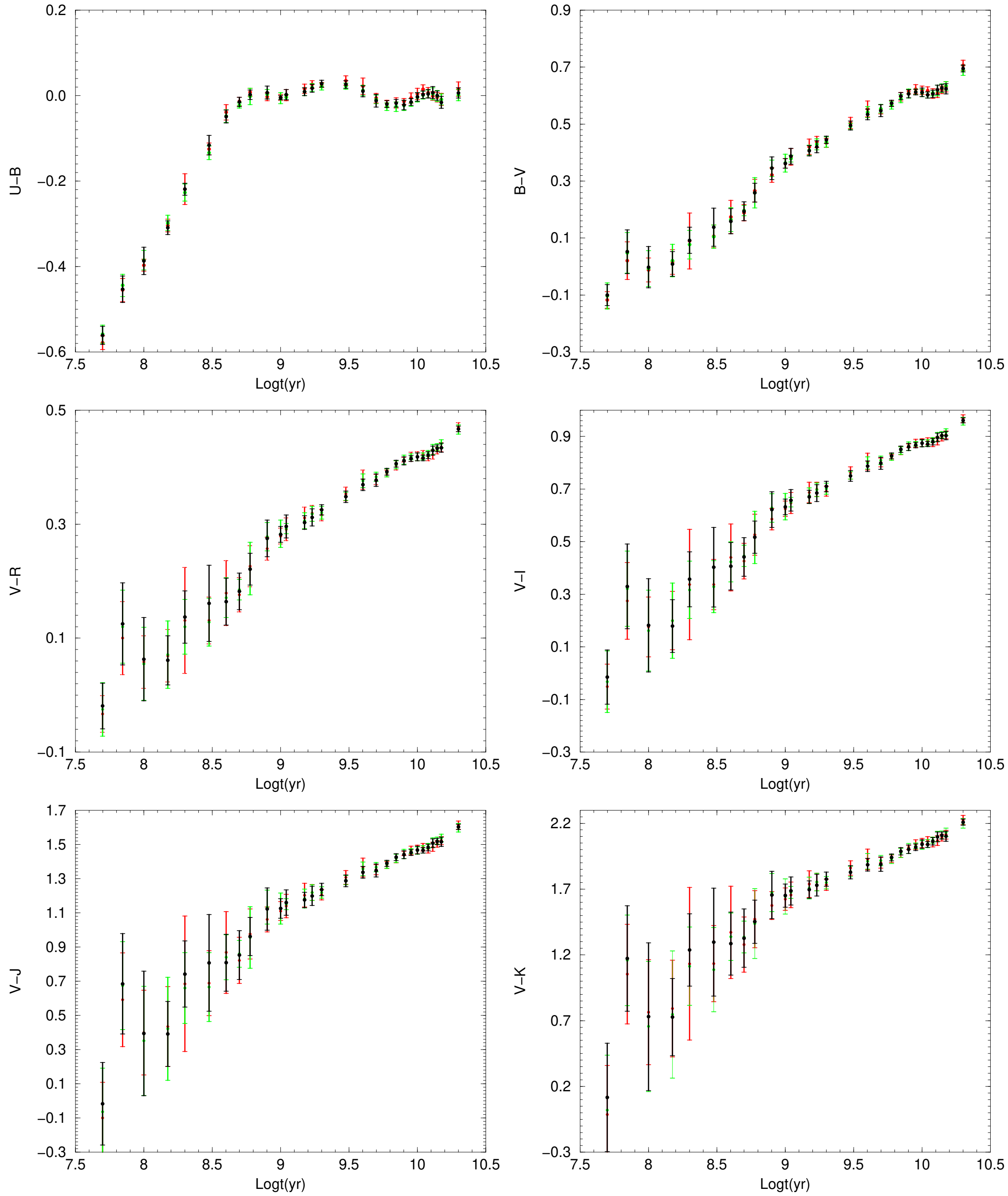

Figura 5.7: *Andamento dei colori integrati del modello standard (nero) a* $V = -8$ *e dei modelli con stessi parametri ma esponente dell'IMF a* $M > 0.5\,M_{\odot}$ *posto pari a* $s = 2.0$ *(rosso) e a* $s = 2.6$ *(verde). Vedi anche tabelle A.7 e A.8.*

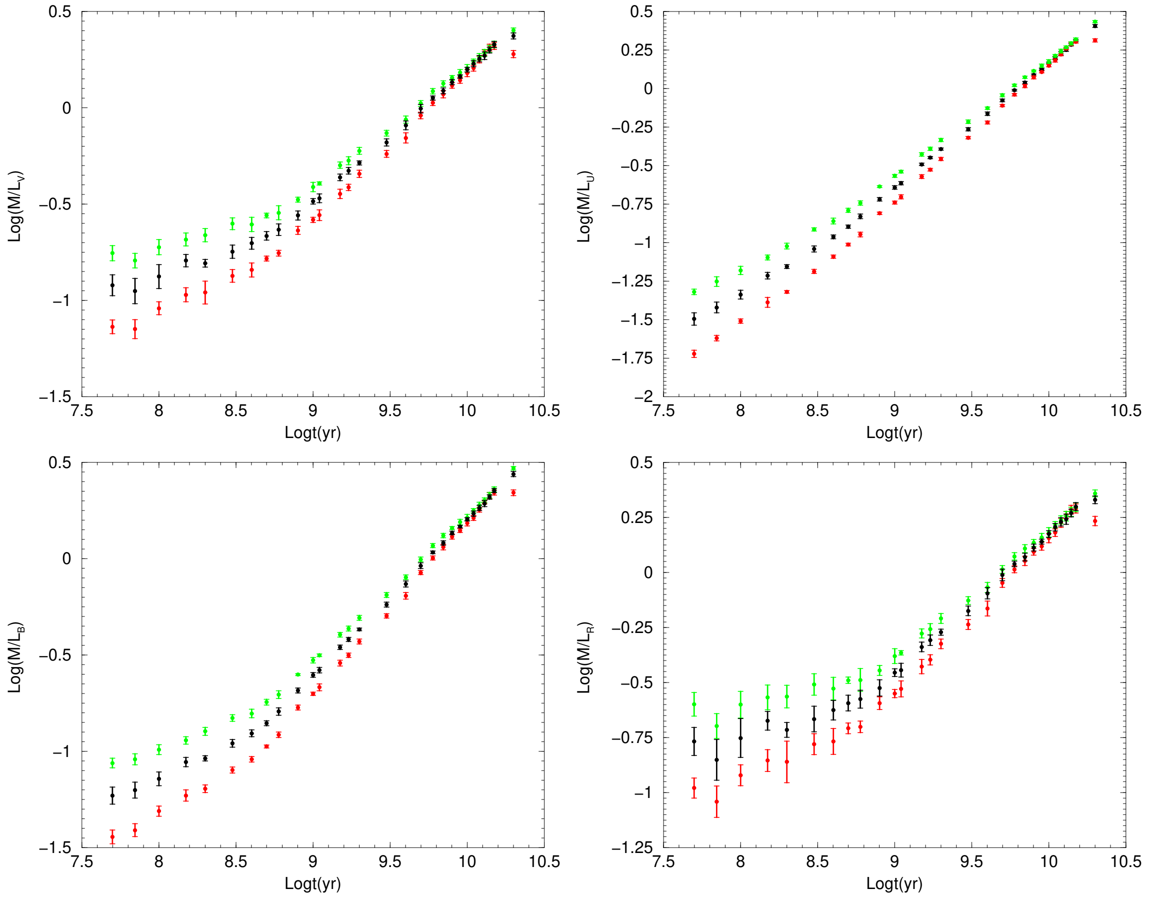

Figura 5.8: *Andamento temporale dei rapporti M/L, nelle bande fotometriche indicate, del modello standard, a $V = -8$, e dei modelli con stessi parametri ma esponente della IMF per $M > 0.5\,M_\odot$ posto pari a $s = 2.0$ (rosso) e a $s = 2.6$ (verde). Vedi anche tabelle A.9 e A.10.*

s entro i valori proposti dall'IMF di Kroupa. L'effetto dell'IMF diventa invece non trascurabile per i rapporti M/L. All'aumentare del parametro s ci aspetteremmo una diminuzione della massa totale e quindi valori del rapporto M/L minori. È questo, per esempio, il risultato ottenuto da Bruzual & Charlot (2003 [23]) che hanno mantenuto costante il numero di stelle generate (vedi figura 2.1). Nel nostro caso però (figure 5.8 e 5.9 e tabelle A.9 e A.10), avendo mantenuto costante la luminosità totale, l'effetto è opposto. Infatti una IMF più ripida provoca la diminuzione del numero di stelle di grande massa; per mantenere costante la magnitudine totale è quindi necessario aumentare il numero di stelle favorendo le strutture di massa intermedia, piccola e

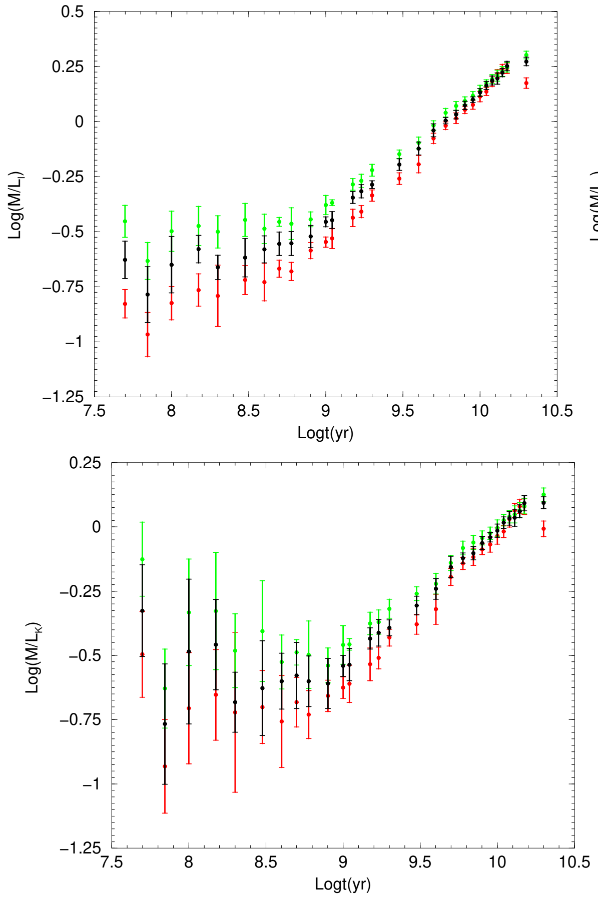

Figura 5.9: *Come in figura 5.8. Nell'ultimo riquadro sono riportate le curve cumulative, normalizzate rispetto alla massa totale del modello standard, relative all'età* $t = 11\,Gyr$ *e per i tre diversi valori del coefficiente dell'IMF a* $M > 0.5\,M_{\odot}$*, il rosso corrisponde ai modelli con* $s = 2.0$ *e il verde a quelli con* $s = 2.6$*. Vedi anche tabelle A.9 e A.10.*

molto piccola e quindi l'aumento della massa rispetto a quello della luminosità (vedi equazione 5.1). Le differenze sono maggiormente apprezzabili nelle bande B e U dato che gli errori statistici diminuiscono. In questi casi, considerando l'errore, si hanno infatti deviazioni di ~ 0.25. In definitiva, nel caso in cui sia la luminosità totale ad essere mantenuta costante, la variazione dell'esponente dell'IMF a $M > 0.5\,M_{\odot}$ opera nella stessa direzione della variazione a masse inferiori. Notiamo infine che all'aumentare dell'età le stelle in evoluzione presentano masse sempre minori e l'effetto risulta meno pronunciato.

Morfologia del ramo orizzontale

Nel §4.2, dove abbiamo cercato di riprodurre il diagramma colore-magnitudine di vari ammassi, abbiamo variato i parametri che regolano la perdita di massa in RGB con lo scopo di modificare la morfologia del ramo orizzontale. Le tre scelte dell'efficienza della perdita di massa e della sua dispersione erano tali da riprodurre la morfologia blu, intermedia e bimodale del ramo orizzontale. I tre modelli avevano la stessa età e composizione chimica, ciò che variava era la morfologia dell'HB e la magnitudine totale, che però abbiamo visto influenzare solo gli errori statistici. Le differenze tra colori integrati ottenuti per i tre modelli rientrano negli errori stimati, ciò ci porta a concludere che, almeno a $11\,Gyr$, la morfologia del ramo orizzontale non causa variazioni significative nei colori integrati. Nelle tabelle A.11 e A.12 sono riportati i valori, per età $t > 5\,Gyr$ (in realtà si inizia a parlare di "ramo orizzontale" solo dopo gli $8\,Gyr$), ottenuti con efficienza della perdita di massa pari a $\eta = 0.4$ e dispersione $\sigma_\eta = 0.02$ che, come abbiamo visto, riproducono la morfologia blu dell'HB. Confrontando questi valori con i corrispondenti delle tabelle A.1 e A.3, calcolati per $\eta = 0.3$ e $\sigma_\eta = 0.08$ (morfologia intermedia del ramo orizzontale), si può concludere che la morfologia del ramo orizzontale non influenza né i colori integrati né le relazioni M/L.

Parametro R

Il parametro R è un parametro osservativo utilizzato come indicatore dell'abbondanza di elio originario in ammassi antichi ed è definito come:

$$R = \frac{\text{Numero di stelle osservate in fase di HB}}{\text{Numero di stelle osservate in fase di RGB a luminosità superiore a quella delle RR Lyrae}}$$

Abbiamo visto (§5.5.1) quale sia la dipendenza della luminosità del ramo orizzontale dall'abbondanza di elio. Nella definizione del parametro R si fa riferimento alle RR Lyrae, cioè stelle variabili in fase di ramo orizzontale con temperatura compresa nell'intervallo $3.85 \lesssim T_e \lesssim 3.95$. A tali temperature si trovano le stelle per cui la combustione di idrogeno in shell è sensibilmente efficiente e per le quali l'aumento dell'abbondanza di elio originario porta ad una efficienza maggiore della combustione

Tabella 5.1: *Parametro R per il modello standard a* $V = -8$ *(sono riportati anche il numero di stelle in HB e quello di stelle di RGB con luminosità maggiore a quella del ramo orizzontale) e per il modello con efficienza della perdita di massa* $\eta = 0.4$ *e dispersione* $\sigma_\eta = 0.02$

	Modello	standard		Modello con $\eta = 0.4$ e $\sigma_\eta = 0.02$
età(Myr)	R	NHB	$NRGB$	R
8000	1.169 ± .070	269	230	1.170 ± .069
9000	1.163 ± .054	269	232	1.184 ± .054
10000	1.184 ± .051	258	197	1.200 ± .052
11000	1.172 ± .053	281	240	1.196 ± .054
12000	1.199 ± .025	282	235	1.238 ± .024
13000	1.214 ± .047	280	231	1.281 ± .030
14000	1.208 ± .081	304	253	1.254 ± .084
15000	1.204 ± .057	323	269	1.253 ± .058
20000	1.351 ± .095	378	282	1.348 ± .081

di idrogeno e quindi all' aumento della luminosità. Dato che i tempi evolutivi in fase di gigante rossa, come conseguenza della relazione che lega la luminosità alla massa del nucleo di elio, risultano largamente indipendenti dai parametri evolutivi e che è lecito assumere che anche i tempi di evoluzione in fase di HB siano costanti, il parametro R risulta dipendente solo dalla luminosità del ramo orizzontale: all'aumentare di Y aumenta la luminosità dell'HB e quindi diminuisce la porzione del ramo delle giganti rosse interessata con conseguente aumento di R. Il parametro R risulta facilmente determinabile in quanto i conteggi sono eseguibili con facilità e la zona del diagramma colore-magnitudine interessata presenta limitati errori osservativi. Inoltre le stelle interessate sono sufficientemente luminose perché il metodo sia applicabile anche ad ammassi relativamente lontani.

I modelli che abbiamo presentato in questa tesi sono stati ottenuti tutti con lo stesso valore dell'abbondanza originale di elio, $Y = 0.23$. Ciò che vogliamo vedere è quale sia la dipendenza del parametro R dall'età dell'ammasso e dalla morfologia del ramo orizzontale. In tabella 5.1 sono riportati i valori del parametro R ottenuti per il modello standard, e quindi relativi alla morfologia intermedia del ramo orizzontale, e quelli ottenuti con $\eta = 0.4$ e $\sigma_\eta = 0.02$ (ramo orizzontale blu). Nel caso

Tabella 5.2: *Parametro R_c per il modello standard a $V = -8$ e per età $t < 8\,Gyr$. Sono riportati anche il numero di stelle del clump N_c e quello di stelle in fase di gigante rossa a luminosità superiore a quella del clump, NRGB.*

età(Myr)	R_c	N_c	$NRGB$
600	4.75	209	44
800	2.72	193	71
1000	2.46	187	76
1500	2.98	212	71
2000	2.01	193	96
3000	1.60	206	129
4000	1.38	237	172
5000	1.232	264	215
6000	1.189	268	226
7000	1.171	267	229

del modello standard sono riportati anche i valori medi del numero di stelle fase di combustione centrale di elio (NHB) e quello di stelle in fase di gigante rossa con luminosità maggiore alla luminosità dell'HB. Il parametro R non subisce sostanziali variazioni all'aumentare dell'età e questo perché mentre il numero di stelle in fase di HB aumenta, il ramo delle giganti rosse si estende sempre più in luminosità e diventa sempre più popolato e quindi il numero di stelle di RGB conteggiato per il parametro R aumenta anch'esso.

Inoltre il parametro non risulta sensibile alla morfologia del ramo orizzontale, almeno nei due casi che abbiamo considerato che sono i più tipici di ammassi globulari.

Per età $t \lesssim 8\,Gyr$ il ramo orizzontale ancora non si è formato e non è quindi corretto parlare di parametro R, i valori che sono riportati in tabella 5.2 corrispondono al rapporto tra il numero di stelle nella zona del *clump* (o del *loop*, a seconda dell'età) dell'elio ed il numero di stelle a luminosità superiore a quella del *clump* stesso (che chiameremo R_c). È comunque evidente che il valore del rapporto tra il numero di stelle in fase di combustione centrale di elio e di quelle in RGB a luminosità superiore tende, al decrescere dell'età, ad aumentare. Nonostante infatti il numero di stelle del *clump* diminuisca, a causa dell'incremento del valore della massa in questa fase, e quindi, della diminuzione del tempo evolutivo, vi è un diminuzione più rapida del numero di stelle in RGB.

5.2 Confronto con altri autori

In quest'ultimo paragrafo confrontiamo i nostri risultati con quelli di alcuni recenti lavori di cui siano disponibili i dati: Kurth et al. (1994 [131]), Worthey (1994 [19]) e Brocato et al. (2000 [21]). Tali lavori differiscono tra loro per le tracce evolutive, le trasformazioni di colore utilizzate e per il trattamento di fasi delicate come i pulsi termici. La figura 5.10 mostra il confronto tra i modelli di Kurth (1999) e i nostri. I modelli di Kurth et al. (1999) utilizzano le tracce evolutive del gruppo di Padova e le trasformazioni di colore di Lejeune (1997 [38], 1998 [39]). La IMF adottata è quella di Salpeter con esponente $s = 2.35$. Dato che non sono disponibili i modelli con metallicità $Z = 0.0002$, ci confrontiamo con i modelli alle metallicità più simili: $Z = 0.0001$ e $Z = 0.0003$. Ricordiamo che un aumento della metallicità provoca l'aumento dell'opacità e quindi la diminuzione della temperatura della struttura e, di conseguenza, colori più rossi. I risultati, soprattutto se si tiene conto del fatto che sono stati adottati input fisici diversi, risultano in buon accordo.

