

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN FISICA

Anno Accademico 2002-2003

Elaborato Finale

# **Instabilità fluido-dinamiche in fenomeni di Supernovae**

CANDIDATO

Daiana Di Nino

RELATORE

Prof. Steven Shore



*Ai miei genitori, il cui esempio mi ha sempre indicato  
il cammino da seguire.*



# Indice

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introduzione</b>   | <b>6</b>  |
| <b>1 Supernovae</b>   | <b>7</b>  |
| 1.1 Importanza delle Supernovae . . . . .                                 | 7         |
| 1.2 Classificazione delle Supernovae . . . . .                            | 9         |
| 1.3 Supernovae di tipo Ia come indicatori di distanza . . . . .           | 11        |
| 1.4 Un modello per le Supernovae di tipo Ia . . . . .                     | 11        |
| <b>2 Equazioni del moto per i fluidi</b>                                  | <b>14</b> |
| 2.1 Termodinamica di un fluido . . . . .                                  | 14        |
| 2.2 Funzione di distribuzione . . . . .                                   | 16        |
| 2.3 Metodo dei momenti . . . . .  | 18        |
| 2.4 Le equazioni dei fluidi . . . . .                                     | 20        |
| 2.4.1 Pressione . . . . .   | 21        |
| 2.4.2 Equazione di continuità . . . . .                                   | 22        |
| 2.4.3 Equazione del moto . . . . .  | 24        |
| 2.4.4 Equazione dell'energia . . . . .                                    | 25        |
| 2.5 Vorticità . . . . .   | 27        |
| 2.6 Equazione di Bernoulli . . . . .                                      | 29        |
| 2.7 Superfici di discontinuità . . . . .                                  | 31        |
| <b>3 Instabilità</b>  | <b>35</b> |
| 3.1 Principali fonti di perturbazione . . . . .                           | 35        |
| 3.2 Fondamenti dell'analisi della stabilità di un fluido . . . . .        | 36        |
| 3.2.1 Il quadro fisico . . . . .  | 37        |
| 3.2.2 L'analisi matematica per l'instabilità . . . . .                    | 38        |
| 3.3 Perturbazioni alla superficie di separazione tra due fluidi . . . . . | 41        |
| 3.4 Onde di gravità superficiali . . . . .                                | 46        |
| 3.5 Instabilità di Rayleigh-Taylor . . . . .                              | 47        |
| 3.6 Instabilità di Kelvin-Helmholtz . . . . .                             | 48        |
| 3.6.1 Il caso tradizionale . . . . .                                      | 49        |

---

|                       |  |           |
|-----------------------|--|-----------|
| 3.6.2                 | La formazione dei vortici . . . . .  | 49        |
| 3.6.3                 | Il criterio di instabilità di Rayleigh per flussi con un<br>gradiente di velocità . . . . .    | 52        |
| 3.6.4                 | Instabilità di Kelvin-Helmholtz per flussi con gradienti<br>di densità e di velocità . . . . . | 57        |
| 3.6.5                 | Applicazioni astrofisiche dell'instabilità di Kelvin-Helmholtz                                 | 58        |
| 3.7                   | Tempi caratteristici di alcuni processi della fluido-dinamica . .                              | 59        |
| 3.8                   | Deflagrazione termonucleare di una nana bianca di carbonio<br>ed ossigeno . . . . .            | 61        |
| <b>Ringraziamenti</b> |  | <b>66</b> |

# Introduzione

In questa tesina delineiamo il quadro teorico in cui si colloca lo studio delle instabilità fluido-dinamiche per le Supernovae, focalizzando l'attenzione specialmente sull'instabilità di Rayleigh-Taylor e su quella di Kelvin-Helmholtz.

Le Supernovae rappresentano degli oggetti estremamente interessanti dal punto di vista astrofisico, perchè, oltre ad essere dei naturali laboratori di idrodinamica, vengono utilizzate come candele standard per misurare grandi distanze, e, di conseguenza, per porre limiti sui parametri cosmologici. Esse altresì giocano un ruolo fondamentale nella nucleosintesi degli elementi pesanti. Una loro descrizione fisica dettagliata è, però, lungi dall'essere completa e, in particolare, risulta necessario indagare meglio il ruolo che le instabilità hanno nel delineare la struttura e l'esplosione di una Supernova.