In figura 5.11 riportiamo i nostri risultati, quelli di Brocato et al. (2000) e quelli di Worthey (1994) per i colori $(B-V)$ e $(V-I)$. Per sintetizzare i loro modelli Brocato et al. (2000) hanno utilizzato le tracce evolutive di Castellani et al. (1992, 1993) e le trasformazioni di colore di Kurucz (1979). Anche in questo caso i modelli con metallicità $Z = 0.0002$ non sono disponibili per cui confrontiamo i nostri risultati con i modelli con $Z = 0.0001$ e $Z = 0.0003$. La differenza maggiore nel $(B-V)$ è di $\sim 0.06\,mag$ mentre nel $(V-K)$ di ~ 0.04 (vedi figura 5.11). Inoltre, almeno per età inferiori ai $14\,Gyr$, i nostri modelli risultano più caldi e questo comportamento, può essere dovuto, in particolare, al diverso colore del ramo delle giganti rosse. Nel loro caso infatti, con le trasformazioni di colore e l'efficienza della convezione da loro adottate, il colore del ramo delle giganti rosse degli ammassi globulari non viene perfettamente riprodotto. Worthey (1994) utilizza le isocrone di VandenBerg (1985 [136]) integrate con quelle di Green et al. (1987 [137], *Revised Yale Isochrones*). Anche in questo caso

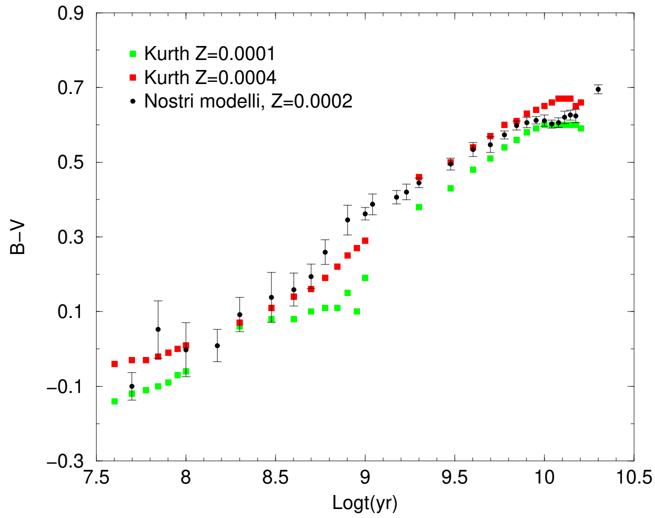

Figura 5.10: *Confronto tra i risultati ottenuti in questo lavoro (modello di riferimento a* $V = -8$*) e quelli di Kurth et al. (1999) ottenuti con le tracce evolutive del gruppo di Padova (Bressan et al, 1993 [132]; Fagotto et al., 1994a,b,c [133] [134] [135]) e le trasformazioni di colore di Lejeune et al. (1997 [38], 1998 [39]), per metallicità* $Z = 0.0001$ *e* $Z = 0.0004$*. Tutti i modelli sono stati ottenuti con la IMF di Salpeter (*$s = 2.35$*).*

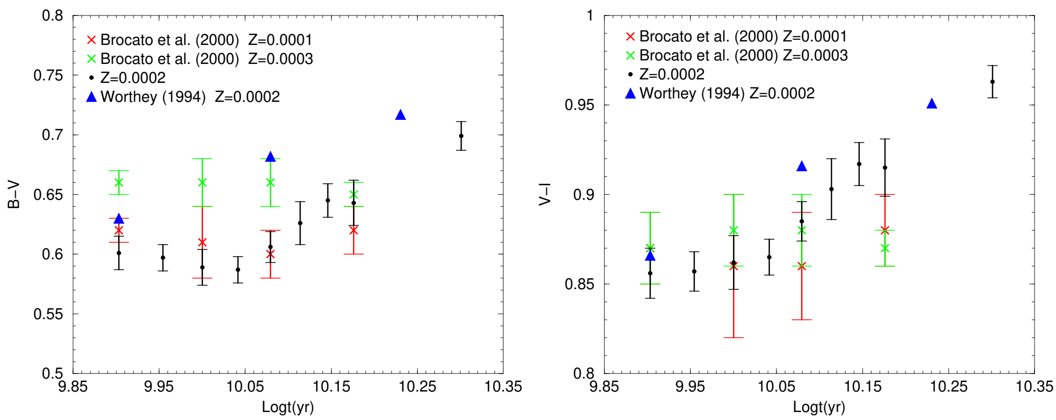

Figura 5.11: *Confronto tra i risultati ottenuti in questo lavoro (modello di riferimento a* $V = -8$*), quelli di Brocato et al. (2000) e quelli di Worthey (1994). Nel riquadro di sinistra è riportato l'andamento temporale del* $(B - V)$ *mentre a destra il* $(V - I)$*. Tutti i modelli sono stati ottenuti con la IMF di Salpeter (*$s = 2.35$*).*

la IMF adottata è quella di Salpeter con esponente pari a 2.35. I risultati di Worthey risultano, soprattutto nel $(B-V)$ più rossi rispetto ai nostri, le differenze comunque sono piccole.

Appendice A

Risultati per ammassi di Popolazione II

In questa appendice riportiamo i colori integrati e i rapporti massa-luminosità ottenuti in questo lavoro di tesi. I dati riportati nelle tabelle A.1-A.12 sono relativi ai filtri Johnson (U, B e V, vedi anche appendice B) e Cousins (R, I, J e K). Nelle tabelle A.13, A.15, A.21, A.25, A.29 è riportato anche il colore $(V-I)_J$, cioè ottenuto nelle bande V e I entrambe del sistema fotometrico Johnson. Nelle tabelle A.13-A.32 sono riportati i colori integrati nei filtri delle quattro camere *WFPC2 (Wide Field Planetary Camera 2)* e delle tre camere *NICNOS (Near Infrared Camera and Multi-Object)* dell'*Hubble Space Telescope (HST)*; il numero della camera è indicato tra parentesi a fianco del filtro.

Le trasformazioni di colore utilizzate per passare dal piano teorico a quello osservativo nel caso dei filtri Johnson-Cousins sono quelle di Castelli (1999 [36]) per le strutture con massa $M > 0.6\,M_\odot$, quelle di Allard & Hauschildt (1997 [102]) per $M < 0.6\,M_\odot$ mentre per le nane bianche sono state utilizzate le relazioni di Saumon & Jacobson (1999 [103]); nei filtri HST, per i quali, data la mancanza di relazioni affidabili, non sono state introdotte né le stelle di massa inferiore alle $0.6\,M_\odot$ né le nane bianche (vedi cap.3), sono state utilizzate le relazioni temperatura-colore di Origlia & Leitherer (2000 [105]).

Tabella A.1: *Risultati del modello standard a $V = -8$ per i colori integrati nelle bande Johnson-Cousins.*

$età (Myr)$	V	$(U-B)$	$(B-V)$	$(V-R)$	$(V-I)$	$(V-J)$	$(V-K)$
50.	-8.011 ± .137	-.561 ± .021	-.100 ± .037	-.019 ± .040	-.015 ± .103	-.017 ± .241	.116 ± .412
70.	-7.989 ± .167	-.453 ± .031	.052 ± .077	.125 ± .072	.330 ± .161	.685 ± .294	1.172 ± .401
100.	-7.991 ± .155	-.387 ± .032	-.002 ± .072	.063 ± .073	.182 ± .177	.395 ± .364	.730 ± .561
150.	-7.992 ± .085	-.309 ± .016	.009 ± .043	.061 ± .043	.179 ± .100	.392 ± .190	.727 ± .293
200.	-8.000 ± .051	-.219 ± .014	.092 ± .046	.137 ± .046	.357 ± .104	.742 ± .193	1.237 ± .275
300.	-8.009 ± .091	-.116 ± .023	.138 ± .067	.161 ± .067	.403 ± .151	.807 ± .283	1.297 ± .410
400.	-8.062 ± .077	-.049 ± .015	.159 ± .044	.164 ± .041	.407 ± .090	.808 ± .166	1.286 ± .240
500.	-8.021 ± .054	-.015 ± .011	.194 ± .033	.182 ± .032	.442 ± .073	.853 ± .143	1.327 ± .222
600.	-8.059 ± .077	.002 ± .011	.259 ± .033	.221 ± .028	.517 ± .061	.961 ± .111	1.452 ± .164
800.	-8.028 ± .060	.007 ± .015	.345 ± .040	.275 ± .032	.622 ± .068	1.122 ± .123	1.656 ± .180
1000.	-7.979 ± .038	-.005 ± .005	.362 ± .017	.282 ± .014	.632 ± .030	1.126 ± .057	1.651 ± .088
1100.	-8.024 ± .061	.002 ± .012	.387 ± .028	.296 ± .020	.657 ± .041	1.160 ± .074	1.686 ± .106
1500.	-8.030 ± .043	.009 ± .009	.406 ± .018	.303 ± .012	.670 ± .025	1.175 ± .045	1.697 ± .066
1700.	-7.999 ± .044	.017 ± .009	.420 ± .021	.312 ± .015	.685 ± .032	1.199 ± .057	1.730 ± .083
2000.	-7.975 ± .028	.028 ± .008	.445 ± .013	.325 ± .009	.710 ± .020	1.236 ± .036	1.776 ± .054
3000.	-7.980 ± .047	.026 ± .009	.495 ± .016	.348 ± .010	.750 ± .020	1.287 ± .034	1.828 ± .050
4000.	-8.044 ± .056	.010 ± .013	.534 ± .019	.369 ± .010	.787 ± .020	1.337 ± .034	1.886 ± .048
5000.	-8.014 ± .055	-.012 ± .015	.547 ± .021	.377 ± .011	.798 ± .023	1.347 ± .038	1.890 ± .054
6000.	-8.018 ± .026	-.020 ± .008	.573 ± .011	.392 ± .006	.826 ± .011	1.389 ± .018	1.942 ± .026
7000.	-8.028 ± .037	-.018 ± .009	.598 ± .012	.406 ± .006	.851 ± .012	1.426 ± .020	1.988 ± .028
8000.	-7.996 ± .033	-.022 ± .011	.606 ± .014	.411 ± .007	.860 ± .013	1.440 ± .023	2.003 ± .033
9000.	-7.988 ± .023	-.015 ± .008	.612 ± .010	.415 ± .005	.867 ± .010	1.452 ± .017	2.019 ± .025
10000.	-7.939 ± .031	-.003 ± .010	.611 ± .015	.418 ± .007	.874 ± .014	1.467 ± .023	2.042 ± .033
11000.	-8.010 ± .038	.002 ± .009	.602 ± .011	.416 ± .005	.871 ± .010	1.465 ± .016	2.040 ± .022
12000.	-7.988 ± .042	.004 ± .010	.606 ± .013	.421 ± .006	.880 ± .012	1.482 ± .019	2.063 ± .028
13000.	-7.948 ± .051	.007 ± .014	.620 ± .017	.429 ± .008	.896 ± .016	1.507 ± .026	2.097 ± .038
14000.	-7.998 ± .037	.000 ± .011	.626 ± .013	.433 ± .006	.903 ± .012	1.517 ± .019	2.108 ± .027
15000.	-8.010 ± .038	-.016 ± .014	.624 ± .018	.434 ± .008	.903 ± .016	1.515 ± .027	2.102 ± .038
20000.	-7.986 ± .040	.006 ± .012	.695 ± .012	.467 ± .005	.961 ± .010	1.602 ± .016	2.209 ± .023

Tabella A.2: *Risultati del modello standard a $V = -4$ per i colori integrati nelle bande Johnson-Cousins.*

età(Myr)	V	$(U-B)$	$(B-V)$	$(V-R)$	$(V-I)$	$(V-J)$	$(V-K)$
50.	-4.154 ± .528	-.585 ± .057	-.114 ± .076	-.039 ± .067	-.072 ± .159	-.172 ± .319	-.175 ± .476
70.	-4.186 ± .314	-.491 ± .118	-.072 ± .163	-.014 ± .120	-.020 ± .263	-.083 ± .482	-.067 ± .684
100.	-4.238 ± .667	-.333 ± .223	.086 ± .318	.092 ± .224	.207 ± .471	.334 ± .830	.518 ± 1.152
150.	-3.949 ± .290	-.338 ± .039	-.057 ± .180	-.012 ± .100	-.007 ± .250	-.025 ± .489	.014 ± .701
200.	-4.003 ± .484	-.221 ± .106	.026 ± .202	.045 ± .152	.115 ± .317	.195 ± .552	.310 ± .771
300.	-4.075 ± .270	-.134 ± .050	.099 ± .126	.100 ± .097	.248 ± .212	.462 ± .382	.711 ± .556
400.	-4.061 ± .405	-.053 ± .093	.146 ± .203	.125 ± .136	.299 ± .277	.548 ± .466	.823 ± .647
500.	-3.885 ± .378	-.023 ± .093	.192 ± .185	.160 ± .131	.373 ± .268	.681 ± .454	1.012 ± .637
600.	-3.811 ± .253	-.030 ± .030	.169 ± .054	.144 ± .046	.345 ± .103	.637 ± .190	.955 ± .291
800.	-3.891 ± .391	.028 ± .100	.352 ± .205	.261 ± .138	.577 ± .279	1.012 ± .471	1.458 ± .658
1000.	-3.925 ± .332	-.009 ± .060	.340 ± .147	.259 ± .113	.577 ± .230	1.011 ± .400	1.459 ± .568
1100.	-4.030 ± .323	.001 ± .046	.384 ± .100	.282 ± .061	.622 ± .122	1.082 ± .203	1.557 ± .282
1500.	-4.008 ± .315	.061 ± .085	.487 ± .156	.343 ± .096	.741 ± .188	1.278 ± .309	1.823 ± .421
1700.	-4.014 ± .241	.017 ± .031	.405 ± .075	.294 ± .047	.649 ± .093	1.131 ± .155	1.627 ± .217
2000.	-3.977 ± .201	.004 ± .035	.406 ± .072	.292 ± .045	.641 ± .090	1.108 ± .151	1.582 ± .213
3000.	-3.982 ± .267	.039 ± .065	.516 ± .094	.355 ± .056	.762 ± .109	1.300 ± .183	1.840 ± .255
4000.	-3.994 ± .182	.004 ± .044	.519 ± .066	.357 ± .036	.762 ± .071	1.291 ± .118	1.819 ± .166
5000.	-3.845 ± .276	-.008 ± .080	.540 ± .108	.370 ± .058	.783 ± .113	1.318 ± .190	1.844 ± .269
6000.	-3.772 ± .241	-.046 ± .042	.532 ± .058	.369 ± .027	.778 ± .055	1.303 ± .093	1.813 ± .136
7000.	-3.778 ± .262	.003 ± .061	.622 ± .076	.419 ± .038	.874 ± .073	1.464 ± .124	2.036 ± .179
8000.	-3.930 ± .263	-.018 ± .075	.602 ± .088	.407 ± .042	.849 ± .081	1.416 ± .135	1.961 ± .192
9000.	-3.901 ± .323	.004 ± .096	.629 ± .100	.421 ± .045	.876 ± .086	1.461 ± .141	2.024 ± .200
10000.	-3.818 ± .224	.012 ± .078	.621 ± .105	.420 ± .049	.875 ± .094	1.464 ± .155	2.029 ± .218
11000.	-3.949 ± .217	.038 ± .055	.645 ± .077	.435 ± .037	.906 ± .071	1.521 ± .116	2.114 ± .162
12000.	-3.897 ± .277	-.005 ± .080	.592 ± .094	.413 ± .044	.864 ± .086	1.450 ± .142	2.013 ± .202
13000.	-3.996 ± .219	-.010 ± .057	.595 ± .076	.415 ± .033	.866 ± .065	1.454 ± .108	2.017 ± .155
14000.	-3.947 ± .255	-.009 ± .069	.620 ± .101	.428 ± .047	.892 ± .090	1.495 ± .148	2.071 ± .209
15000.	-4.057 ± .283	.012 ± .095	.648 ± .113	.443 ± .050	.918 ± .094	1.538 ± .153	2.130 ± .214
20000.	-3.998 ± .238	-.005 ± .091	.675 ± .103	.457 ± .040	.940 ± .077	1.565 ± .125	2.150 ± .179

Tabella A.3: *Risultati del modello standard a $V = -8$ per i rapporti M/L nelle bande Johnson-Cousins.*

età(Myr)	$(M/L)_V$	$(M/L)_U$	$(M/L)_B$	$(M/L)_R$	$(M/L)_I$	$(M/L)_J$	$(M/L)_K$
50.	.120 ± .015	.032 ± .003	.059 ± .006	.171 ± .025	.236 ± .046	.361 ± .105	.472 ± .194
70.	.112 ± .017	.038 ± .003	.063 ± .006	.141 ± .030	.164 ± .048	.182 ± .077	.171 ± .092
100.	.133 ± .019	.046 ± .003	.072 ± .006	.177 ± .036	.224 ± .066	.290 ± .133	.327 ± .212
150.	.161 ± .012	.061 ± .003	.088 ± .005	.212 ± .021	.264 ± .038	.327 ± .081	.348 ± .141
200.	.156 ± .007	.070 ± .002	.092 ± .003	.193 ± .015	.218 ± .028	.230 ± .046	.208 ± .056
300.	.179 ± .014	.091 ± .004	.110 ± .005	.216 ± .029	.241 ± .048	.254 ± .079	.236 ± .100
400.	.198 ± .014	.109 ± .003	.124 ± .005	.237 ± .024	.263 ± .037	.273 ± .054	.251 ± .063
500.	.216 ± .011	.127 ± .003	.140 ± .004	.255 ± .021	.279 ± .034	.286 ± .057	.264 ± .078
600.	.233 ± .016	.148 ± .005	.161 ± .007	.266 ± .025	.280 ± .035	.278 ± .048	.251 ± .057
800.	.276 ± .015	.191 ± .005	.207 ± .006	.299 ± .025	.301 ± .035	.284 ± .047	.246 ± .055
1000.	.327 ± .011	.228 ± .006	.249 ± .007	.351 ± .014	.351 ± .018	.331 ± .023	.288 ± .027
1100.	.339 ± .018	.243 ± .006	.264 ± .009	.360 ± .026	.357 ± .032	.335 ± .039	.291 ± .042
1500.	.435 ± .017	.322 ± .006	.347 ± .009	.459 ± .023	.452 ± .028	.423 ± .033	.368 ± .035
1700.	.471 ± .019	.356 ± .006	.381 ± .009	.493 ± .027	.483 ± .033	.447 ± .041	.387 ± .046
2000.	.517 ± .013	.405 ± .007	.429 ± .007	.535 ± .017	.517 ± .021	.474 ± .026	.405 ± .029
3000.	.661 ± .028	.544 ± .013	.578 ± .017	.669 ± .034	.638 ± .038	.578 ± .041	.494 ± .041
4000.	.810 ± .042	.686 ± .018	.739 ± .027	.804 ± .048	.755 ± .052	.677 ± .055	.574 ± .053
5000.	.988 ± .049	.837 ± .018	.919 ± .031	.974 ± .058	.912 ± .062	.818 ± .067	.698 ± .067
6000.	1.124 ± .027	.974 ± .013	1.078 ± .019	1.092 ± .031	1.010 ± .033	.894 ± .034	.756 ± .034
7000.	1.224 ± .042	1.093 ± .020	1.206 ± .031	1.174 ± .046	1.076 ± .048	.941 ± .049	.789 ± .047
8000.	1.359 ± .042	1.225 ± .016	1.358 ± .029	1.296 ± .047	1.184 ± .050	1.032 ± .052	.864 ± .051
9000.	1.453 ± .031	1.331 ± .016	1.466 ± .023	1.381 ± .036	1.257 ± .037	1.091 ± .039	.910 ± .038
10000.	1.576 ± .046	1.467 ± .017	1.599 ± .031	1.494 ± .053	1.356 ± .056	1.167 ± .059	.967 ± .057
11000.	1.692 ± .060	1.577 ± .038	1.711 ± .053	1.606 ± .062	1.459 ± .061	1.254 ± .058	1.039 ± .054
12000.	1.796 ± .069	1.693 ± .043	1.832 ± .059	1.698 ± .074	1.536 ± .074	1.312 ± .071	1.080 ± .066
13000.	1.859 ± .086	1.785 ± .046	1.927 ± .069	1.745 ± .092	1.568 ± .092	1.327 ± .090	1.085 ± .083
14000.	1.991 ± .067	1.923 ± .036	2.088 ± .056	1.861 ± .073	1.667 ± .073	1.407 ± .071	1.149 ± .067
15000.	2.130 ± .075	2.042 ± .033	2.252 ± .056	1.990 ± .084	1.785 ± .087	1.509 ± .089	1.237 ± .086
20000.	2.359 ± .087	2.542 ± .059	2.746 ± .089	2.138 ± .086	1.874 ± .082	1.541 ± .074	1.241 ± .067

Tabella A.4: *Risultati del modello standard a $V = -4$ per i rapporti M/L nelle bande Johnson-Cousins.*

$età(Myr)$	$(M/L)_V$	$(M/L)_U$	$(M/L)_B$	$(M/L)_R$	$(M/L)_I$	$(M/L)_J$	$(M/L)_K$
50.	.111 ± .052	.028 ± .012	.054 ± .024	.162 ± .078	.235 ± .115	.395 ± .198	.576 ± .288
70.	.098 ± .025	.029 ± .006	.049 ± .010	.140 ± .041	.200 ± .065	.332 ± .120	.483 ± .182
100.	.135 ± .063	.048 ± .010	.072 ± .023	.187 ± .101	.259 ± .156	.408 ± .270	.573 ± .394
150.	.194 ± .054	.067 ± .016	.099 ± .027	.273 ± .078	.376 ± .111	.571 ± .177	.776 ± .246
200.	.188 ± .062	.075 ± .018	.101 ± .027	.260 ± .093	.350 ± .134	.515 ± .211	.691 ± .292
300.	.203 ± .052	.098 ± .021	.120 ± .027	.261 ± .079	.322 ± .119	.411 ± .192	.488 ± .272
400.	.210 ± .086	.110 ± .029	.127 ± .041	.269 ± .129	.330 ± .184	.420 ± .278	.496 ± .374
500.	.239 ± .075	.135 ± .025	.151 ± .037	.295 ± .107	.346 ± .140	.410 ± .188	.452 ± .230
600.	.273 ± .060	.154 ± .028	.173 ± .036	.334 ± .080	.385 ± .105	.444 ± .153	.478 ± .214
800.	.257 ± .087	.173 ± .020	.185 ± .035	.294 ± .128	.319 ± .171	.349 ± .232	.362 ± .286
1000.	.311 ± .078	.205 ± .026	.226 ± .037	.350 ± .110	.372 ± .138	.391 ± .175	.387 ± .203
1100.	.304 ± .088	.211 ± .035	.231 ± .047	.332 ± .114	.341 ± .138	.342 ± .168	.321 ± .188
1500.	.352 ± .117	.282 ± .037	.291 ± .053	.368 ± .160	.364 ± .196	.349 ± .237	.317 ± .259
1700.	.444 ± .101	.324 ± .047	.348 ± .057	.476 ± .131	.479 ± .155	.464 ± .183	.422 ± .198
2000.	.506 ± .093	.368 ± .040	.399 ± .051	.543 ± .121	.548 ± .144	.537 ± .170	.496 ± .184
3000.	.590 ± .123	.488 ± .058	.514 ± .079	.598 ± .146	.574 ± .159	.529 ± .170	.461 ± .168
4000.	.793 ± .129	.647 ± .058	.702 ± .081	.799 ± .153	.764 ± .167	.703 ± .179	.614 ± .177
5000.	.995 ± .234	.814 ± .079	.899 ± .142	.997 ± .277	.953 ± .303	.884 ± .329	.786 ± .334
6000.	1.211 ± .273	.978 ± .143	1.115 ± .205	1.208 ± .305	1.150 ± .321	1.063 ± .338	.947 ± .343
7000.	1.277 ± .306	1.180 ± .183	1.286 ± .250	1.218 ± .331	1.113 ± .339	.973 ± .344	.821 ± .335
8000.	1.343 ± .294	1.202 ± .135	1.339 ± .227	1.296 ± .321	1.200 ± .329	1.072 ± .331	.926 ± .321
9000.	1.442 ± .379	1.346 ± .205	1.475 ± .318	1.376 ± .401	1.261 ± .400	1.108 ± .390	.944 ± .367
10000.	1.624 ± .327	1.546 ± .180	1.670 ± .256	1.548 ± .366	1.417 ± .384	1.242 ± .395	1.055 ± .390
11000.	1.574 ± .299	1.565 ± .206	1.650 ± .263	1.475 ± .315	1.327 ± .315	1.128 ± .306	.928 ± .286
12000.	1.908 ± .452	1.741 ± .245	1.917 ± .374	1.830 ± .487	1.682 ± .495	1.476 ± .493	1.257 ± .474
13000.	1.946 ± .390	1.780 ± .203	1.963 ± .309	1.861 ± .428	1.705 ± .440	1.488 ± .442	1.261 ± .430
14000.	2.045 ± .517	1.921 ± .319	2.119 ± .455	1.934 ± .552	1.757 ± .558	1.519 ± .550	1.279 ± .528
15000.	2.027 ± .498	1.978 ± .268	2.145 ± .411	1.897 ± .532	1.706 ± .535	1.454 ± .520	1.207 ± .488
20000.	2.491 ± .596	2.586 ± .313	2.847 ± .546	2.294 ± .624	2.046 ± .620	1.728 ± .592	1.438 ± .562

Tabella A.5: *Rapporti M/L, nelle bande Johnson-Cousins, del modello a $V = -8$ ottenuti con esponente della IMF $s = 0.8$ per $M < 0.5\,M_{\odot}$.*

età(Myr)	$(M/L)_V$	$(M/L)_U$	$(M/L)_B$	$(M/L)_R$	$(M/L)_I$	$(M/L)_J$	$(M/L)_K$
50.	.108 ± .013	.029 ± .003	.053 ± .005	.155 ± .023	.214 ± .041	.328 ± .095	.429 ± .178
70.	.101 ± .015	.035 ± .003	.057 ± .005	.127 ± .027	.148 ± .044	.165 ± .070	.155 ± .083
100.	.120 ± .017	.042 ± .003	.065 ± .006	.160 ± .032	.202 ± .059	.261 ± .120	.296 ± .192
150.	.144 ± .011	.055 ± .003	.079 ± .005	.190 ± .019	.237 ± .034	.294 ± .073	.314 ± .128
200.	.140 ± .007	.062 ± .002	.083 ± .002	.172 ± .014	.195 ± .025	.206 ± .042	.187 ± .051
300.	.160 ± .013	.081 ± .003	.098 ± .004	.193 ± .026	.215 ± .043	.227 ± .071	.212 ± .090
400.	.176 ± .012	.097 ± .002	.111 ± .004	.212 ± .021	.235 ± .033	.244 ± .048	.224 ± .056
500.	.192 ± .010	.113 ± .002	.125 ± .003	.227 ± .018	.248 ± .030	.255 ± .050	.235 ± .070
600.	.207 ± .014	.132 ± .005	.143 ± .007	.236 ± .022	.249 ± .031	.247 ± .043	.223 ± .051
800.	.245 ± .014	.169 ± .005	.183 ± .006	.265 ± .022	.267 ± .031	.252 ± .042	.219 ± .049
1000.	.289 ± .010	.201 ± .005	.220 ± .006	.311 ± .013	.311 ± .016	.294 ± .021	.255 ± .024
1100.	.299 ± .016	.215 ± .005	.233 ± .008	.318 ± .023	.315 ± .028	.296 ± .035	.257 ± .037
1500.	.384 ± .015	.283 ± .006	.306 ± .008	.405 ± .020	.399 ± .024	.373 ± .029	.325 ± .031
1700.	.415 ± .017	.313 ± .005	.335 ± .008	.434 ± .024	.426 ± .030	.395 ± .037	.342 ± .040
2000.	.455 ± .011	.356 ± .006	.377 ± .007	.470 ± .015	.456 ± .019	.418 ± .023	.358 ± .025
3000.	.580 ± .025	.476 ± .011	.505 ± .015	.587 ± .030	.560 ± .033	.509 ± .036	.435 ± .037
4000.	.709 ± .037	.598 ± .016	.644 ± .024	.704 ± .043	.663 ± .046	.595 ± .048	.505 ± .047
5000.	.864 ± .043	.728 ± .016	.800 ± .026	.852 ± .051	.800 ± .055	.719 ± .059	.614 ± .059
6000.	.982 ± .023	.847 ± .011	.938 ± .016	.955 ± .027	.885 ± .029	.785 ± .030	.664 ± .030
7000.	1.068 ± .036	.949 ± .017	1.048 ± .026	1.026 ± .040	.942 ± .042	.826 ± .043	.693 ± .042
8000.	1.185 ± .036	1.063 ± .014	1.178 ± .025	1.133 ± .042	1.036 ± .044	.906 ± . 046	.759 ± .045
9000.	1.267 ± .028	1.154 ± .014	1.271 ± .020	1.207 ± .031	1.100 ± .033	.957 ± . 035	.800 ± .034
10000.	1.374 ± .040	1.272 ± .015	1.385 ± .027	1.305 ± .047	1.186 ± .050	1.025 ± .052	.850 ± .051
11000.	1.475 ± .052	1.366 ± .033	1.482 ± .045	1.403 ± .054	1.277 ± .054	1.102 ± .052	.913 ± .048
12000.	1.565 ± .061	1.465 ± .037	1.586 ± .051	1.484 ± .065	1.344 ± .065	1.153 ± .063	.950 ± .059
13000.	1.620 ± .075	1.544 ± .040	1.667 ± .060	1.524 ± .081	1.372 ± .082	1.166 ± .080	.953 ± .074
14000.	1.735 ± .059	1.663 ± .031	1.806 ± .048	1.626 ± .064	1.460 ± .065	1.237 ± .064	1.010 ± .060
15000.	1.849 ± .066	1.759 ± .028	1.939 ± .048	1.734 ± .074	1.558 ± .077	1.323 ± .079	1.085 ± .077
20000.	1.998 ± .074	2.129 ± .049	2.301 ± .075	1.816 ± .074	1.596 ± .070	1.319 ± .065	1.062 ± .058

Tabella A.6: *Rapporti M/L, nelle bande Johnson-Cousins, del modello a $V = -8$ ottenuti con esponente della IMF $s = 1.8$ per $M < 0.5\, M_{\odot}$.*

età(Myr)	$(M/L)_V$	$(M/L)_U$	$(M/L)_B$	$(M/L)_R$	$(M/L)_I$	$(M/L)_J$	$(M/L)_K$
50.	.138 ± .017	.037 ± .003	.068 ± .007	.197 ± .029	.272 ± .052	.415 ± .120	.539 ± .221
70.	.129 ± .020	.044 ± .003	.073 ± .007	.163 ± .035	.189 ± .056	.210 ± .089	.197 ± .105
100.	.155 ± .022	.054 ± .003	.083 ± .007	.205 ± .042	.259 ± .076	.335 ± .153	.377 ± .243
150.	.187 ± .014	.071 ± .004	.102 ± .006	.247 ± .024	.307 ± .044	.379 ± .093	.403 ± .162
200.	.183 ± .009	.081 ± .003	.108 ± .003	.225 ± .018	.254 ± .032	.268 ± .054	.242 ± .066
300.	.210 ± .017	.107 ± .004	.129 ± .005	.253 ± .033	.282 ± .057	.297 ± .092	.276 ± .116
400.	.233 ± .016	.128 ± .004	.146 ± .005	.279 ± .028	.309 ± .043	.320 ± .063	.294 ± .073
500.	.255 ± .013	.150 ± .003	.166 ± .004	.301 ± .024	.328 ± .040	.336 ± .066	.310 ± .091
600.	.276 ± .019	.176 ± .007	.190 ± .009	.314 ± .029	.330 ± .041	.328 ± .056	.295 ± .067
800.	.327 ± .018	.227 ± .006	.245 ± .008	.354 ± .029	.356 ± .041	.336 ± .055	.291 ± .064
1000.	.388 ± .013	.272 ± .007	.296 ± .008	.417 ± .017	.417 ± .022	.392 ± .027	.341 ± .032
1100.	.403 ± .022	.290 ± .007	.315 ± .010	.428 ± .030	.423 ± .038	.397 ± .046	.344 ± .049
1500.	.519 ± .020	.385 ± .007	.415 ± .010	.547 ± .027	.538 ± .033	.502 ± .039	.437 ± .042
1700.	.563 ± .023	.426 ± .007	.456 ± .010	.588 ± .032	.575 ± .040	.532 ± .049	.460 ± .053
2000.	.619 ± .016	.486 ± .008	.514 ± .009	.638 ± .021	.617 ± .025	.564 ± .031	.482 ± .034
3000.	.793 ± .034	.655 ± .015	.695 ± .021	.801 ± .041	.763 ± .045	.690 ± .048	.590 ± .049
4000.	.974 ± .050	.828 ± .022	.891 ± .033	.964 ± .058	.905 ± .062	.808 ± .064	.685 ± .063
5000.	1.189 ± .058	1.012 ± .022	1.112 ± .037	1.169 ± .069	1.093 ± .074	.977 ± .079	.833 ± .078
6000.	1.355 ± .032	1.181 ± .016	1.306 ± .023	1.312 ± .036	1.211 ± .039	1.068 ± .041	.902 ± .040
7000.	1.476 ± .050	1.326 ± .024	1.464 ± .037	1.411 ± .055	1.291 ± .057	1.125 ± .057	.942 ± .055
8000.	1.639 ± .050	1.488 ± .020	1.649 ± .035	1.559 ± .056	1.420 ± .059	1.232 ± .061	1.031 ± .060
9000.	1.753 ± .037	1.618 ± .020	1.783 ± .028	1.661 ± .042	1.508 ± .044	1.303 ± .045	1.086 ± .045
10000.	1.902 ± .055	1.785 ± .021	1.945 ± .037	1.797 ± .063	1.626 ± .067	1.393 ± .068	1.153 ± .067
11000.	2.042 ± .071	1.920 ± .047	2.084 ± .064	1.931 ± .074	1.749 ± .072	1.496 ± .069	1.237 ± .063
12000.	2.167 ± .083	2.062 ± .052	2.231 ± .072	2.041 ± .087	1.840 ± .087	1.563 ± .083	1.286 ± .077
13000.	2.243 ± .103	2.175 ± .056	2.349 ± .085	2.097 ± .109	1.878 ± .109	1.582 ± .104	1.292 ± .097
14000.	2.402 ± .081	2.344 ± .044	2.546 ± .069	2.236 ± .086	1.997 ± .086	1.676 ± .083	1.367 ± .078
15000.	2.580 ± .090	2.502 ± .040	2.759 ± .068	2.400 ± .100	2.144 ± .103	1.802 ± .103	1.476 ± .100
20000.	2.936 ± .106	3.211 ± .075	3.469 ± .113	2.647 ± .104	2.311 ± .098	1.888 ± .088	1.519 ± .079

Tabella A.7: *Colori integrati nelle bande Johnson-Cousins del modello a* $V = -8$ *ottenuti con esponente della IMF* $s = 2.0$ *per* $M > 0.5\,M_{\odot}$.

età (Myr)	V	$(U-B)$	$(B-V)$	$(V-R)$	$(V-I)$	$(V-J)$	$(V-K)$
50.	-8.019 ± .097	-.578 ± .016	-.117 ± .029	-.033 ± .032	-.051 ± .085	-.099 ± .208	-.013 ± .373
70.	-8.124 ± .138	-.455 ± .027	.021 ± .066	.100 ± .064	.275 ± .146	.592 ± .274	1.054 ± .378
100.	-7.997 ± .083	-.397 ± .014	-.012 ± .042	.058 ± .046	.176 ± .114	.399 ± .248	.765 ± .399
150.	-8.026 ± .094	-.304 ± .015	.016 ± .043	.069 ± .046	.200 ± .111	.435 ± .233	.792 ± .367
200.	-8.108 ± .150	-.219 ± .036	.090 ± .098	.131 ± .093	.337 ± .210	.685 ± .396	1.132 ± .580
300.	-7.997 ± .081	-.125 ± .014	.106 ± .040	.131 ± .041	.337 ± .096	.688 ± .190	1.134 ± .290
400.	-7.925 ± .091	-.039 ± .018	.174 ± .058	.179 ± .057	.440 ± .127	.868 ± .239	1.371 ± .351
500.	-7.970 ± .034	-.014 ± .010	.189 ± .029	.176 ± .030	.426 ± .068	.822 ± .135	1.279 ± .210
600.	-7.963 ± .037	.008 ± .009	.266 ± .040	.226 ± .036	.526 ± .078	.976 ± .146	1.471 ± .217
800.	-8.049 ± .054	-.003 ± .009	.321 ± .025	.257 ± .020	.586 ± .041	1.061 ± .073	1.575 ± .106
1000.	-8.005 ± .036	-.004 ± .007	.362 ± .017	.279 ± .014	.625 ± .029	1.110 ± .055	1.624 ± .086
1100.	-8.029 ± .071	.001 ± .013	.385 ± .029	.291 ± .020	.647 ± .040	1.140 ± .069	1.656 ± .098
1500.	-8.038 ± .060	.016 ± .011	.420 ± .027	.311 ± .019	.687 ± .039	1.203 ± .069	1.738 ± .101
1700.	-8.008 ± .043	.026 ± .009	.437 ± .020	.319 ± .014	.699 ± .027	1.219 ± .047	1.754 ± .067
2000.	-7.992 ± .047	.025 ± .006	.434 ± .016	.316 ± .010	.692 ± .019	1.205 ± .030	1.733 ± .042
3000.	-7.988 ± .045	.035 ± .011	.504 ± .020	.353 ± .012	.761 ± .023	1.307 ± .040	1.861 ± .055
4000.	-8.021 ± .068	.022 ± .019	.553 ± .028	.378 ± .017	.804 ± .032	1.365 ± .055	1.926 ± .079
5000.	-8.067 ± .041	-.006 ± .011	.552 ± .016	.378 ± .009	.801 ± .017	1.352 ± .029	1.900 ± .041
6000.	-8.012 ± .035	-.019 ± .008	.572 ± .011	.389 ± .006	.821 ± .011	1.380 ± .020	1.931 ± .028
7000.	-7.990 ± .046	-.017 ± .012	.596 ± .015	.403 ± .008	.846 ± .015	1.418 ± .026	1.979 ± .037
8000.	-7.991 ± .036	-.014 ± .007	.614 ± .008	.413 ± .004	.865 ± .007	1.447 ± .012	2.017 ± .017
9000.	-7.986 ± .039	-.006 ± .012	.622 ± .016	.418 ± .008	.874 ± .015	1.464 ± .025	2.038 ± .036
10000.	-7.953 ± .045	.004 ± .013	.618 ± .015	.419 ± .008	.876 ± .015	1.471 ± .025	2.050 ± .035
11000.	-7.983 ± .037	.015 ± .010	.617 ± .014	.422 ± .007	.882 ± .013	1.483 ± .022	2.068 ± .031
12000.	-8.002 ± .043	.007 ± .012	.607 ± .017	.419 ± .008	.877 ± .016	1.476 ± .026	2.058 ± .038
13000.	-7.986 ± .033	-.001 ± .010	.608 ± .015	.422 ± .008	.883 ± .015	1.486 ± .026	2.069 ± .037
14000.	-8.130 ± .045	-.004 ± .011	.620 ± .013	.429 ± .006	.894 ± .011	1.503 ± .019	2.091 ± .026
15000.	-8.054 ± .045	-.009 ± .014	.631 ± .018	.435 ± .008	.906 ± .015	1.522 ± .024	2.114 ± .034
20000.	-7.917 ± .046	.015 ± .017	.706 ± .018	.470 ± .008	.967 ± .015	1.612 ± .024	2.225 ± .035

Tabella A.8: *Colori integrati nelle bande Johson-Cousins del modello a $V = -8$ ottenuti con esponente della IMF $s = 2.6$ per $M > 0.5\,M_{\odot}$.*

età (Myr)	V	$(U-B)$	$(B-V)$	$(V-R)$	$(V-I)$	$(V-J)$	$(V-K)$
50.	-7.976 ± .102	-.558 ± .021	-.103 ± .046	-.025 ± .047	-.032 ± .117	-.064 ± .256	.020 ± .417
70.	-8.093 ± .099	-.444 ± .026	.048 ± .071	.120 ± .064	.321 ± .143	.674 ± .257	1.159 ± .344
100.	-7.921 ± .098	-.385 ± .023	-.007 ± .063	.055 ± .064	.162 ± .154	.351 ± .319	.656 ± .495
150.	-7.952 ± .084	-.298 ± .018	.021 ± .057	.071 ± .059	.200 ± .143	.422 ± .301	.747 ± .483
200.	-7.926 ± .088	-.227 ± .020	.077 ± .050	.120 ± .048	.317 ± .109	.660 ± .207	1.114 ± .298
300.	-7.925 ± .078	-.134 ± .016	.105 ± .041	.128 ± .042	.329 ± .099	.666 ± .201	1.088 ± .320
400.	-8.061 ± .092	-.048 ± .015	.165 ± .042	.171 ± .035	.423 ± .076	.840 ± .132	1.338 ± .180
500.	-7.998 ± .034	-.023 ± .006	.196 ± .018	.185 ± .018	.446 ± .040	.860 ± .079	1.336 ± .121
600.	-8.074 ± .093	-.002 ± .019	.259 ± .053	.222 ± .046	.516 ± .099	.956 ± .180	1.438 ± .265
800.	-7.992 ± .033	.003 ± .011	.345 ± .029	.278 ± .025	.628 ± .054	1.133 ± .099	1.674 ± .145
1000.	-7.959 ± .061	-.006 ± .013	.363 ± .031	.283 ± .024	.633 ± .050	1.125 ± .091	1.644 ± .134
1100.	-8.010 ± .022	-.004 ± .006	.379 ± .012	.292 ± .009	.650 ± .018	1.151 ± .032	1.675 ± .046
1500.	-7.998 ± .042	.009 ± .009	.408 ± .018	.306 ± .014	.675 ± .030	1.183 ± .055	1.708 ± .082
1700.	-8.025 ± .051	.019 ± .009	.429 ± .019	.318 ± .013	.697 ± .026	1.218 ± .046	1.753 ± .067
2000.	-8.017 ± .046	.021 ± .008	.437 ± .018	.320 ± .011	.701 ± .021	1.219 ± .034	1.749 ± .048
3000.	-8.033 ± .039	.022 ± .007	.492 ± .011	.349 ± .007	.752 ± .014	1.291 ± .027	1.834 ± .040
4000.	-8.017 ± .045	.012 ± .012	.542 ± .019	.376 ± .012	.799 ± .023	1.357 ± .040	1.911 ± .059
5000.	-7.973 ± .038	-.009 ± .010	.554 ± .015	.383 ± .008	.809 ± .016	1.367 ± .027	1.917 ± .039
6000.	-7.954 ± .036	-.026 ± .009	.566 ± .013	.390 ± .007	.822 ± .013	1.382 ± .023	1.929 ± .034
7000.	-8.002 ± .038	-.026 ± .011	.589 ± .014	.404 ± .007	.846 ± .014	1.418 ± .024	1.975 ± .034
8000.	-8.033 ± .030	-.023 ± .012	.607 ± .016	.413 ± .008	.863 ± .016	1.444 ± .027	2.008 ± .038
9000.	-8.019 ± .040	-.016 ± .009	.613 ± .010	.418 ± .005	.872 ± .009	1.460 ± .015	2.029 ± .022
10000.	-7.991 ± .048	-.004 ± .011	.609 ± .013	.418 ± .007	.873 ± .013	1.464 ± .022	2.035 ± .033
11000.	-8.015 ± .032	.001 ± .009	.602 ± .011	.419 ± .006	.875 ± .012	1.471 ± .021	2.046 ± .030
12000.	-8.028 ± .043	.004 ± .009	.609 ± .010	.424 ± .005	.886 ± .010	1.490 ± .016	2.072 ± .023
13000.	-8.038 ± .046	.004 ± .014	.618 ± .019	.431 ± .009	.898 ± .017	1.510 ± .028	2.100 ± .039
14000.	-8.024 ± .045	-.001 ± .013	.626 ± .015	.435 ± .006	.906 ± .012	1.522 ± .021	2.112 ± .030
15000.	-7.989 ± .043	-.009 ± .013	.634 ± .015	.441 ± .007	.916 ± .013	1.537 ± .022	2.131 ± .032
20000.	-7.998 ± .032	.001 ± .013	.689 ± .018	.466 ± .008	.958 ± .015	1.598 ± .025	2.200 ± .036

Tabella A.9: *Rapporti M/L, nelle bande Johnson-Cousins, del modello a $V = -8$ ottenuti con esponente della IMF $s = 2.0$ per $M > 0.5\,M_\odot$.*

età(Myr)	$(M/L)_V$	$(M/L)_U$	$(M/L)_B$	$(M/L)_R$	$(M/L)_I$	$(M/L)_J$	$(M/L)_K$
50.	.073 ± .006	.019 ± .001	.036 ± .003	.105 ± .011	.149 ± .022	.236 ± .058	.319 ± .122
70.	.071 ± .008	.024 ± .001	.039 ± .003	.091 ± .015	.108 ± .025	.123 ± .041	.117 ± .049
100.	.091 ± .007	.031 ± .001	.049 ± .003	.120 ± .013	.150 ± .026	.186 ± .059	.197 ± .098
150.	.107 ± .009	.041 ± .003	.059 ± .004	.140 ± .016	.172 ± .029	.211 ± .058	.222 ± .090
200.	.110 ± .015	.048 ± .001	.064 ± .003	.138 ± .030	.162 ± .052	.186 ± .092	.190 ± .136
300.	.134 ± .010	.065 ± .002	.080 ± .003	.166 ± .018	.191 ± .029	.208 ± .049	.199 ± .065
400.	.144 ± .012	.081 ± .002	.091 ± .003	.171 ± .023	.187 ± .037	.192 ± .058	.175 ± .072
500.	.165 ± .005	.097 ± .002	.106 ± .002	.196 ± .011	.215 ± .019	.223 ± .033	.208 ± .046
600.	.176 ± .006	.113 ± .004	.122 ± .004	.199 ± .012	.209 ± .020	.207 ± .032	.186 ± .040
800.	.231 ± .011	.155 ± .003	.169 ± .005	.255 ± .017	.260 ± .022	.250 ± .028	.220 ± .031
1000.	.262 ± .008	.182 ± .004	.199 ± .004	.282 ± .012	.284 ± .015	.270 ± .019	.237 ± .023
1100.	.277 ± .018	.198 ± .006	.215 ± .009	.296 ± .025	.295 ± .031	.279 ± .038	.245 ± .041
1500.	.357 ± .020	.268 ± .008	.287 ± .010	.374 ± .028	.366 ± .033	.338 ± .040	.292 ± .043
1700.	.386 ± .015	.297 ± .006	.315 ± .008	.401 ± .021	.390 ± .025	.359 ± .029	.309 ± .030
2000.	.454 ± .019	.349 ± .008	.371 ± .011	.474 ± .024	.462 ± .027	.428 ± .029	.371 ± .028
3000.	.576 ± .024	.479 ± .009	.504 ± .013	.580 ± .030	.551 ± .034	.495 ± .037	.418 ± .037
4000.	.697 ± .043	.602 ± .014	.641 ± .025	.686 ± .053	.640 ± .058	.568 ± .064	.478 ± .064
5000.	.912 ± .035	.774 ± .012	.846 ± .021	.897 ± .041	.839 ± .045	.751 ± .048	.638 ± .048
6000.	1.060 ± .033	.911 ± .018	1.007 ± .025	1.032 ± .037	.957 ± .039	.850 ± .040	.720 ± .039
7000.	1.173 ± .050	1.038 ± .026	1.146 ± .038	1.128 ± .055	1.036 ± .057	.909 ± .058	.763 ± .056
8000.	1.303 ± .043	1.181 ± .027	1.300 ± .037	1.241 ± .045	1.130 ± .044	.982 ± .042	.818 ± .039
9000.	1.387 ± .049	1.280 ± .019	1.398 ± .033	1.315 ± .055	1.193 ± .058	1.031 ± .060	.854 ± .058
10000.	1.510 ± .063	1.408 ± .028	1.525 ± .047	1.431 ± .069	1.297 ± .071	1.115 ± .071	.921 ± .067
11000.	1.603 ± .055	1.517 ± .037	1.625 ± .047	1.515 ± .058	1.369 ± .058	1.169 ± .056	.959 ± .052
12000.	1.774 ± .070	1.661 ± .029	1.793 ± .051	1.681 ± .079	1.522 ± .082	1.303 ± .082	1.073 ± .079
13000.	1.933 ± .059	1.811 ± .030	1.969 ± .044	1.826 ± .068	1.649 ± .072	1.407 ± .074	1.157 ± .073
14000.	2.050 ± .084	1.945 ± .051	2.122 ± .074	1.925 ± .087	1.731 ± .086	1.468 ± .081	1.201 ± .075
15000.	2.090 ± .087	2.007 ± .037	2.198 ± .066	1.950 ± .094	1.745 ± .095	1.472 ± .093	1.200 ± .086
20000.	1.895 ± .081	2.051 ± .048	2.200 ± .076	1.713 ± .083	1.497 ± .082	1.227 ± .077	.982 ± .070

Tabella A.10: *Rapporti M/L, nelle bande Johnson-Cousins, del modello a $V = -8$ ottenuti con esponente della IMF $s = 2.6$ per $M > 0.5\,M_{\odot}$.*

età(Myr)	$(M/L)_V$	$(M/L)_U$	$(M/L)_B$	$(M/L)_R$	$(M/L)_I$	$(M/L)_J$	$(M/L)_K$
50.	.176 ± .016	.048 ± .002	.087 ± .005	.252 ± .031	.353 ± .059	.553 ± .138	.748 ± .248
70.	.161 ± .014	.056 ± .004	.091 ± .006	.201 ± .026	.233 ± .045	.256 ± .072	.235 ± .083
100.	.189 ± .017	.066 ± .004	.102 ± .006	.251 ± .035	.318 ± .067	.413 ± .142	.465 ± .222
150.	.207 ± .016	.080 ± .003	.114 ± .005	.271 ± .035	.336 ± .069	.422 ± .149	.470 ± .247
200.	.218 ± .017	.095 ± .004	.127 ± .006	.273 ± .032	.316 ± .053	.348 ± .087	.330 ± .109
300.	.250 ± .018	.122 ± .003	.149 ± .006	.310 ± .035	.358 ± .062	.398 ± .116	.393 ± .177
400.	.248 ± .021	.138 ± .006	.157 ± .008	.297 ± .035	.326 ± .050	.333 ± .067	.298 ± .072
500.	.276 ± .008	.162 ± .005	.180 ± .006	.324 ± .011	.351 ± .016	.358 ± .027	.325 ± .037
600.	.285 ± .024	.181 ± .006	.197 ± .009	.325 ± .039	.344 ± .057	.346 ± .080	.318 ± .096
800.	.333 ± .010	.231 ± .003	.250 ± .003	.359 ± .019	.360 ± .028	.337 ± .039	.289 ± .045
1000.	.388 ± .022	.271 ± .006	.297 ± .010	.417 ± .032	.418 ± .042	.396 ± .054	.347 ± .060
1100.	.405 ± .008	.289 ± .006	.315 ± .005	.432 ± .010	.428 ± .013	.402 ± .016	.349 ± .018
1500.	.503 ± .019	.374 ± .010	.403 ± .011	.528 ± .025	.519 ± .031	.484 ± .038	.421 ± .043
1700.	.531 ± .025	.407 ± .010	.434 ± .013	.552 ± .032	.538 ± .038	.495 ± .044	.426 ± .046
2000.	.597 ± .025	.463 ± .011	.493 ± .014	.619 ± .032	.602 ± .037	.555 ± .041	.480 ± .041
3000.	.738 ± .026	.608 ± .016	.647 ± .019	.746 ± .030	.711 ± .032	.643 ± .034	.549 ± .034
4000.	.867 ± .037	.745 ± .014	.800 ± .022	.855 ± .045	.800 ± .050	.711 ± .055	.601 ± .056
5000.	1.052 ± .037	.904 ± .021	.991 ± .027	1.031 ± .042	.960 ± .046	.854 ± .049	.724 ± .049
6000.	1.216 ± .040	1.049 ± .019	1.167 ± .029	1.182 ± .045	1.097 ± .048	.974 ± .051	.827 ± .051
7000.	1.334 ± .046	1.183 ± .021	1.316 ± .034	1.282 ± .052	1.178 ± .054	1.033 ± .055	.870 ± .054
8000.	1.430 ± .040	1.298 ± .017	1.440 ± .026	1.362 ± .048	1.242 ± .052	1.081 ± .055	.905 ± .056
9000.	1.521 ± .057	1.405 ± .036	1.549 ± .050	1.442 ± .059	1.310 ± .058	1.133 ± .056	.944 ± .052
10000.	1.604 ± .071	1.496 ± .042	1.633 ± .060	1.521 ± .076	1.381 ± .077	1.191 ± .076	.990 ± .072
11000.	1.737 ± .050	1.631 ± .033	1.771 ± .044	1.646 ± .053	1.493 ± .055	1.281 ± .055	1.061 ± .054
12000.	1.836 ± .072	1.749 ± .052	1.893 ± .068	1.731 ± .073	1.562 ± .071	1.331 ± .066	1.095 ± .060
13000.	1.921 ± .081	1.852 ± .035	2.005 ± .060	1.801 ± .090	1.617 ± .092	1.367 ± .091	1.118 ± .086
14000.	2.019 ± .085	1.962 ± .050	2.134 ± .075	1.885 ± .090	1.687 ± .089	1.422 ± .085	1.161 ± .078
15000.	2.129 ± .084	2.086 ± .041	2.285 ± .070	1.977 ± .090	1.763 ± .090	1.478 ± .087	1.203 ± .082
20000.	2.518 ± .074	2.712 ± .040	2.945 ± .062	2.284 ± .081	2.005 ± .083	1.652 ± .082	1.335 ± .079

Tabella A.11: *Colori integrati nelle bande Johnson-Cousins dei modelli a* $V = -8$ *ottenuti con efficienza della perdita di massa* $\eta = 0.4$ *e dispersione* $\sigma_\eta = 0.02$.

Myr	V	$(U-B)$	$(B-V)$	$(V-R)$	$(V-I)$	$(V-J)$	$(V-K)$
5000.	-8.015 ± .055	-.011 ± .015	.547 ± .021	.377 ± .012	.798 ± .023	1.347 ± .038	1.890 ± .055
6000.	-8.018 ± .026	-.019 ± .008	.573 ± .011	.393 ± .006	.826 ± .011	1.389 ± .018	1.942 ± .026
7000.	-8.029 ± .037	-.017 ± .009	.598 ± .012	.406 ± .006	.851 ± .012	1.426 ± .020	1.988 ± .028
8000.	-7.995 ± .033	-.021 ± .011	.601 ± .014	.409 ± .007	.856 ± .014	1.434 ± .023	1.997 ± .033
9000.	-7.993 ± .021	-.005 ± .008	.597 ± .011	.409 ± .006	.857 ± .011	1.439 ± .018	2.005 ± .025
10000.	-7.933 ± .033	.007 ± .010	.589 ± .015	.410 ± .008	.862 ± .015	1.453 ± .024	2.028 ± .034
11000.	-7.993 ± .035	-.003 ± .008	.587 ± .011	.412 ± .005	.865 ± .010	1.459 ± .017	2.035 ± .024
12000.	-7.968 ± .046	-.012 ± .011	.606 ± .013	.423 ± .006	.885 ± .011	1.489 ± .018	2.074 ± .026
13000.	-8.024 ± .046	-.022 ± .014	.626 ± .018	.434 ± .009	.903 ± .017	1.517 ± .028	2.108 ± .040
14000.	-7.967 ± .038	-.021 ± .012	.645 ± .014	.442 ± .006	.917 ± .012	1.536 ± .020	2.130 ± .029
15000.	-7.976 ± .043	-.034 ± .016	.643 ± .019	.441 ± .008	.915 ± .016	1.532 ± .027	2.120 ± .039
20000.	-8.028 ± .032	.010 ± .010	.699 ± .012	.469 ± .005	.963 ± .009	1.608 ± .015	2.216 ± .021

Tabella A.12: *Rapporti* M/L *nelle bande Johson-Cousins dei modelli a* $V = -8$ *ottenuti con efficienza della perdita di massa* $\eta = 0.4$ *e dispersione* $\sigma_\eta = 0.02$.

Myr	$(M/L)_V$	$(M/L)_U$	$(M/L)_B$	$(M/L)_R$	$(M/L)_I$	$(M/L)_J$	$(M/L)_K$
5000.	.988 ± .049	.837 ± .018	.919 ± .031	.973 ± .057	.912 ± .062	.818 ± .067	.698 ± .067
6000.	1.124 ± .027	.974 ± .013	1.078 ± .019	1.091 ± .030	1.010 ± .032	.894 ± .034	.755 ± .034
7000.	1.223 ± .042	1.093 ± .020	1.206 ± .031	1.173 ± .046	1.075 ± .048	.941 ± .049	.788 ± .047
8000.	1.361 ± .042	1.222 ± .016	1.354 ± .028	1.301 ± .048	1.189 ± .051	1.038 ± .053	.870 ± .052
9000.	1.446 ± .029	1.318 ± .016	1.439 ± .022	1.382 ± .034	1.263 ± .036	1.098 ± .038	.917 ± .038
10000.	1.585 ± .049	1.460 ± .019	1.576 ± .032	1.513 ± .057	1.378 ± .061	1.189 ± .062	.984 ± .060
11000.	1.719 ± .055	1.575 ± .036	1.716 ± .049	1.638 ± .058	1.490 ± .058	1.282 ± .056	1.060 ± .052
12000.	1.830 ± .077	1.702 ± .045	1.870 ± .066	1.727 ± .080	1.558 ± .079	1.327 ± .075	1.090 ± .068
13000.	1.950 ± .080	1.841 ± .036	2.041 ± .061	1.823 ± .088	1.633 ± .090	1.380 ± .088	1.126 ± .083
14000.	2.049 ± .072	1.979 ± .034	2.192 ± .057	1.901 ± .077	1.695 ± .077	1.424 ± .075	1.159 ± .071
15000.	2.198 ± .088	2.114 ± .039	2.371 ± .069	2.039 ± .096	1.820 ± .098	1.534 ± .097	1.255 ± .093
20000.	2.294 ± .069	2.485 ± .046	2.676 ± .068	2.076 ± .070	1.817 ± .067	1.492 ± .062	1.198 ± .057

Tabella A.13: *Colori integrati del modello standard a $V = -8$ nelle bande WFPC2.*

Myr	$(V{-}I)_J$	$V{-}F439W(1)$	$V{-}F555W(1)$	$V{-}F814W(1)$	$V{-}F439W(2)$	$V{-}F555W(2)$	$V{-}F814W(2)$
50.	-.031 ± .122	.091 ± .039	.010 ± .003	-.019 ± .099	.092 ± .039	.009 ± .003	-.019 ± .099
70.	.368 ± .184	-.069 ± .082	-.002 ± .005	.313 ± .156	-.068 ± .082	-.002 ± .005	.312 ± .155
100.	.202 ± .205	-.011 ± .076	.002 ± .005	.172 ± .171	-.010 ± .076	.002 ± .005	.171 ± .170
150.	.200 ± .096	-.021 ± .035	.000 ± .002	.169 ± .080	-.020 ± .035	.000 ± .002	.168 ± .079
200.	.406 ± .118	-.108 ± .049	-.006 ± .003	.341 ± .100	-.108 ± .049	-.006 ± .003	.340 ± .100
300.	.458 ± .172	-.156 ± .072	-.009 ± .004	.387 ± .146	-.155 ± .072	-.009 ± .004	.385 ± .146
400.	.462 ± .102	-.177 ± .047	-.011 ± .003	.391 ± .088	-.176 ± .048	-.011 ± .003	.390 ± .087
500.	.498 ± .084	-.213 ± .036	-.013 ± .002	.424 ± .071	-.212 ± .036	-.013 ± .002	.423 ± .071
600.	.578 ± .069	-.284 ± .036	-.018 ± .002	.497 ± .059	-.283 ± .036	-.018 ± .002	.496 ± .059
800.	.691 ± .077	-.380 ± .043	-.023 ± .002	.599 ± .066	-.379 ± .043	-.023 ± .002	.598 ± .066
1000.	.700 ± .034	-.400 ± .018	-.024 ± .001	.609 ± .029	-.399 ± .018	-.024 ± .001	.607 ± .029
1100.	.725 ± .047	-.428 ± .030	-.026 ± .001	.633 ± .041	-.427 ± .030	-.025 ± .001	.631 ± .040
1500.	.739 ± .029	-.450 ± .019	-.027 ± .001	.646 ± .025	-.449 ± .019	-.026 ± .001	.644 ± .025
1700.	.756 ± .036	-.466 ± .023	-.028 ± .001	.660 ± .031	-.465 ± .023	-.027 ± .001	.659 ± .031
2000.	.783 ± .023	-.494 ± .014	-.029 ± .000	.685 ± .020	-.493 ± .014	-.028 ± .001	.683 ± .019
3000.	.825 ± .023	-.553 ± .018	-.032 ± .001	.723 ± .020	-.552 ± .018	-.031 ± .001	.722 ± .019
4000.	.864 ± .023	-.600 ± .020	-.034 ± .001	.759 ± .020	-.599 ± .020	-.033 ± .001	.757 ± .020
5000.	.862 ± .020	-.609 ± .018	-.034 ± .001	.759 ± .018	-.608 ± .018	-.033 ± .001	.757 ± .018
6000.	.905 ± .012	-.649 ± .011	-.035 ± .001	.797 ± .010	-.649 ± .011	-.035 ± .001	.795 ± .010
7000.	.920 ± .022	-.671 ± .020	-.036 ± .001	.811 ± .019	-.670 ± .021	-.035 ± .001	.810 ± .019
8000.	.940 ± .015	-.690 ± .014	-.037 ± .001	.829 ± .013	-.689 ± .014	-.036 ± .001	.827 ± .013
9000.	.950 ± .017	-.699 ± .016	-.037 ± .001	.837 ± .014	-.698 ± .016	-.036 ± .001	.835 ± .014
10000.	.958 ± .014	-.701 ± .013	-.037 ± .001	.844 ± .012	-.700 ± .014	-.036 ± .000	.842 ± .012
11000.	.956 ± .011	-.690 ± .011	-.036 ± .000	.842 ± .009	-.689 ± .011	-.035 ± .000	.840 ± .009
12000.	.966 ± .013	-.695 ± .013	-.036 ± .001	.850 ± .012	-.695 ± .013	-.035 ± .000	.848 ± .012
13000.	.984 ± .018	-.712 ± .018	-.037 ± .001	.866 ± .016	-.711 ± .017	-.036 ± .001	.863 ± .015
14000.	.991 ± .013	-.720 ± .013	-.037 ± .001	.872 ± .011	-.719 ± .013	-.036 ± .001	.870 ± .011
15000.	.990 ± .018	-.721 ± .018	-.037 ± .001	.872 ± .016	-.720 ± .018	-.036 ± .001	.870 ± .016
20000.	1.054 ± .011	-.804 ± .012	-.039 ± .001	.929 ± .009	-.803 ± .012	-.038 ± .000	.926 ± .009

Tabella A.14: *Colori integrati del modello standard a $V = -8$ nelle bande WFPC2.*

Myr	$V{-}F439W(3)$	$V{-}F555W(3)$	$V{-}F814W(3)$	$V{-}F439W(4)$	$V{-}F555W(4)$	$V{-}F814W(4)$
50.	.091 ± .039	.010 ± .003	-.019 ± .100	.092 ± .039	.010 ± .003	-.019 ± .099
70.	-.069 ± .082	-.003 ± .006	.314 ± .156	-.068 ± .082	-.002 ± .005	.313 ± .156
100.	-.011 ± .076	.001 ± .005	.173 ± .171	-.010 ± .076	.002 ± .005	.172 ± .171
150.	-.021 ± .035	.000 ± .003	.169 ± .080	-.020 ± .035	.000 ± .003	.169 ± .080
200.	-.108 ± .049	-.006 ± .003	.343 ± .100	-.107 ± .049	-.006 ± .003	.342 ± .100
300.	-.156 ± .072	-.010 ± .004	.388 ± .147	-.155 ± .072	-.009 ± .004	.387 ± .146
400.	-.177 ± .048	-.012 ± .003	.393 ± .088	-.176 ± .048	-.011 ± .003	.392 ± .088
500.	-.213 ± .036	-.015 ± .002	.426 ± .071	-.212 ± .036	-.014 ± .002	.425 ± .071
600.	-.284 ± .036	-.019 ± .002	.499 ± .059	-.283 ± .036	-.018 ± .002	.498 ± .059
800.	-.380 ± .043	-.025 ± .002	.601 ± .066	-.379 ± .043	-.024 ± .002	.600 ± .066
1000.	-.400 ± .018	-.026 ± .001	.611 ± .029	-.399 ± .018	-.025 ± .001	.610 ± .029
1100.	-.428 ± .030	-.027 ± .001	.635 ± .041	-.427 ± .030	-.026 ± .001	.634 ± .041
1500.	-.450 ± .019	-.029 ± .001	.648 ± .025	-.449 ± .019	-.027 ± .001	.647 ± .025
1700.	-.466 ± .023	-.029 ± .001	.663 ± .031	-.465 ± .023	-.028 ± .001	.662 ± .031
2000.	-.494 ± .014	-.031 ± .001	.687 ± .020	-.493 ± .014	-.029 ± .001	.686 ± .020
3000.	-.553 ± .018	-.034 ± .001	.726 ± .019	-.552 ± .018	-.032 ± .001	.725 ± .019
4000.	-.600 ± .020	-.036 ± .001	.762 ± .020	-.599 ± .020	-.034 ± .001	.760 ± .020
5000.	-.609 ± .018	-.036 ± .001	.761 ± .018	-.608 ± .018	-.035 ± .001	.760 ± .018
6000.	-.650 ± .011	-.038 ± .001	.800 ± .011	-.649 ± .011	-.036 ± .000	.798 ± .011
7000.	-.671 ± .021	-.039 ± .001	.814 ± .019	-.670 ± .021	-.037 ± .001	.813 ± .019
8000.	-.690 ± .014	-.039 ± .000	.831 ± .013	-.689 ± .014	-.037 ± .000	.830 ± .013
9000.	-.700 ± .016	-.039 ± .001	.840 ± .015	-.698 ± .016	-.038 ± .000	.838 ± .014
10000.	-.701 ± .013	-.039 ± .000	.846 ± .012	-.700 ± .014	-.038 ± .001	.845 ± .012
11000.	-.690 ± .011	-.038 ± .001	.844 ± .010	-.689 ± .011	-.037 ± .000	.843 ± .009
12000.	-.696 ± .013	-.039 ± .001	.853 ± .012	-.695 ± .013	-.037 ± .001	.851 ± .012
13000.	-.712 ± .017	-.039 ± .001	.868 ± .016	-.711 ± .017	-.037 ± .001	.867 ± .016
14000.	-.720 ± .014	-.039 ± .000	.875 ± .012	-.719 ± .013	-.037 ± .001	.873 ± .012
15000.	-.722 ± .018	-.039 ± .001	.874 ± .016	-.720 ± .018	-.037 ± .001	.873 ± .016
20000.	-.804 ± .012	-.042 ± .000	.931 ± .009	-.803 ± .012	-.040 ± .000	.930 ± .010

Tabella A.15: *Colori integrati del modello standard a $V = -4$ nelle bande WFPC2.*

Myr	$(V-I)_J$	$V-F439W(1)$	$V-F555W(1)$	$V-F814W(1)$	$V-F439W(2)$	$V-F555W(2)$	$V-F814W(2)$
50.	-.102 ± .184	.107 ± .082	.011 ± .006	-.074 ± .153	.108 ± .082	.011 ± .006	-.073 ± .153
70.	-.041 ± .298	.062 ± .175	.008 ± .011	-.022 ± .254	.063 ± .175	.008 ± .011	-.022 ± .254
100.	.218 ± .532	-.107 ± .344	-.002 ± .019	.198 ± .458	-.106 ± .344	-.002 ± .019	.198 ± .456
150.	-.017 ± .049	.050 ± .024	.005 ± .002	-.009 ± .041	.051 ± .024	.005 ± .002	-.009 ± .041
200.	.124 ± .355	-.038 ± .219	.000 ± .012	.110 ± .308	-.038 ± .219	.000 ± .011	.109 ± .307
300.	.276 ± .237	-.114 ± .136	-.007 ± .008	.238 ± .205	-.113 ± .136	-.007 ± .008	.237 ± .204
400.	.333 ± .307	-.164 ± .223	-.009 ± .011	.287 ± .269	-.163 ± .223	-.010 ± .010	.286 ± .268
500.	.415 ± .298	-.213 ± .202	-.013 ± .010	.359 ± .260	-.212 ± .202	-.013 ± .009	.358 ± .259
600.	.383 ± .114	-.187 ± .059	-.013 ± .003	.331 ± .099	-.186 ± .059	-.013 ± .003	.330 ± .099
800.	.638 ± .311	-.388 ± .226	-.023 ± .010	.557 ± .272	-.387 ± .226	-.022 ± .009	.555 ± .271
1000.	.636 ± .260	-.374 ± .161	-.022 ± .006	.556 ± .225	-.373 ± .161	-.022 ± .006	.554 ± .224
1100.	.684 ± .136	-.423 ± .110	-.025 ± .005	.599 ± .119	-.422 ± .110	-.025 ± .005	.597 ± .119
1500.	.817 ± .210	-.537 ± .172	-.030 ± .007	.715 ± .184	-.536 ± .172	-.029 ± .006	.714 ± .183
1700.	.715 ± .104	-.447 ± .082	-.027 ± .004	.625 ± .091	-.446 ± .083	-.026 ± .004	.624 ± .091
2000.	.704 ± .101	-.449 ± .078	-.027 ± .003	.617 ± .087	-.448 ± .078	-.026 ± .003	.616 ± .087
3000.	.837 ± .123	-.574 ± .104	-.032 ± .004	.735 ± .107	-.573 ± .104	-.032 ± .003	.734 ± .106
4000.	.835 ± .080	-.581 ± .072	-.033 ± .002	.735 ± .069	-.580 ± .072	-.032 ± .002	.733 ± .069
5000.	.857 ± .128	-.610 ± .117	-.034 ± .004	.755 ± .111	-.609 ± .117	-.033 ± .004	.754 ± .110
6000.	.850 ± .062	-.608 ± .058	-.034 ± .002	.750 ± .054	-.607 ± .059	-.033 ± .002	.748 ± .054
7000.	.958 ± .084	-.708 ± .078	-.037 ± .003	.844 ± .072	-.707 ± .078	-.036 ± .002	.843 ± .072
8000.	.929 ± .091	-.689 ± .091	-.037 ± .003	.819 ± .080	-.688 ± .091	-.036 ± .003	.818 ± .079
9000.	.959 ± .097	-.719 ± .105	-.037 ± .003	.846 ± .085	-.718 ± .105	-.037 ± .003	.844 ± .084
10000.	.959 ± .106	-.712 ± .108	-.037 ± .003	.845 ± .093	-.712 ± .108	-.036 ± .003	.843 ± .092
11000.	.996 ± .079	-.736 ± .080	-.038 ± .003	.876 ± .069	-.735 ± .080	-.037 ± .002	.874 ± .069
12000.	.947 ± .097	-.684 ± .095	-.035 ± .003	.834 ± .084	-.683 ± .095	-.035 ± .003	.832 ± .084
13000.	.950 ± .074	-.687 ± .075	-.036 ± .003	.836 ± .064	-.686 ± .075	-.035 ± .003	.834 ± .064
14000.	.978 ± .102	-.716 ± .102	-.036 ± .003	.861 ± .089	-.715 ± .102	-.035 ± .003	.859 ± .089
15000.	1.008 ± .107	-.746 ± .115	-.037 ± .004	.887 ± .093	-.746 ± .115	-.036 ± .004	.885 ± .093
20000.	1.030 ± .087	-.787 ± .098	-.039 ± .003	.908 ± .076	-.786 ± .098	-.038 ± .003	.906 ± .076

Tabella A.16: *Colori integrati del modello standard a $V = -4$ nelle bande WFPC2.*

Myr	$V{-}F439W(3)$	$V{-}F555W(3)$	$V{-}F814W(3)$	$V{-}F439W(4)$	$V{-}F555W(4)$	$V{-}F814W(4)$
50.	.107 ± .082	.011 ± .006	-.074 ± .154	.108 ± .082	.011 ± .006	-.074 ± .153
70.	.062 ± .175	.008 ± .012	-.023 ± .255	.063 ± .175	.008 ± .012	-.022 ± .255
100.	-.107 ± .344	-.003 ± .021	.199 ± .459	-.106 ± .344	-.002 ± .020	.199 ± .458
150.	.050 ± .024	.005 ± .002	-.009 ± .042	.051 ± .024	.005 ± .002	-.009 ± .041
200.	-.038 ± .219	-.001 ± .012	.110 ± .309	-.037 ± .219	.000 ± .012	.110 ± .308
300.	-.114 ± .136	-.008 ± .009	.239 ± .206	-.113 ± .136	-.007 ± .008	.239 ± .205
400.	-.164 ± .223	-.011 ± .011	.288 ± .270	-.163 ± .223	-.010 ± .011	.288 ± .269
500.	-.213 ± .202	-.014 ± .010	.360 ± .261	-.212 ± .202	-.013 ± .010	.360 ± .260
600.	-.187 ± .059	-.014 ± .004	.332 ± .099	-.186 ± .059	-.013 ± .004	.332 ± .099
800.	-.389 ± .226	-.024 ± .011	.558 ± .273	-.388 ± .226	-.023 ± .010	.558 ± .272
1000.	-.374 ± .161	-.024 ± .007	.557 ± .226	-.373 ± .161	-.023 ± .006	.557 ± .225
1100.	-.423 ± .110	-.027 ± .005	.601 ± .119	-.422 ± .110	-.026 ± .005	.600 ± .119
1500.	-.537 ± .172	-.032 ± .007	.718 ± .184	-.536 ± .172	-.030 ± .007	.716 ± .184
1700.	-.447 ± .082	-.029 ± .004	.627 ± .092	-.446 ± .083	-.027 ± .004	.627 ± .091
2000.	-.449 ± .078	-.029 ± .004	.619 ± .088	-.448 ± .078	-.028 ± .003	.618 ± .088
3000.	-.574 ± .104	-.034 ± .004	.738 ± .107	-.573 ± .104	-.033 ± .003	.737 ± .107
4000.	-.581 ± .072	-.035 ± .003	.737 ± .070	-.580 ± .072	-.034 ± .003	.735 ± .069
5000.	-.610 ± .117	-.036 ± .004	.757 ± .111	-.609 ± .117	-.035 ± .004	.756 ± .111
6000.	-.608 ± .059	-.036 ± .002	.752 ± .054	-.607 ± .059	-.035 ± .002	.751 ± .054
7000.	-.708 ± .078	-.040 ± .003	.847 ± .073	-.707 ± .078	-.038 ± .003	.845 ± .072
8000.	-.689 ± .091	-.039 ± .003	.822 ± .080	-.688 ± .091	-.037 ± .003	.821 ± .079
9000.	-.719 ± .104	-.040 ± .003	.848 ± .085	-.718 ± .104	-.038 ± .003	.847 ± .085
10000.	-.713 ± .108	-.039 ± .004	.848 ± .093	-.712 ± .108	-.038 ± .003	.847 ± .093
11000.	-.736 ± .080	-.040 ± .003	.879 ± .070	-.735 ± .080	-.038 ± .003	.877 ± .070
12000.	-.684 ± .095	-.038 ± .003	.836 ± .085	-.683 ± .095	-.036 ± .003	.835 ± .084
13000.	-.687 ± .075	-.038 ± .003	.839 ± .065	-.686 ± .075	-.036 ± .003	.837 ± .064
14000.	-.716 ± .102	-.039 ± .004	.864 ± .089	-.715 ± .102	-.037 ± .004	.862 ± .089
15000.	-.747 ± .115	-.040 ± .004	.890 ± .094	-.746 ± .115	-.038 ± .004	.888 ± .093
20000.	-.787 ± .098	-.041 ± .003	.910 ± .077	-.786 ± .098	-.039 ± .003	.909 ± .076

Tabella A.17: *Colori integrati del modello standard a $V = -8$ nelle bande NICMOS.*

Myr	$V{-}F110W(1)$	$V{-}F160W(1)$	$V{-}F110W(2)$	$V{-}F160W(2)$
50.	-.039 ± .185	.092 ± .367	-.041 ± .186	.092± .366
70.	.530 ± .248	1.061 ± .378	.529 ± .249	1.060± .378
100.	.295 ± .293	.653 ± .515	.294 ± .294	.652± .514
150.	.292 ± .140	.647 ± .265	.291 ± .141	.646± .265
200.	.580 ± .161	1.122 ± .258	.580 ± .162	1.121± .258
300.	.642 ± .236	1.183 ± .384	.642 ± .236	1.182± .383
400.	.644 ± .139	1.175 ± .225	.645 ± .139	1.173± .224
500.	.686 ± .117	1.217 ± .205	.686 ± .117	1.216± .204
600.	.782 ± .093	1.341 ± .152	.782 ± .093	1.339± .152
800.	.923 ± .104	1.537 ± .168	.923 ± .104	1.536± .167
1000.	.928 ± .048	1.534 ± .081	.928 ± .048	1.533± .081
1100.	.959 ± .063	1.570 ± .099	.959 ± .063	1.569± .099
1500.	.973 ± .038	1.583 ± .061	.973 ± .038	1.582± .061
1700.	.994 ± .049	1.614 ± .077	.994 ± .049	1.612± .078
2000.	1.028 ± .031	1.659 ± .050	1.028 ± .031	1.657± .050
3000.	1.074 ± .030	1.710 ± .046	1.074 ± .030	1.709± .046
4000.	1.120 ± .030	1.767 ± .045	1.120 ± .030	1.766± .045
5000.	1.113 ± .027	1.749 ± .040	1.113 ± .027	1.747± .040
6000.	1.167 ± .016	1.823 ± .025	1.167 ± .016	1.821± .024
7000.	1.185 ± .028	1.845 ± .043	1.185 ± .028	1.843± .043
8000.	1.209 ± .020	1.879 ± .031	1.210 ± .020	1.877± .030
9000.	1.222 ± .022	1.896 ± .033	1.222 ± .022	1.895± .033
10000.	1.234 ± .018	1.917 ± .027	1.234 ± .018	1.915± .027
11000.	1.232 ± .014	1.915 ± .021	1.233 ± .014	1.913± .021
12000.	1.246 ± .017	1.936 ± .026	1.247 ± .017	1.934± .026
13000.	1.269 ± .023	1.969 ± .035	1.269 ± .023	1.967± .035
14000.	1.277 ± .017	1.980 ± .026	1.278 ± .017	1.978± .026
15000.	1.276 ± .024	1.974 ± .036	1.276 ± .024	1.972± .036
20000.	1.353 ± .014	2.077 ± .022	1.354 ± .014	2.075± .021

Tabella A.18: *Colori integrati del modello standard a $V = -8$ nelle bande NICMOS.*

Myr	$V{-}F222M(2)$	$V{-}F110W(3)$	$V{-}F160W(3)$	$V{-}F222M(3)$
50.	.088 ± .377	-.039 ± .183	.093 ± .367	.089 ± .378
70.	1.081 ± .385	.525 ± .247	1.062 ± .378	1.082 ± .386
100.	.666 ± .528	.292 ± .291	.654 ± .515	.667 ± .528
150.	.661 ± .272	.289 ± .139	.648 ± .265	.661 ± .272
200.	1.148 ± .264	.575 ± .160	1.123 ± .258	1.149 ± .264
300.	1.208 ± .394	.637 ± .234	1.184 ± .384	1.209 ± .394
400.	1.198 ± .230	.640 ± .138	1.176 ± .225	1.200 ± .231
500.	1.238 ± .211	.681 ± .117	1.218 ± .205	1.240 ± .211
600.	1.360 ± .157	.776 ± .092	1.342 ± .152	1.361 ± .157
800.	1.558 ± .174	.917 ± .104	1.538 ± .168	1.559 ± .174
1000.	1.553 ± .085	.922 ± .048	1.535 ± .081	1.554 ± .085
1100.	1.587 ± .103	.953 ± .063	1.571 ± .099	1.589 ± .103
1500.	1.599 ± .063	.967 ± .038	1.584 ± .061	1.600 ± .063
1700.	1.631 ± .081	.988 ± .048	1.615 ± .077	1.633 ± .081
2000.	1.676 ± .052	1.021 ± .031	1.660 ± .050	1.678 ± .052
3000.	1.728 ± .048	1.068 ± .029	1.711 ± .046	1.729 ± .048
4000.	1.786 ± .046	1.113 ± .030	1.768 ± .045	1.787 ± .046
5000.	1.765 ± .042	1.107 ± .027	1.750 ± .040	1.767 ± .042
6000.	1.842 ± .025	1.160 ± .016	1.823 ± .025	1.844 ± .025
7000.	1.863 ± .044	1.178 ± .028	1.846 ± .043	1.865 ± .044
8000.	1.899 ± .032	1.202 ± .020	1.880 ± .031	1.901 ± .031
9000.	1.917 ± .034	1.215 ± .021	1.897 ± .033	1.919 ± .033
10000.	1.939 ± .028	1.227 ± .018	1.918 ± .027	1.940 ± .028
11000.	1.940 ± .022	1.225 ± .014	1.916 ± .021	1.941 ± .022
12000.	1.962 ± .027	1.239 ± .017	1.937 ± .026	1.964 ± .026
13000.	1.996 ± .036	1.261 ± .023	1.970 ± .035	1.997 ± .036
14000.	2.007 ± .026	1.270 ± .017	1.981 ± .026	2.009 ± .026
15000.	2.001 ± .037	1.268 ± .024	1.975 ± .036	2.003 ± .037
20000.	2.108 ± .022	1.346 ± .014	2.078 ± .022	2.110 ± .022

Tabella A.19: *Colori integrati del modello standard a $V = -4$ nelle bande NICMOS.*

Myr	$V{-}F110W(1)$	$V{-}F160W(1)$	$V{-}F110W(2)$	$V{-}F160W(2)$
50.	-.153 ± .258	-.159 ± .437	-.156 ± .259	-.158± .436
70.	-.074 ± .402	-.057 ± .635	-.077 ± .403	-.057± .634
100.	.274 ± .703	.485 ± 1.079	.273 ± .705	.485± 1.077
150.	-.032 ± .068	.009 ± .110	-.034 ± .068	.009± .110
200.	.156 ± .469	.285 ± .724	.155 ± .470	.285± .723
300.	.369 ± .318	.653 ± .519	.369 ± .318	.653± .518
400.	.444 ± .399	.759 ± .610	.444 ± .400	.759± .609
500.	.554 ± .389	.936 ± .599	.554 ± .389	.935± .599
600.	.514 ± .156	.881 ± .271	.514 ± .156	.881± .271
800.	.839 ± .405	1.359 ± .619	.838 ± .406	1.358± .618
1000.	.836 ± .344	1.361 ± .531	.836 ± .345	1.360± .530
1100.	.897 ± .175	1.453 ± .265	.897 ± .176	1.452± .264
1500.	1.068 ± .270	1.705 ± .398	1.068 ± .271	1.704± .398
1700.	.938 ± .135	1.519 ± .203	.938 ± .135	1.518± .203
2000.	.919 ± .131	1.480 ± .200	.919 ± .131	1.479± .199
3000.	1.089 ± .160	1.723 ± .239	1.089 ± .160	1.722± .239
4000.	1.081 ± .103	1.705 ± .155	1.081 ± .104	1.703± .155
5000.	1.105 ± .167	1.730 ± .253	1.105 ± .167	1.728± .252
6000.	1.092 ± .082	1.702 ± .127	1.092 ± .082	1.701± .127
7000.	1.233 ± .110	1.912 ± .167	1.233 ± .110	1.910± .167
8000.	1.192 ± .119	1.844 ± .180	1.192 ± .119	1.842± .180
9000.	1.231 ± .126	1.903 ± .188	1.232 ± .126	1.901± .188
10000.	1.233 ± .137	1.907 ± .205	1.233 ± .137	1.905± .205
11000.	1.282 ± .103	1.986 ± .153	1.283 ± .103	1.984± .152
12000.	1.219 ± .126	1.891 ± .190	1.220 ± .127	1.888± .190
13000.	1.223 ± .096	1.895 ± .146	1.223 ± .096	1.893± .145
14000.	1.258 ± .131	1.945 ± .197	1.259 ± .132	1.944± .197
15000.	1.297 ± .137	2.002 ± .202	1.297 ± .137	2.000± .201
20000.	1.320 ± .113	2.022 ± .169	1.320 ± .113	2.020± .169

Tabella A.20: *Colori integrati del modello standard a $V = -4$ nelle bande NICMOS.*

Myr	$V{-}F222M(2)$	$V{-}F110W(3)$	$V{-}F160W(3)$	$V{-}F222M(3)$
50.	-.173 ± .444	-.151 ± .256	-.158 ± .437	-.173 ± .444
70.	-.069 ± .646	-.073 ± .399	-.057 ± .635	-.068 ± .646
100.	.486 ± 1.097	.273 ± .699	.486 ± 1.079	.487 ± 1.098
150.	.004 ± .110	-.032 ± .068	.009 ± .111	.004 ± .110
200.	.287 ± .737	.155 ± .466	.286 ± .724	.287 ± .737
300.	.657 ± .526	.366 ± .316	.654 ± .519	.658 ± .526
400.	.766 ± .620	.441 ± .397	.760 ± .610	.767 ± .620
500.	.945 ± .611	.551 ± .386	.936 ± .599	.946 ± .611
600.	.888 ± .273	.510 ± .155	.882 ± .271	.889 ± .273
800.	1.373 ± .632	.833 ± .403	1.360 ± .619	1.374 ± .632
1000.	1.373 ± .548	.831 ± .342	1.362 ± .531	1.374 ± .548
1100.	1.464 ± .270	.891 ± .175	1.454 ± .265	1.465 ± .270
1500.	1.723 ± .408	1.061 ± .269	1.706 ± .398	1.724 ± .408
1700.	1.532 ± .207	.932 ± .134	1.520 ± .203	1.533 ± .208
2000.	1.490 ± .204	.914 ± .130	1.481 ± .200	1.491 ± .204
3000.	1.740 ± .247	1.082 ± .159	1.724 ± .239	1.741 ± .247
4000.	1.721 ± .159	1.074 ± .103	1.706 ± .155	1.722 ± .160
5000.	1.747 ± .259	1.099 ± .166	1.731 ± .253	1.748 ± .259
6000.	1.718 ± .129	1.086 ± .082	1.703 ± .127	1.719 ± .129
7000.	1.934 ± .172	1.226 ± .109	1.913 ± .167	1.936 ± .172
8000.	1.863 ± .185	1.185 ± .119	1.845 ± .180	1.865 ± .185
9000.	1.924 ± .192	1.224 ± .125	1.903 ± .188	1.926 ± .192
10000.	1.930 ± .210	1.226 ± .137	1.908 ± .205	1.932 ± .210
11000.	2.012 ± .157	1.275 ± .102	1.987 ± .153	2.013 ± .156
12000.	1.915 ± .194	1.212 ± .126	1.892 ± .190	1.917 ± .194
13000.	1.919 ± .148	1.216 ± .096	1.896 ± .146	1.921 ± .148
14000.	1.972 ± .201	1.251 ± .131	1.946 ± .197	1.973 ± .201
15000.	2.030 ± .206	1.289 ± .136	2.003 ± .202	2.031 ± .206
20000.	2.053 ± .171	1.312 ± .112	2.023 ± .169	2.054 ± .171

Tabella A.21: *Colori integrati nelle bande WFPC2 del modello a $V = -8$ ottenuti con esponente della IMF $s = 2.0$ per $M > 0.5\,M_\odot$.*

Myr	$(V{-}I)_J$	$V{-}F439W(1)$	$V{-}F555W(1)$	$V{-}F814W(1)$	$V{-}F439W(2)$	$V{-}F555W(2)$	$V{-}F814W(2)$
50.	-.073 ± .100	.109 ± .031	.012 ± .003	-.054 ± .081	.110 ± .031	.011 ± .002	-.053 ± .080
70.	.308 ± .167	-.035 ± .070	.001 ± .005	.260 ± .141	-.035 ± .070	.000 ± .004	.259 ± .141
100.	.197 ± .133	.001 ± .044	.003 ± .003	.165 ± .110	.002 ± .044	.002 ± .003	.165 ± .109
150.	.225 ± .129	-.027 ± .045	.000 ± .003	.189 ± .107	-.026 ± .045	.000 ± .003	.188 ± .107
200.	.382 ± .239	-.105 ± .104	-.005 ± .006	.322 ± .203	-.104 ± .104	-.005 ± .006	.321 ± .202
300.	.383 ± .110	-.120 ± .043	-.007 ± .003	.322 ± .092	-.119 ± .043	-.007 ± .003	.321 ± .092
400.	.500 ± .145	-.191 ± .062	-.011 ± .003	.423 ± .123	-.190 ± .062	-.011 ± .003	.422 ± .123
500.	.481 ± .078	-.207 ± .031	-.013 ± .002	.410 ± .066	-.206 ± .031	-.013 ± .002	.409 ± .066
600.	.589 ± .089	-.291 ± .044	-.018 ± .002	.507 ± .076	-.290 ± .044	-.018 ± .002	.505 ± .076
800.	.651 ± .046	-.353 ± .028	-.022 ± .001	.564 ± .040	-.352 ± .028	-.021 ± .001	.563 ± .040
1000.	.691 ± .033	-.399 ± .019	-.024 ± .001	.602 ± .028	-.397 ± .019	-.024 ± .001	.600 ± .028
1100.	.715 ± .045	-.424 ± .031	-.025 ± .001	.623 ± .039	-.423 ± .031	-.025 ± .001	.622 ± .039
1500.	.758 ± .044	-.463 ± .029	-.027 ± .001	.662 ± .038	-.462 ± .029	-.027 ± .001	.660 ± .038
1700.	.771 ± .031	-.482 ± .022	-.028 ± .001	.674 ± .027	-.481 ± .022	-.028 ± .001	.672 ± .027
2000.	.763 ± .021	-.480 ± .018	-.029 ± .001	.667 ± .019	-.479 ± .018	-.028 ± .001	.665 ± .018
3000.	.837 ± .026	-.560 ± .021	-.032 ± .001	.734 ± .023	-.559 ± .021	-.031 ± .001	.732 ± .023
4000.	.883 ± .037	-.618 ± .031	-.034 ± .001	.776 ± .032	-.617 ± .031	-.034 ± .001	.774 ± .032
5000.	.877 ± .020	-.621 ± .017	-.035 ± .001	.773 ± .017	-.621 ± .017	-.034 ± .001	.771 ± .017
6000.	.899 ± .013	-.645 ± .011	-.035 ± .001	.792 ± .011	-.645 ± .011	-.035 ± .001	.790 ± .011
7000.	.926 ± .017	-.674 ± .016	-.036 ± .000	.817 ± .015	-.674 ± .016	-.036 ± .001	.815 ± .015
8000.	.947 ± .008	-.696 ± .008	-.037 ± .000	.835 ± .007	-.695 ± .008	-.036 ± .000	.833 ± .007
9000.	.958 ± .017	-.705 ± .016	-.037 ± .000	.844 ± .015	-.704 ± .016	-.036 ± .001	.842 ± .015
10000.	.961 ± .017	-.702 ± .016	-.037 ± .000	.846 ± .014	-.701 ± .016	-.036 ± .001	.844 ± .014
11000.	.968 ± .015	-.702 ± .015	-.037 ± .001	.852 ± .013	-.702 ± .015	-.036 ± .001	.850 ± .013
12000.	.963 ± .018	-.693 ± .017	-.036 ± .000	.847 ± .016	-.693 ± .017	-.035 ± .001	.845 ± .016
13000.	.969 ± .017	-.697 ± .015	-.036 ± .001	.853 ± .015	-.696 ± .015	-.035 ± .001	.851 ± .015
14000.	.982 ± .013	-.711 ± .013	-.036 ± .001	.864 ± .011	-.711 ± .013	-.036 ± .001	.862 ± .011
15000.	.995 ± .017	-.725 ± .018	-.037 ± .001	.875 ± .015	-.725 ± .018	-.036 ± .001	.873 ± .015
20000.	1.061 ± .017	-.811 ± .018	-.039 ± .001	.935 ± .015	-.811 ± .018	-.038 ± .000	.932 ± .015

Tabella A.22: *Colori integrati nelle bande WFPC2 del modello a* $V = -8$ *ottenuti con esponente della IMF* $s = 2.0$ *per* $M > 0.5\,M_{\odot}$.

Myr	V–$F439W(3)$	V–$F555W(3)$	V–$F814W(3)$	V–$F439W(4)$	V–$F555W(4)$	V–$F814W(4)$
50.	.109 ± .031	.011 ± .003	-.054 ± .081	.110 ± .031	.011 ± .003	-.054 ± .081
70.	-.035 ± .070	.000 ± .005	.261 ± .142	-.034 ± .070	.000 ± .005	.261 ± .141
100.	.001 ± .044	.002 ± .003	.166 ± .110	.002 ± .044	.002 ± .003	.166 ± .110
150.	-.027 ± .045	.000 ± .003	.190 ± .107	-.026 ± .045	.000 ± .003	.190 ± .107
200.	-.105 ± .104	-.006 ± .007	.324 ± .204	-.104 ± .104	-.005 ± .006	.323 ± .203
300.	-.120 ± .043	-.008 ± .003	.324 ± .093	-.119 ± .043	-.007 ± .003	.323 ± .093
400.	-.191 ± .062	-.013 ± .004	.425 ± .124	-.190 ± .062	-.012 ± .003	.424 ± .123
500.	-.207 ± .031	-.015 ± .002	.411 ± .066	-.206 ± .031	-.014 ± .002	.411 ± .066
600.	-.291 ± .044	-.020 ± .002	.508 ± .077	-.290 ± .044	-.019 ± .002	.508 ± .076
800.	-.353 ± .028	-.023 ± .001	.566 ± .040	-.352 ± .028	-.022 ± .001	.565 ± .040
1000.	-.399 ± .019	-.026 ± .001	.603 ± .028	-.397 ± .019	-.025 ± .001	.603 ± .028
1100.	-.424 ± .031	-.027 ± .002	.626 ± .039	-.423 ± .031	-.026 ± .001	.625 ± .039
1500.	-.463 ± .029	-.029 ± .001	.664 ± .038	-.462 ± .029	-.028 ± .001	.663 ± .038
1700.	-.482 ± .022	-.030 ± .001	.676 ± .027	-.481 ± .022	-.029 ± .001	.675 ± .027
2000.	-.480 ± .018	-.030 ± .001	.669 ± .019	-.479 ± .018	-.029 ± .001	.668 ± .019
3000.	-.560 ± .022	-.034 ± .001	.736 ± .023	-.559 ± .022	-.033 ± .001	.735 ± .023
4000.	-.618 ± .031	-.037 ± .001	.779 ± .032	-.617 ± .031	-.035 ± .001	.777 ± .032
5000.	-.622 ± .017	-.037 ± .001	.775 ± .017	-.621 ± .017	-.035 ± .001	.774 ± .017
6000.	-.646 ± .011	-.038 ± .000	.794 ± .011	-.645 ± .011	-.036 ± .000	.793 ± .011
7000.	-.675 ± .016	-.039 ± .001	.819 ± .015	-.674 ± .016	-.037 ± .001	.818 ± .015
8000.	-.696 ± .008	-.039 ± .000	.837 ± .007	-.695 ± .008	-.038 ± .000	.836 ± .007
9000.	-.705 ± .016	-.039 ± .001	.847 ± .015	-.704 ± .016	-.038 ± .001	.845 ± .015
10000.	-.702 ± .016	-.039 ± .001	.849 ± .014	-.701 ± .016	-.038 ± .001	.848 ± .014
11000.	-.703 ± .015	-.039 ± .000	.855 ± .013	-.702 ± .015	-.037 ± .000	.853 ± .013
12000.	-.694 ± .017	-.039 ± .001	.850 ± .016	-.693 ± .017	-.037 ± .001	.849 ± .016
13000.	-.697 ± .015	-.039 ± .001	.855 ± .015	-.696 ± .015	-.037 ± .000	.854 ± .015
14000.	-.712 ± .013	-.039 ± .001	.866 ± .011	-.711 ± .013	-.037 ± .000	.865 ± .011
15000.	-.726 ± .018	-.039 ± .001	.878 ± .015	-.725 ± .018	-.038 ± .001	.877 ± .015
20000.	-.812 ± .018	-.042 ± .001	.937 ± .015	-.811 ± .018	-.040 ± .001	.936 ± .015

Tabella A.23: *Colori integrati nelle bande NICMOS del modello a $V = -8$ ottenuti con esponente della IMF $s = 2.0$ per $M > 0.5\,M_{\odot}$.*

Myr	$V{-}F110W(1)$	$V{-}F160W(1)$	$V{-}F110W(2)$	$V{-}F160W(2)$
50.	-.102 ± .156	-.023 ± .327	-.105 ± .156	-.023± .326
70.	.450 ± .229	.949 ± .355	.450 ± .229	.947± .355
100.	.294 ± .196	.680 ± .363	.293 ± .196	.679± .362
150.	.328 ± .186	.708 ± .336	.327 ± .186	.707± .335
200.	.540 ± .328	1.028 ± .539	.539 ± .329	1.027± .539
300.	.542 ± .155	1.029 ± .268	.542 ± .155	1.028± .268
400.	.696 ± .199	1.254 ± .328	.696 ± .199	1.253± .327
500.	.661 ± .110	1.173 ± .194	.661 ± .111	1.172± .193
600.	.796 ± .122	1.359 ± .201	.796 ± .122	1.358± .201
800.	.870 ± .062	1.460 ± .098	.870 ± .062	1.458± .098
1000.	.916 ± .046	1.510 ± .078	.916 ± .046	1.509± .078
1100.	.943 ± .060	1.543 ± .092	.943 ± .060	1.541± .092
1500.	.998 ± .059	1.621 ± .093	.998 ± .059	1.620± .093
1700.	1.013 ± .041	1.638 ± .063	1.013 ± .041	1.636± .063
2000.	1.001 ± .027	1.618 ± .039	1.001 ± .027	1.617± .039
3000.	1.092 ± .034	1.741 ± .052	1.092 ± .034	1.739± .052
4000.	1.145 ± .048	1.805 ± .074	1.145 ± .048	1.803± .074
5000.	1.134 ± .026	1.781 ± .039	1.134 ± .026	1.780± .039
6000.	1.159 ± .017	1.812 ± .027	1.159 ± .017	1.810± .027
7000.	1.193 ± .023	1.858 ± .035	1.193 ± .023	1.856± .035
8000.	1.219 ± .010	1.894 ± .016	1.219 ± .010	1.892± .015
9000.	1.233 ± .022	1.914 ± .034	1.233 ± .022	1.912± .034
10000.	1.238 ± .022	1.924 ± .033	1.239 ± .022	1.922± .033
11000.	1.249 ± .019	1.942 ± .029	1.249 ± .020	1.940± .029
12000.	1.242 ± .023	1.932 ± .035	1.243 ± .023	1.930± .035
13000.	1.250 ± .023	1.942 ± .034	1.250 ± .023	1.940± .034
14000.	1.266 ± .016	1.964 ± .025	1.266 ± .016	1.962± .025
15000.	1.282 ± .022	1.985 ± .032	1.282 ± .022	1.983± .032
20000.	1.362 ± .022	2.092 ± .033	1.363 ± .022	2.090± .033

Tabella A.24: *Colori integrati nelle bande NICMOS del modello a* $V = -8$ *ottenuti con esponente della IMF* $s = 2.0$ *per* $M > 0.5\,M_{\odot}$.

Myr	$V{-}F222M(2)$	$V{-}F110W(3)$	$V{-}F160W(3)$	$V{-}F222M(3)$
50.	-.030 ± .338	-.101 ± .154	-.022 ± .327	-.030 ± .338
70.	.968 ± .363	.447 ± .227	.950 ± .355	.969 ± .363
100.	.694 ± .373	.291 ± .194	.681 ± .363	.695 ± .374
150.	.722 ± .345	.325 ± .184	.709 ± .336	.723 ± .345
200.	1.050 ± .552	.535 ± .326	1.029 ± .539	1.052 ± .552
300.	1.050 ± .276	.537 ± .154	1.030 ± .268	1.051 ± .277
400.	1.280 ± .337	.690 ± .197	1.255 ± .328	1.281 ± .337
500.	1.192 ± .201	.656 ± .110	1.174 ± .193	1.194 ± .201
600.	1.378 ± .209	.790 ± .121	1.360 ± .201	1.379 ± .209
800.	1.478 ± .102	.864 ± .062	1.461 ± .098	1.480 ± .102
1000.	1.526 ± .082	.910 ± .046	1.511 ± .079	1.528 ± .082
1100.	1.558 ± .095	.937 ± .059	1.544 ± .092	1.559 ± .095
1500.	1.638 ± .097	.991 ± .058	1.622 ± .093	1.639 ± .097
1700.	1.654 ± .065	1.006 ± .041	1.639 ± .063	1.655 ± .065
2000.	1.634 ± .040	.995 ± .027	1.619 ± .039	1.635 ± .040
3000.	1.759 ± .053	1.085 ± .034	1.742 ± .052	1.760 ± .054
4000.	1.823 ± .076	1.138 ± .048	1.806 ± .074	1.825 ± .076
5000.	1.799 ± .040	1.127 ± .026	1.782 ± .039	1.800 ± .040
6000.	1.830 ± .028	1.152 ± .017	1.813 ± .027	1.831 ± .028
7000.	1.877 ± .036	1.186 ± .023	1.858 ± .035	1.878 ± .036
8000.	1.914 ± .016	1.212 ± .010	1.895 ± .016	1.916 ± .016
9000.	1.936 ± .035	1.226 ± .022	1.915 ± .034	1.937 ± .035
10000.	1.947 ± .034	1.231 ± .022	1.925 ± .033	1.949 ± .034
11000.	1.966 ± .030	1.242 ± .020	1.943 ± .029	1.967 ± .030
12000.	1.956 ± .036	1.235 ± .023	1.933 ± .035	1.958 ± .036
13000.	1.968 ± .035	1.243 ± .023	1.943 ± .034	1.969 ± .036
14000.	1.990 ± .025	1.258 ± .016	1.965 ± .025	1.991 ± .025
15000.	2.012 ± .033	1.274 ± .022	1.986 ± .032	2.014 ± .032
20000.	2.123 ± .033	1.355 ± .022	2.093 ± .033	2.124 ± .033

Tabella A.25: *Colori integrati nelle bande WFPC2 del modello a* $V = -8$ *ottenuti con esponente della IMF* $s = 2.6$ *per* $M > 0.5\,M_{\odot}$.

Myr	$(V{-}I)_J$	$V{-}F439W(1)$	$V{-}F555W(1)$	$V{-}F814W(1)$	$V{-}F439W(2)$	$V{-}F555W(2)$	$V{-}F814W(2)$
50.	-.053 ± .137	.093 ± .049	.010 ± .004	-.036 ± .112	.094 ± .049	.009 ± .003	-.035 ± .112
70.	.359 ± .163	-.066 ± .076	-.002 ± .005	.304 ± .139	-.065 ± .076	-.002 ± .005	.303 ± .138
100.	.178 ± .178	-.007 ± .066	.002 ± .004	.152 ± .148	-.006 ± .066	.002 ± .004	.152 ± .148
150.	.223 ± .166	-.035 ± .060	.000 ± .004	.189 ± .138	-.034 ± .060	-.001 ± .004	.188 ± .137
200.	.359 ± .124	-.094 ± .053	-.005 ± .003	.302 ± .105	-.093 ± .053	-.005 ± .003	.301 ± .105
300.	.372 ± .114	-.122 ± .044	-.007 ± .003	.314 ± .095	-.121 ± .043	-.007 ± .003	.313 ± .095
400.	.480 ± .085	-.185 ± .045	-.012 ± .002	.406 ± .074	-.184 ± .045	-.011 ± .002	.405 ± .073
500.	.502 ± .046	-.218 ± .019	-.014 ± .001	.429 ± .039	-.217 ± .019	-.014 ± .001	.427 ± .039
600.	.577 ± .112	-.287 ± .057	-.018 ± .003	.497 ± .096	-.286 ± .057	-.018 ± .003	.495 ± .095
800.	.697 ± .061	-.382 ± .032	-.023 ± .001	.604 ± .052	-.381 ± .032	-.023 ± .001	.603 ± .052
1000.	.700 ± .057	-.402 ± .034	-.024 ± .002	.609 ± .049	-.401 ± .034	-.024 ± .001	.608 ± .049
1100.	.719 ± .020	-.420 ± .013	-.025 ± .001	.626 ± .018	-.419 ± .013	-.025 ± .001	.625 ± .017
1500.	.744 ± .034	-.453 ± .020	-.027 ± .001	.650 ± .029	-.453 ± .020	-.026 ± .001	.649 ± .029
1700.	.769 ± .030	-.477 ± .020	-.028 ± .001	.672 ± .025	-.476 ± .020	-.027 ± .001	.670 ± .025
2000.	.771 ± .024	-.487 ± .019	-.029 ± .001	.675 ± .021	-.486 ± .019	-.028 ± .001	.673 ± .021
3000.	.827 ± .017	-.552 ± .012	-.032 ± .001	.725 ± .014	-.551 ± .012	-.031 ± .001	.723 ± .014
4000.	.876 ± .026	-.611 ± .020	-.034 ± .001	.771 ± .023	-.610 ± .020	-.033 ± .001	.769 ± .023
5000.	.887 ± .018	-.628 ± .015	-.035 ± .001	.781 ± .016	-.627 ± .015	-.034 ± .000	.779 ± .016
6000.	.900 ± .015	-.645 ± .013	-.035 ± .001	.793 ± .013	-.644 ± .013	-.034 ± .001	.791 ± .013
7000.	.926 ± .016	-.672 ± .015	-.036 ± .001	.816 ± .014	-.672 ± .015	-.035 ± .000	.814 ± .013
8000.	.945 ± .018	-.692 ± .016	-.036 ± .001	.833 ± .015	-.692 ± .016	-.036 ± .001	.831 ± .015
9000.	.955 ± .010	-.701 ± .010	-.037 ± .000	.842 ± .009	-.700 ± .010	-.036 ± .000	.840 ± .009
10000.	.957 ± .015	-.698 ± .013	-.037 ± .001	.842 ± .013	-.697 ± .013	-.036 ± .001	.840 ± .013
11000.	.960 ± .014	-.692 ± .011	-.036 ± .001	.845 ± .012	-.692 ± .011	-.035 ± .000	.842 ± .012
12000.	.972 ± .011	-.701 ± .010	-.036 ± .000	.855 ± .010	-.700 ± .010	-.036 ± .001	.853 ± .010
13000.	.986 ± .019	-.712 ± .019	-.036 ± .001	.867 ± .017	-.711 ± .019	-.036 ± .001	.865 ± .017
14000.	.994 ± .014	-.722 ± .014	-.037 ± .001	.875 ± .012	-.722 ± .014	-.036 ± .001	.872 ± .012
15000.	1.005 ± .015	-.733 ± .015	-.037 ± .001	.885 ± .013	-.733 ± .015	-.036 ± .001	.882 ± .013
20000.	1.051 ± .017	-.799 ± .017	-.039 ± .001	.926 ± .015	-.799 ± .017	-.038 ± .001	.923 ± .015

Tabella A.26: *Colori integrati nelle bande WFPC2 del modello a* $V = -8$ *ottenuti con esponente della IMF* $s = 2.6$ *per* $M > 0.5\,M_{\odot}$.

Myr	$V{-}F439W(3)$	$V{-}F555W(3)$	$V{-}F814W(3)$	$V{-}F439W(4)$	$V{-}F555W(4)$	$V{-}F814W(4)$
50.	.093 ± .049	.010 ± .004	-.036 ± .113	.094 ± .049	.010 ± .004	-.035 ± .112
70.	-.066 ± .076	-.002 ± .005	.305 ± .139	-.065 ± .076	-.002 ± .005	.305 ± .139
100.	-.007 ± .066	.001 ± .005	.153 ± .149	-.006 ± .066	.002 ± .005	.153 ± .149
150.	-.035 ± .060	-.001 ± .004	.190 ± .138	-.034 ± .060	-.001 ± .004	.189 ± .138
200.	-.094 ± .053	-.005 ± .004	.303 ± .106	-.093 ± .053	-.005 ± .003	.303 ± .106
300.	-.122 ± .044	-.008 ± .003	.315 ± .096	-.121 ± .044	-.008 ± .003	.315 ± .096
400.	-.185 ± .045	-.013 ± .003	.408 ± .074	-.184 ± .045	-.012 ± .003	.407 ± .074
500.	-.218 ± .019	-.015 ± .001	.430 ± .039	-.217 ± .019	-.014 ± .001	.429 ± .039
600.	-.287 ± .057	-.019 ± .003	.498 ± .096	-.286 ± .057	-.018 ± .003	.498 ± .096
800.	-.382 ± .032	-.025 ± .001	.606 ± .053	-.381 ± .032	-.024 ± .001	.605 ± .053
1000.	-.402 ± .034	-.026 ± .002	.611 ± .050	-.401 ± .034	-.025 ± .001	.610 ± .049
1100.	-.420 ± .013	-.027 ± .001	.628 ± .018	-.419 ± .013	-.026 ± .001	.627 ± .017
1500.	-.454 ± .020	-.029 ± .001	.652 ± .029	-.453 ± .020	-.028 ± .001	.651 ± .029
1700.	-.477 ± .020	-.030 ± .001	.674 ± .026	-.476 ± .020	-.029 ± .001	.673 ± .025
2000.	-.487 ± .019	-.030 ± .001	.677 ± .021	-.486 ± .019	-.029 ± .001	.676 ± .021
3000.	-.552 ± .012	-.034 ± .001	.727 ± .014	-.551 ± .012	-.032 ± .000	.726 ± .014
4000.	-.611 ± .020	-.036 ± .001	.773 ± .023	-.610 ± .020	-.035 ± .001	.771 ± .023
5000.	-.628 ± .016	-.037 ± .000	.783 ± .016	-.627 ± .016	-.035 ± .001	.782 ± .016
6000.	-.645 ± .013	-.038 ± .001	.795 ± .013	-.644 ± .013	-.036 ± .000	.794 ± .013
7000.	-.673 ± .015	-.038 ± .000	.819 ± .014	-.672 ± .015	-.037 ± .001	.817 ± .014
8000.	-.693 ± .016	-.039 ± .001	.835 ± .016	-.692 ± .016	-.037 ± .001	.834 ± .015
9000.	-.702 ± .010	-.039 ± .000	.844 ± .009	-.701 ± .010	-.038 ± .001	.843 ± .009
10000.	-.698 ± .013	-.039 ± .001	.845 ± .013	-.697 ± .013	-.037 ± .001	.844 ± .013
11000.	-.693 ± .011	-.039 ± .000	.847 ± .012	-.692 ± .011	-.037 ± .000	.846 ± .012
12000.	-.701 ± .010	-.039 ± .001	.858 ± .009	-.700 ± .010	-.037 ± .000	.856 ± .009
13000.	-.712 ± .019	-.039 ± .000	.870 ± .017	-.711 ± .019	-.037 ± .001	.868 ± .017
14000.	-.723 ± .014	-.039 ± .000	.877 ± .013	-.722 ± .014	-.038 ± .001	.876 ± .012
15000.	-.734 ± .015	-.039 ± .001	.887 ± .013	-.733 ± .015	-.038 ± .001	.886 ± .013
20000.	-.800 ± .017	-.041 ± .001	.928 ± .015	-.799 ± .017	-.039 ± .001	.927 ± .015

Tabella A.27: *Colori integrati nelle bande NICMOS del modello a $V = -8$ ottenuti con esponente della IMF $s = 2.6$ per $M > 0.5\,M_{\odot}$.*

Myr	$V{-}F110W(1)$	$V{-}F160W(1)$	$V{-}F110W(2)$	$V{-}F160W(2)$
50.	-.074 ± .201	.008 ± .376	-.077 ± .202	.009± .375
70.	.518 ± .218	1.048 ± .326	.517 ± .219	1.046± .326
100.	.259 ± .256	.586 ± .454	.258 ± .257	.585± .453
150.	.320 ± .240	.671 ± .441	.319 ± .241	.670± .440
200.	.513 ± .172	1.007 ± .279	.513 ± .172	1.006± .279
300.	.523 ± .162	.989 ± .294	.523 ± .162	.988± .294
400.	.670 ± .113	1.222 ± .171	.670 ± .113	1.220± .171
500.	.691 ± .065	1.225 ± .112	.691 ± .065	1.224± .112
600.	.778 ± .152	1.328 ± .247	.778 ± .152	1.327± .247
800.	.932 ± .084	1.553 ± .135	.932 ± .084	1.552± .135
1000.	.927 ± .077	1.529 ± .124	.928 ± .078	1.528± .124
1100.	.950 ± .027	1.560 ± .043	.950 ± .027	1.558± .043
1500.	.980 ± .046	1.593 ± .076	.980 ± .046	1.592± .076
1700.	1.010 ± .039	1.636 ± .062	1.010 ± .039	1.634± .062
2000.	1.012 ± .030	1.634 ± .045	1.012 ± .030	1.632± .045
3000.	1.077 ± .023	1.716 ± .037	1.077 ± .023	1.714± .037
4000.	1.136 ± .035	1.791 ± .055	1.136 ± .035	1.789± .055
5000.	1.146 ± .024	1.797 ± .037	1.146 ± .024	1.795± .037
6000.	1.160 ± .020	1.810 ± .031	1.160 ± .020	1.809± .031
7000.	1.192 ± .021	1.855 ± .032	1.192 ± .021	1.853± .031
8000.	1.215 ± .024	1.886 ± .036	1.215 ± .024	1.884± .036
9000.	1.229 ± .014	1.905 ± .021	1.229 ± .014	1.903± .021
10000.	1.232 ± .020	1.911 ± .031	1.232 ± .020	1.909± .031
11000.	1.237 ± .018	1.921 ± .028	1.237 ± .018	1.919± .028
12000.	1.253 ± .014	1.945 ± .022	1.254 ± .014	1.943± .022
13000.	1.271 ± .025	1.971 ± .037	1.271 ± .025	1.969± .037
14000.	1.281 ± .019	1.984 ± .028	1.281 ± .019	1.982± .028
15000.	1.294 ± .020	2.002 ± .030	1.295 ± .020	2.000± .030
20000.	1.349 ± .023	2.069 ± .034	1.349 ± .023	2.067± .034

Tabella A.28: *Colori integrati nelle bande NICMOS del modello a* $V = -8$ *ottenuti con esponente della IMF* $s = 2.6$ *per* $M > 0.5\,M_{\odot}$.

Myr	$V{-}F222M(2)$	$V{-}F110W(3)$	$V{-}F160W(3)$	$V{-}F222M(3)$
50.	.004 ± .385	-.073 ± .199	.009 ± .376	.004 ± .385
70.	1.069 ± .332	.514 ± .217	1.049 ± .326	1.070 ± .332
100.	.597 ± .465	.257 ± .254	.586 ± .454	.597 ± .465
150.	.684 ± .452	.317 ± .238	.671 ± .441	.685 ± .452
200.	1.030 ± .285	.508 ± .170	1.008 ± .279	1.031 ± .286
300.	1.009 ± .302	.519 ± .161	.990 ± .294	1.010 ± .302
400.	1.248 ± .173	.665 ± .112	1.223 ± .171	1.249 ± .173
500.	1.247 ± .116	.686 ± .064	1.226 ± .112	1.248 ± .116
600.	1.347 ± .255	.773 ± .151	1.329 ± .247	1.348 ± .255
800.	1.575 ± .140	.925 ± .083	1.554 ± .135	1.577 ± .141
1000.	1.548 ± .129	.922 ± .077	1.530 ± .124	1.549 ± .129
1100.	1.578 ± .045	.944 ± .027	1.561 ± .043	1.579 ± .045
1500.	1.610 ± .080	.974 ± .046	1.594 ± .076	1.611 ± .080
1700.	1.654 ± .065	1.004 ± .039	1.637 ± .062	1.655 ± .065
2000.	1.651 ± .046	1.006 ± .030	1.635 ± .045	1.653 ± .046
3000.	1.735 ± .038	1.071 ± .022	1.717 ± .037	1.736 ± .038
4000.	1.811 ± .056	1.130 ± .035	1.792 ± .055	1.812 ± .057
5000.	1.817 ± .038	1.139 ± .024	1.798 ± .037	1.819 ± .038
6000.	1.830 ± .032	1.153 ± .020	1.811 ± .031	1.832 ± .032
7000.	1.876 ± .032	1.185 ± .021	1.856 ± .032	1.877 ± .033
8000.	1.908 ± .037	1.208 ± .023	1.887 ± .036	1.909 ± .037
9000.	1.929 ± .021	1.222 ± .014	1.907 ± .021	1.930 ± .021
10000.	1.935 ± .032	1.225 ± .020	1.912 ± .031	1.937 ± .032
11000.	1.947 ± .029	1.230 ± .018	1.922 ± .028	1.948 ± .029
12000.	1.972 ± .022	1.246 ± .014	1.946 ± .022	1.974 ± .023
13000.	1.999 ± .038	1.264 ± .025	1.972 ± .037	2.001 ± .038
14000.	2.012 ± .029	1.273 ± .018	1.985 ± .028	2.014 ± .029
15000.	2.031 ± .030	1.287 ± .020	2.003 ± .030	2.033 ± .031
20000.	2.101 ± .034	1.341 ± .023	2.070 ± .034	2.103 ± .034

Tabella A.29: *Colori integrati nelle bande WFPC2 dei modelli a $V = -8$ ottenuti con efficienza della perdita di massa $\eta = 0.4$ e dispersione $\sigma_\eta = 0.02$.*

Myr	$(V-I)_J$	$V-F439W(1)$	$V-F555W(1)$	$V-F814W(1)$	$V-F439W(2)$	$V-F555W(2)$	$V-F814W(2)$
5000.	.874 ± .026	-.618 ± .022	-.034 ± .001	.770 ± .022	-.618 ± .023	-.034 ± .001	.768 ± .022
6000.	.905 ± .012	-.650 ± .011	-.035 ± .001	.797 ± .010	-.649 ± .011	-.035 ± .001	.795 ± .010
7000.	.932 ± .013	-.679 ± .013	-.036 ± .001	.821 ± .011	-.678 ± .012	-.036 ± .000	.819 ± .011
8000.	.938 ± .016	-.684 ± .015	-.036 ± .001	.827 ± .014	-.684 ± .015	-.036 ± .001	.825 ± .014
9000.	.939 ± .012	-.681 ± .011	-.036 ± .000	.827 ± .010	-.680 ± .011	-.035 ± .000	.825 ± .010
10000.	.946 ± .016	-.674 ± .016	-.036 ± .001	.832 ± .014	-.673 ± .016	-.035 ± .000	.830 ± .014
11000.	.950 ± .011	-.674 ± .011	-.035 ± .001	.835 ± .010	-.673 ± .011	-.034 ± .001	.833 ± .010
12000.	.971 ± .013	-.696 ± .013	-.036 ± .000	.854 ± .011	-.696 ± .013	-.035 ± .000	.852 ± .011
13000.	.991 ± .019	-.720 ± .018	-.037 ± .001	.873 ± .017	-.719 ± .018	-.036 ± .001	.870 ± .017
14000.	1.006 ± .014	-.741 ± .014	-.037 ± .001	.885 ± .012	-.740 ± .014	-.036 ± .001	.883 ± .012
15000.	1.003 ± .018	-.743 ± .019	-.037 ± .001	.884 ± .016	-.742 ± .019	-.036 ± .001	.882 ± .016
20000.	1.057 ± .010	-.807 ± .011	-.039 ± .001	.931 ± .009	-.806 ± .011	-.038 ± .000	.929 ± .009

Tabella A.30: *Colori integrati nelle bande WFPC2 dei modelli a $V = -8$ ottenuti con efficienza della perdita di massa $\eta = 0.4$ e dispersione $\sigma_\eta = 0.02$.*

Myr	$V-F439W(3)$	$V-F555W(3)$	$V-F814W(3)$	$V-F439W(4)$	$V-F555W(4)$	$V-F814W(4)$
5000.	-.619 ± .022	-.036 ± .001	.772 ± .022	-.618 ± .022	-.035 ± .001	.771 ± .022
6000.	-.650 ± .011	-.038 ± .001	.800 ± .010	-.649 ± .011	-.036 ± .000	.799 ± .010
7000.	-.679 ± .012	-.039 ± .000	.823 ± .012	-.678 ± .012	-.037 ± .000	.822 ± .011
8000.	-.685 ± .015	-.039 ± .001	.829 ± .014	-.684 ± .015	-.037 ± .001	.828 ± .014
9000.	-.681 ± .011	-.039 ± .000	.829 ± .010	-.680 ± .011	-.037 ± .000	.828 ± .010
10000.	-.674 ± .016	-.038 ± .001	.834 ± .014	-.673 ± .016	-.036 ± .001	.833 ± .014
11000.	-.674 ± .011	-.038 ± .001	.838 ± .010	-.673 ± .011	-.036 ± .000	.836 ± .010
12000.	-.697 ± .013	-.038 ± .001	.857 ± .011	-.696 ± .013	-.037 ± .001	.856 ± .011
13000.	-.720 ± .018	-.039 ± .001	.875 ± .017	-.719 ± .018	-.038 ± .001	.874 ± .017
14000.	-.741 ± .014	-.040 ± .001	.888 ± .012	-.740 ± .014	-.038 ± .001	.887 ± .012
15000.	-.743 ± .019	-.040 ± .001	.887 ± .016	-.742 ± .019	-.038 ± .001	.885 ± .016
20000.	-.807 ± .011	-.042 ± .000	.934 ± .009	-.806 ± .011	-.040 ± .000	.933 ± .009

Tabella A.31: *Colori integrati nelle bande NICMOS dei modelli a* $V = -8$ *ottenuti con efficienza della perdita di massa* $\eta = 0.4$ *e dispersione* $\sigma_\eta = 0.02$.

Myr	$V{-}F110W(1)$	$V{-}F160W(1)$	$V{-}F110W(2)$	$V{-}F160W(2)$
5000.	1.129 ± .034	1.772 ± .051	1.129 ± .034	1.771± .051
6000.	1.167 ± .016	1.823 ± .024	1.167 ± .016	1.821± .024
7000.	1.199 ± .017	1.866 ± .026	1.200 ± .017	1.865± .026
8000.	1.206 ± .020	1.875 ± .031	1.207 ± .020	1.873± .031
9000.	1.210 ± .016	1.882 ± .023	1.210 ± .016	1.880± .023
10000.	1.221 ± .021	1.903 ± .032	1.222 ± .021	1.901± .032
11000.	1.226 ± .015	1.910 ± .022	1.226 ± .015	1.908± .022
12000.	1.253 ± .016	1.947 ± .024	1.253 ± .016	1.944± .024
13000.	1.277 ± .025	1.980 ± .037	1.278 ± .025	1.978± .037
14000.	1.294 ± .018	2.001 ± .027	1.294 ± .018	1.999± .027
15000.	1.291 ± .024	1.992 ± .037	1.291 ± .024	1.991± .036
20000.	1.358 ± .013	2.084 ± .020	1.358 ± .013	2.082± .020

Tabella A.32: *Colori integrati nelle bande NICMOS dei modelli a* $V = -8$ *ottenuti con efficienza della perdita di massa* $\eta = 0.4$ *e dispersione* $\sigma_\eta = 0.02$.

Myr	$V{-}F222M(2)$	$V{-}F110W(3)$	$V{-}F160W(3)$	$V{-}F222M(3)$
5000.	1.791 ± .053	1.122 ± .034	1.773 ± .051	1.792 ± .053
6000.	1.842 ± .025	1.160 ± .016	1.824 ± .024	1.844 ± .025
7000.	1.887 ± .027	1.192 ± .017	1.867 ± .026	1.888 ± .027
8000.	1.896 ± .032	1.199 ± .020	1.876 ± .031	1.897 ± .032
9000.	1.904 ± .024	1.203 ± .015	1.883 ± .023	1.906 ± .024
10000.	1.927 ± .033	1.214 ± .021	1.904 ± .032	1.929 ± .033
11000.	1.935 ± .023	1.219 ± .015	1.911 ± .022	1.936 ± .023
12000.	1.972 ± .025	1.245 ± .016	1.947 ± .024	1.974 ± .024
13000.	2.007 ± .038	1.270 ± .025	1.981 ± .037	2.008 ± .038
14000.	2.028 ± .027	1.287 ± .018	2.002 ± .027	2.030 ± .027
15000.	2.020 ± .037	1.283 ± .024	1.993 ± .037	2.022 ± .037
20000.	2.115 ± .020	1.350 ± .013	2.085 ± .020	2.117 ± .020

Appendice B

Osservabili

Le uniche informazioni di cui disponiamo ci vengono fornite dall'osservazione delle stelle e quindi dalla radiazione emessa di cui possiamo misurare l'energia totale emessa per unità di tempo, la *luminosità* L, e la distribuzione energetica. La stella, tranne l'atmosfera, è un gas all'equilibrio termodinamico ed emette quindi approssimativamente come corpo nero. È quindi possibile definire la *temperatura efficace (o effettiva)* T_e come segue:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4 \qquad\qquad \sigma = 5.67 \cdot 10^{-5} \ \ dyn \ \ cm^{-2} \ \ K^{-4} \tag{B.1}$$

dove L è comunemente espresso in $erg\, sec^{-1} cm^{-2}$, R è il raggio della stella e $F = \sigma T_e^4$ il flusso di energia uscente. La temperatura efficace risulta quindi essere la temperatura alla superficie della stella (cioè alla base dell'atmosfera) se questa emettesse esattamente come un corpo nero. In realtà gli strumenti utilizzati per rilevare la radiazione hanno una sensibilità diversa nelle diverse bande fotometriche, inoltre la stella stessa emette con intensità diverse a frequenze diverse. Ciò che quindi si misura sono i flussi e le luminosità alle diverse lunghezze d'onda. Molto usate sono le bande di Johnson riportate in figura B.1.:

$U = m_u$ (ultravioletto) $\qquad B = m_b$ (blu) $\qquad V = m_v$ (visibile)

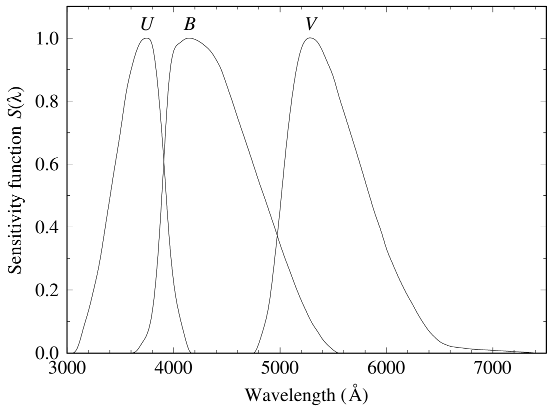

Figura B.1: *Curve di trasmittanza nel sistema (fotoelettrico) di Morgan e Johnson.*

L'unità di misura più comunemente adottata per la luminosità di una stella è la *magnitudine*, definita, per motivi storici[1], come segue:

$$m_i = -2.5 \log F_i + cost. \tag{B.2}$$

dove la costante è definita attraverso una o più stelle "standard" di opportuna assunta magnitudine e F è il flusso che giunge a noi e quindi, se F_o è il flusso emesso alla superficie:

$$F = F_o \cdot \frac{4\pi R^2}{4\pi d^2} \tag{B.3}$$

Il rapporto tra i flussi in due diverse bande, corrispondente alla differenza di magnitudine, indica il contributo relativo di energia e quindi è legato alla temperatura efficace. La differenza di magnitudine tra due bande diverse prende il nome di *indice di colore* e si indica, per esempio, con $B - V$. Data la particolarità della magnitudine di essere decrescente all'aumentare dell'intensità luminosa, un aumento dell'indice di colore $B - V$ corrisponde ad una diminuizione dell'emissione nel blu e quindi della T_e.

[1]In antichità l'unico strumento di ricezione della luce era l'occhio umano che ha una risposta logaritmica; le stelle venivano classificate in 5 classi a seconda della loro luminosità con valori decrescenti, stelle di quinta classe erano 100 volte più luminose delle stelle di prima classe, da cui il coefficiente del logaritmo.

Si definisce *magnitudine bolometrica*, m_{bol}, come la magnitudine relativa all'emissione totale cioè quella che otterremmo con uno strumento con sensibilità costante su tutto lo spettro (eliminati anche i fenomeni di assorbimento da parte dell'atmosfera o di materia interstellare). Vale in particolare la relazione:

$$m_{bol} = m_v + BC \tag{B.4}$$

dove BC (*correzione bolometrica*) risulta con buona approssimazione una funzione di T_e e quindi di $B - V$.

È fondamentale sottolineare come in realtà ciò che si misura è la magnitudine vista dall'osservatore, cioè da terra, che dipende dalla distanza; per valutare la luminosità intrinseca di una stella è quindi necessario definire la *magnitudine assoluta* M come la magnitudine che la stella avrebbe se si trovasse a $10\,pc$ di distanza:

$$m - M = DM = 5\log(d/10pc) \tag{B.5}$$

dove d è la distanza della stella in pc e DM prende il nome di *Modulo di Distanza*, si ottiene così :

$$M_{bol} - M_{bol\odot} = -2.5\log(F/F_\odot) = -2.5\log(L/L_\odot) \tag{B.6}$$

$$L = F_{10pc} \cdot 4\pi(10\,pc)^2 \tag{B.7}$$

dove $M_{bol\odot} = 4.72$ è per l'appunto la magnitudine bolometrica del sole riportata a $10\,pc$.

B.1 Arrossamento

La radiazione delle stelle può essere soggetta a fenomeni di assorbimento da parte della materia (gas, polveri e grani) che incontra durante il tragitto. L'assorbimento A_λ dipende dalla lunghezza d'onda della radiazione ed è più incisivo alle alte frequenze provocando di conseguenza un "arrossamento". Per misurare tale fenomeno si utilizza la variazione dell'indice di colore $E(B-V)$ o E_{B-V} (*eccesso di colore*) definita come la differenza tra le grandezze arrossate e quelle disarrossare:

$$E_{B-V} = (B - V) - (B - V)_o \tag{B.8}$$

Un'indicazione della temperatura è data anche dal tipo di righe spettrali che si osservano, abbiamo quindi due stime della temperatura che devono coincidere, in questo modo possiamo ricavare l'arrossamento. La determinazione dell'arrossamento è comunque molto complicata.

Conclusioni

In questo lavoro di tesi sono state analizzate le proprietà integrate di popolazioni stellari semplici. A tale scopo è stato aggiornato ed integrato un codice di sintesi pre-esistente. Innanzitutto è stato introdotto un trattamento accurato del fenomeno dei pulsi termici che caratterizza le stelle di ramo asintotico per mezzo di formule analitiche basate sulla fisica più recente. Inoltre, data la loro importanza nel calcolo della massa totale, sono state introdotte le strutture di massa molto piccola e le nane bianche in maniera evolutivamente consistente. Sono stati infine aggiornati i modelli evolutivi per stelle in fase di combustione nucleare fino al primo pulso termico.

L'elaborazione di un modello sintetico di popolazione stellare richiede l'assunzione di una data funzione iniziale di massa, l'utilizzo di modelli evolutivi e di atmosfere stellari, il trattamento di certe fasi evolutive particolari, assunzioni sull'efficienza di alcuni meccanismi macroscopici come l'*overshooting* e la diffusione, la calibrazione della perdita di massa in fase di gigante rossa ed assunzioni sulla perdita di massa in fase di ramo asintotico. Inoltre i risultati sono influenzati dagli errori statistici di cui noi, effettuando dieci estrazioni per ogni modello, abbiamo cercato di dare una stima.

Inizialmente abbiamo cercato di stabilire in quale misura le varie fonti di incertezza influiscano sulle proprietà integrate analizzando in dettaglio i lavori presenti in letteratura. Alcune di tali fonti di incertezza, come ad esempio l'influenza della IMF e della perdita di massa in RGB, sono state poi stimate quantitativamente anche nei nostri modelli. In particolare è importante notare che le incertezze sulle trasformazioni di colore e sull'efficienza della convezione esterna vengono superate se, in dipendenza dal modello di atmosfera utilizzato, l'efficienza della convezione esterna è calibrata in maniera da riprodurre il colore del ramo delle giganti rosse osservato in ammassi globulari di metallicità opportuna. Le diverse morfologie di ramo orizzontale sono state riprodotte con diverse assunzioni per la perdita di massa in RGB. Il confronto teoria-osservazione, sia per quanto riguarda i diagrammi colore-magnitudine che i colori integrati, e quindi il popolamento relativo delle varie fasi evolutive, è più che soddisfacente.

La prima parte del lavoro di sintesi ha riguardato i test effettuati sul nostro codice evolutivo tramite confronto teoria-osservazione di ammassi ben osservati. Per fare questo abbiamo cercato di riprodurre i diagrammi colore-magnitudine di tre ammassi globulari ricchi di stelle e che presentano morfologie diverse del ramo orizzontale. L'efficienza della convezione esterna nei nostri modelli è tale che, con i recenti modelli di atmosfera utilizzati nel nostro codice, i colori del ramo orizzontale, del ramo delle giganti rosse e di quello asintotico vengono perfettamente riprodotti. Inoltre abbiamo cercato di riprodurre il diagramma a due colori per numerosi ammassi nella Grande Nube di Magellano riscontrando un buon accordo teoria-osservazione.

Una volta verificata la bontà del nostro codice, abbiamo calcolato l'evoluzione nel tempo di colori integrati, relazioni M/L nelle varie bande fotometriche (quantità che, a nostra conoscenza, non sono disponibili in letteratura in forma così estesa) e rapporto tra il numero di stelle in combustione centrale di He e quello in fase di RGB con luminosità maggiore a quella delle RR Lyrae, per i modelli a $Z = 0.0002$, rappresentativi di ammassi di Popolazione II. In questo modo è stato possibile valutare non solo l'andamento temporale delle grandezze in questione ma anche quello degli errori statistici. I nostri modelli sono stati ottenuti a magnitudine costante V che costituisce la principale osservabile per ammassi stellari non risolti. Abbiamo inoltre analizzato quantitativamente gli effetti di una diversa scelta dell'IMF in diversi intervalli di massa, variandone l'andamento nell'intervallo di valori generalmente accettato. Infine è stata variata la morfologia del ramo orizzontale dimostrando che, almeno per variazioni non troppo drastiche, che porterebbero a morfologie peculiari, l'influenza su colori integrati e rapporto M/L risulta del tutto trascurabile e non rappresenta quindi un ulteriore parametro per quanto riguarda le proprietà integrate.

Gli sviluppi futuri di questo lavoro di tesi riguarderanno, in primo luogo, l'estensione dei calcoli ad un vasto intervallo di composizioni chimiche basandosi sul *set* omogeneo di modelli evolutivi e di trasformazioni di colore già utilizzato in questa tesi. Lo scenario evolutivo così costruito potrà essere utilizzato per l'analisi di ammassi stellari extragalattici. Chiaramente, data la ben nota parziale degenerazione età-metallicità per i colori integrati, sarebbe utile l'introduzione nel codice degli spettri stellari di alcuni elementi per cui il confronto teoria-osservazione permetterebbe di rimuovere la citata ambiguità. Per quanto riguarda i rapporti luminosità su massa un interessante campo di lavoro futuro potrebbe essere la valutazione dell'efficienza della perdita, da parte dell'ammasso, di una frazione delle stelle di massa più piccola che si trovano nella parte ad alta velocità della distribuzione di velocità delle stelle dell'ammasso e che raggiungono, quindi, la "velocità di fuga" dall'ammasso stesso. Tale "evaporazione" di stelle ha ovviamente effetti sul rapporto M/L che potrebbero essere valutati.

Bibliografia

[1] Mihalas D., Binney J., 1981, *Science*, **214**, 829

[2] Monelli M., Pulone L., Corsi C. E., Castellani M., Bono G., Walker A. R., Brocato E., Buonanno R., Caputo F., Castellani V., 2003, *AJ* **126**, 218

[3] Basri G., 2000, *ARA&A*, **38**, 485

[4] Chabrier G., Baraffe I., 1997, *A&A* **327**, 1039

[5] Saumon D., 1996, Hubbard W. B., Burrows A., Guillot T., Lunine J. I., Chabrier G., *ApJ* **460**, 993

[6] Burrows A., Hubbard W. B., Lunine J. I., Liebert J., 2002, *ARA & A*, **40**, 103H

[7] Barrado Y Navascués D., Zapatero O.M.R., Béjar V.J.S., Rebolo R., Martín E. L., Mundt R., Bailer-Jones C.A.L., 2001, *A&A* **377**, 9

[8] Chabrier G., Méra D., 1997, *A&A* **328**, 83

[9] http://gipsy.cjb.net

[10] Mengel J., Sweigart A.V., 1981, in *Astrophysical parameters of globular clusters*, IAU Colloquium, vol. 68, p277

[11] Stothers R. B., Chin C., 1993, *ApJ*, **412**, 294

[12] Scalo J. M., 1986, IAUS, **116**, 451S

[13] Kroupa P., 2002, *SCIENCE*, Vol. 295, No. 5552, p. 82-91

[14] Pardi M. C., Ferrini F., 1994, *ApJ* **421**, 491

[15] Shore S. N., Ferrini F., Fundamentals of Cosmic Physics, **16**, 1

[16] Rocha-Pinto H.J., Scalo, J., Maciel W.J., Flynn C., 2000, *A&A* **358**, 869-885

[17] Salpeter E.E., 1955, *ApJ* **121**, 161

[18] Buzzoni A., 1989, *ApJS* **71**, 817

[19] Worthey G., 1994, *ApJS* **95**, 107-149

[20] Brocato E., Castellani V., Raimondo G., Romaniello M., 1999a, *A&AS* **136**, 65

[21] Brocato E., Castellani V., Poli F.M., Raimondo G., 2000, *A&AS* **146**, 91

[22] Yi S., 2003, *ApJ* **582**, 202

[23] Bruzual G., Charlot S., 2003, *MNRAS*, **344**, 1000

[24] Chabrier G., 2003b, *PASP*, **115**, 763

[25] Kroupa P., 2001, *MNRAS* **322**, 231S

[26] Scalo J. M., 1998, in *The Stellar Initial Mass Function, 38th* Herstmonceux conference, San Francisco. ASP Conference Series, eds. G. Gilmore and D. Howell, volume 142, p.201

[27] Castellani V., 1990, *Astrofisica Stellare*, Zanichelli, Bologna

[28] Bertelli G., Nasi E., Girardi L., Chiosi C., Zoccali M., Gallart C., 2003, *ApJ*, **125**, 770

[29] Yi S., Brown T., Heap S., Hubeny I., Landsman W., Lanz T., Sweigart A., 2000, *ApJ*, **533**, 670

[30] Bohm-Vitense E., *Introduction to Stellar Astrophysics* , Cambridge university Press

[31] Renzini A., Fusi Pecci F., 1988, *A&A* **26**, 199

[32] Girardi L., Bertelli G., Bressan A., Chiosi C., Groenewegen M. A. T., Marigo P., Salasnich B., Weiss A., 2002, *A&A* **391**, 195

[33] Kurucz R. L., 1992, in *The stellar Populations of Galaxies*, ed. B. Barbuy, A. Renzini (Dordrecht, Kluwer), IAU Symp., **149**, 225

[34] Castelli F., Gratton R.G., Kurucz R.L., 1997, *A&AS* **318**, 841

[35] Castelli F., Gratton R.G., Kurucz R.L., 1997, *A&AS* **324**, 432

[36] Castelli F., 1999, *A&A* **346**, 564

[37] Hauschildt P. H., Allard F, Baron E., 1999, *ApJ* **512**, 377

[38] Lejeune T., Cuisinier F., Buser R., 1997, *A&AS* **125**, 229

[39] Lejeune T., Cuisinier F., Buser R., 1998, *A&AS* **130**, 65

[40] Fluk M. A., Plez B., The P. S., de Winter D., Westerlund B. E., Steenman H. C., 1994, *A* & *AS*, **105**, 311F

[41] Bessell M. S., Brett J. M., Scholz M., Wood P. R., 1989, *A* & *AS*, **77**, 1

[42] Bessell M. S., Brett J. M., Scholz M., Wood P. R., 1991, *A* & *AS*, **89**, 335

[43] Alonso A., Arribas S., Martinez-Roger C., 1996, *A&A Suppl* **117**, 227

[44] Alonso A., ArribasS., Martinez-Roger C., 1999, *A&A* **140**, 261

[45] Rood R.T., 1973, *ApJ* **184**, 815

[46] Freeman K.C., Norris J.E., 1981, *ARA&A*, **19**, 319

[47] Salaris M., Weiss A., 2002, *A&A* **388**, 492

[48] Recio-Blanco A., Piotto G., Aparicio A., Renzini A., 2002, *ApJ* **572**, L71

[49] Castellani V., Ponte G., Tornambè A., 1980, *Ap&SS*, **73**, 11

[50] Sills A., Pinsonneault M.H., 2000, *ApJ* **540**, 489

[51] Castellani V., Tornambè A., 1977, *A&A* **61**, 427

[52] Kraft R. P., 1994, *PASP*, **106**, 553

[53] Alcaino G., 1979, *Vistas in Astron.*, **23**, 1

[54] Lee Y.-W., Demarque P., Zinn R., 1988, in *Calibration of Stellar Ages*, Philip A. G. D., Hayes D. S. and Liebert J. W. (Schenectady: L. Davis Press), p. 149

[55] Zinn R., 1985, *ApJ* **293**, 424

[56] Lee Y.-W., 1990, *AJ* **363**, 159

[57] Covino S., Pasinetti Fracassini L.E., Malagnini M.L., Buzzoni A., 1994, *A&A* **289**, 775

[58] Sweigart A.V., 1987, *ApJS*, **65**, 95

[59] Catelan V. M., 2000, *A&A* **227**, 282

[60] Reimers D., 1977, *A&A* **61**, 217

[61] Reimers D., 1977, *A&A* **57**, 395

[62] Renzini A. and Voli M., 1981, *A&A* **94**, 175

[63] Sackmann I.-J., Boothroyd B. S., 1991, *ApJ*, **366**, 529

[64] Paczynski B., 1975, *ApJ*, **202**, 558

[65] Boothroyd A.I., Sackmann I.-J., 1988a, *ApJ*, **328**, 632

[66] Boothroyd A.I., Sackmann I.-J., 1988b, *ApJ*, **328**, 641

[67] Boothroyd A.I., Sackmann I.-J., 1988c, *ApJ*, **328**, 653

[68] Boothroyd A.I., Sackmann I.-J., 1988d, *ApJ*, **328**, 671

[69] Groenewegen M.A.T., de Jong T., 1993, *A&A* **267**, 410 GdJ

[70] Marigo P., Bressan A., Chiosi C., 1996, *A&A* **313**, 545 MBC

[71] Lattanzio J.C., 1991, *ApJS*, **76**, 215

[72] Iben I. Jr., Truran J. W., 1978, *ApJ*, **220**, 980

[73] Wagenhuber J., Groenewegen M.A.T., 1998, *A&A* **340**, 183

[74] Vassiliadis E., Wood P. R., 1993, *ApJ*, **413**, 641

[75] Schild H., 1989, *MNRAS*, **240**, 63

[76] Whitelock P., Feast M., Latchpole R., 1991, *MNRAS*, **248**, 276

[77] Groenewegen M.A.T., de Jong T., 1993c, *A&A* **283**, 463

[78] Girardi L., Bertelli G., 1998, *MNRAS*, **300**, 533

[79] de Jong T., 1990, in From Miras to planetary Nebulae, ed. Mennessier M.O., Omont A., Editions Frontieres, Gif-sur Yvette, 289

[80] Blöcker T., Schönberner D., 1997, *A&A* **324**, 991

[81] Brocato E., Castellani V., Romaniello M., 1998, *A&A* **345**, 499

[82] Weidemann V., 2000, *A&A* **363**, 647

[83] Weidemann V., Koester D., 1983, *A&A* **121**, 77

[84] Dominguez I., Chieffi A., Limongi M., Straniero O., 1999, *ApJ* **524**, 226

[85] Brocato E., 1986, in *International Colloquium on the Age of Stellar Systems*, Rome, Italy, Apr. 15-18, Mem. Soc. Astr. It., vol. 57, no.3, p.479

[86] Straniero O., Chieffi A., 1991, *ApJS*, **76**, 525

[87] Castelli F., Gratton R. G., Kurucz R. L., 1997, *A&A* **318**, 841

[88] Castellani V., Chieffi A., Straniero O., 1992a, *ApJ*, **78**, 517

[89] Cassisi S., Castellani V., Straniero O., 1994, *A&A* **282**, 753

[90] Huebner W. F., Merts A. L., Magee N. H. Jr, Argo M. F., 1971, Los Alamos Sci. Lab. Rept. LA-670-M

[91] Castellani V., Degl'Innocenti S., Marioni M., Prada Moroni P.G., Sestito P., 2003, *A&A* **404**, 645

[92] Cariulo P., Degl'Innocenti S., Castellani V., 2004, in stampa

[93] Ciacio F., Degl'Innocenti S., Ricci B., 1997, *A&AS* **123**, 449

[94] Cassisi S., Castellani V., Degl'Innocenti S., Salaris M. and Weiss A., 1998, *A&A* **129**, 267

[95] Yi S., Demarque P., Kim Y.-C., Lee Y.-W., Ree C. H., Lejeune T., Barnes S., 2001, *ApJS*, **136**, 417

[96] Girardi L., Bressan A., Bertelli G., Chiosi C., 2000, *A&AS* **141**, 371

[97] Salasnich B., Girardi L., Weiss A., Chiosi C. 2000, *A&AS* **361**, 1023

[98] Mowlavi N., Shoerer D., Meynet G., Bernasconi P. A., Charbonnel C., Maeder A., 1998, *A&A* **128**, 471

[99] Salaris M., Garcia-Berro E., Hernanz M., Isern J., Saumon D., 2000, *ApJ*, **544**, 1036

[100] Baraffe I., Chabrier G., Allard F., Hauschildt P. H., 1997, *A&A* **327**, 1054

[101] Dorman B., Nelson L. A., Chau W. J., 1989, *ApJ*, **342**, 1003

[102] Allard F., Hauschildt P. H., Alexander D., Starrfield S., 1997b, *ARA&A* **35**, 137

[103] Saumon D., Jacobson S. B., 1999, *ApJ*, **511**, L107

[104] Bergeron P., Wasemael F., Beauchamp A., 1995, *PASP*, **107**, 1047

[105] Origlia L., Leitherer C., 2000, *AJ*, **119**, 2018

[106] Bessell M. F., Castelli F., Plez B., 1998, *A&A* **337**, 321

[107] Castellani M., Castellani V., 1993, *ApJ*, **407**, 649

[108] Castellani M., Limongi M., Tornambè A., 1992, *ApJ*, **389**, 227

[109] Iben I., 1985, *QJRAS*, **26**, 1

[110] Baud B., Habin H.J., 1983, *ApJ*, **127**, 73

[111] Santos J. F. C., Frogel J. A., 1997, *ApJ* **479**, 764

[112] D'Antona F. D., Mazzitelli I., 1996, *ApJ*, **470**, 1093

[113] Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P., *Volume 1 of Fortran Numerical Recipes*, Cambridge University Press

[114] http://www.nr.com

[115] Salaris M., Chieffi A., Straniero O., 1993, *ApJ*, **414**, 580

[116] Cassisi S., Castellani V., Degl'Innocenti S., Salaris M., Weiss A., 1999, *A&A* **134**, 103

[117] Harris W.E., 2003, http://www.physics.mcmaster.ca/Globular.html

[118] Walker A. R., 1994, *AJ* **108**, 555

[119] Piotto G., King I. R., Djorgovski S. G.,Sosin C., Zoccali M., Saviane I., De Angeli F., Riello M., 2002, *A&A* **391**, 945

[120] http://dipastro.pd.astro.it/globulars/databases/snapshot/snapshot.html

[121] Pagel B.E.J., Portinari L., 1998, *MNRAS* , **298**, 747

[122] Harris W.E., 1996, *AJ* **112**, 1487

[123] Reed B.C., Hesser J. E., Shawl S.J., 1988, *PASP*, **100**, 545

[124] Zinn R., Newell E. B., Gibson J. B., *A&A* **18**, 390

[125] Durrell P. K., Harris W. E., 1993, *AJ*, **105**, 142

[126] Bica E., Clariá J.J., Dottori H., Santos J.F.C. Jr., Piatti A.E., 1996, *ApJSS*, **102**, 57

[127] Schlegel D. J., Finkbeiner D. P., Davis M., 1998, *ApJ*, **500**, 525

[128] Oestreicher M. O., Schmidt-Kaler T., 1996, *A&ASS*

[129] Walker A. R., Heck A., Caputo F., in Post-Hipparcos Cosmic Candles *, Kluwer Academic Publishers, Nederlands, 1999* **117**, 303

[130] Girardi L., Chiosi C., Bertelli G., Bressan A., 1995, *A&A* **298**, 87

[131] Kurth O.M., Fritze U.-Alvensleben V., Fricke K.J., 1999, *A&AS* **138**, 19

[132] Bressan A., Bertelli G., Chiosi C., 1993, *A&AS* **100**, 647

[133] Fagotto F., Bressan A., Bertelli G., Chiosi C., 1994, *A&AS* **104**, 365

[134] Fagotto F., Bressan A., Bertelli G., Chiosi C., 1994, *A&AS* **105**, 29

[135] Fagotto F., Bressan A., Bertelli G., Chiosi C., 1994, *A&AS* **105**, 39

[136] VandenBerg D. A., 1985,*ApJS* **58**, 711

[137] Green E. M., Demarque P., King C. R., 1987, The Revised Yale Isochrones and Kuminosity Functions (New Haven: Yake University Observatory)

Ringraziamenti

Ringrazio la Dott.ssa Scilla Degl'Innocenti per avermi seguito con pazienza e attenzione durante tutto il periodo di tesi. Ringrazio inoltre il gruppo di ricerca di Teramo, in particolar modo la Dott.ssa Gabriella Raimondo, per l'aiuto i preziosi suggerimenti.

Un ringraziamento particolare va a Nicola per l'indispensabile supporto informatico e per essersi subito qualche mio momento di puro panico.

Ringrazio infinitamente Petra che mi ha sostenuto (e aiutato) fino in fondo, sopportando i miei delirii. E ringrazio Alessandro per avermi obbligato a fare l'orale di Metodi quando assolutamente non volevo e, soprattutto, per avermi svelato il mistero delle convergenze. Non posso fare a meno, inoltre, di ringraziare tutti coloro che mi hanno sopportato (in ordine del tutto casuale): Ivan, Marina, Paola, Pierluigi, Andrea, Petra (un'altra volta), Beppe e Lucia (di importanza fondamentale). Vorrei inoltre ringraziare Ottavia che, tempo fa, mi ha fatto notare che le stelle sono decisamente troppe (lo penso anch'io).

Infine i ringraziamenti più importanti vanno a tutta la mia famiglia, in particolare a, Emanuela e a zia Wanna.

Uno smisurato, catrastrofico ringraziamento è per mia sorella Rita, per aver supportato tutto da sola, per avermi sempre fatto trovare cenette leggere leggere e per aver condiviso tanti "pubbini" con me nelle serate no (ma anche in quelle sì).

Per tutto, ringrazio Mamma e Babbo.