Nel primo capitolo presentiamo le motivazioni per lo studio intrapreso. Nel secondo capitolo ricordiamo, quindi, i principali risultati della fluidodinamica classica, adottando un approccio statistico e ricorrendo all'uso della funzione di distribuzione  $f(x, v, t)$ . Una sezione è, poi, dedicata alla discussione delle condizioni al contorno che devono essere soddisfatte in presenza di una superficie di discontinuità delle variabili primitive che caratterizzano un fluido, come la densità e la velocità. Nel terzo capitolo si apre la trattazione delle instabilità fluido-dinamiche. In particolare, vengono discusse le proprietà e le conseguenze dell'instabilità di Rayleigh-Taylor, dovuta a particolari inomogeneità della materia componente il fluido in esame e alla presenza di un campo di forze, e dell'instabilità di Kelvin-Helmholtz, dovuta alla presenza di un gradiente di velocità nel fluido.

Il lavoro si conclude con la presentazione di alcuni recenti risultati ottenuti in letteratura sullo studio della deflagrazione termionucleare nelle Supernovae di tipo Ia.

# Capitolo 1

## Supernovae

### 1.1 Importanza delle Supernovae

*“Why study Supernovae? First, one’s attention is captured by anything new and unusual, and a point of light in the sky is a novelty to draw curiosity. Further study shows that these events are usually at immense distances and hence of gigantic power and one’s imagination is fired with the awesome spectacle of stellar catastrophe”*

Così J. Craig Wheeler [22] introduce l’affascinante argomento delle *Supernovae*. Con questo termine si intende il momento dell’esplosione di una stella che dura pochi secondi ed è uno dei più potenti eventi esplosivi prodotti in Natura. Infatti, è in grado di espellere un’energia pari a  $\simeq 10^{51}$  ergs, ovvero più energia di quanta il Sole ne liberi durante tutto il corso della sua vita (miliardi di anni).

La maggior parte dell’energia prodotta durante questa esplosione si trasforma in energia cinetica e termica della materia in espansione. Quando la somma dell’energia cinetica e dell’energia termica diventa maggiore dell’energia potenziale gravitazionale, la materia della stella non è più legata e continuerà ad espandersi indefinitamente nello spazio interstellare.

È naturale associare ad un evento di Supernova la “morte” di una stella, sebbene, in realtà, l’evoluzione della stella che ha originato l’esplosione prosegue sotto altre forme (stella a neutroni o buco nero). Inoltre, durante l’esplosione, viene rilasciata nello spazio interstellare un’enorme quantità di materia ad una velocità così elevata che si creano delle onde d’urto. Queste onde d’urto sono in grado di perturbare il gas interstellare, inizialmente in



quiete, tramite onde di compressione e rarefazione e, quindi, possono indurre la formazione di nuove stelle.

Non tutte le stelle, però, riescono a dare origine ad una Supernova. Infatti, la teoria dell'evoluzione stellare (per la quale rimandiamo alla letteratura specialistica, tra gli altri [3] e, più recente, [1]) associa questi fenomeni a stelle con massa originaria superiore a 10 masse solari ( $1 M_{\odot} = 1.99 \cdot 10^{33}$  gr), oppure a sistemi di due o più stelle. Nel primo caso, il meccanismo che conduce all'esplosione è il collasso gravitazionale del nucleo della stella (costituito essenzialmente da nichel e ferro). Nel secondo caso, la situazione è completamente differente (vedi sezione 1.4), e l'esplosione si deve ad una catena di reazioni nucleari che hanno luogo nel nucleo di una stella di materia degenera. La Supernova creatasi, in questo caso, viene detta *termonucleare*.

Lo studio delle Supernovae riveste una notevole importanza per vari fattori. Innanzitutto, gli elementi chimici pesanti presenti nell'Universo, non esisterebbero in assenza delle Supernovae. Infatti, il ferro è l'elemento più stabile in Natura, ovvero quello con la maggior energia di legame per nucleone. Quindi è impossibile, con reazioni di fusione nucleare, riuscire a produrre elementi più pesanti del ferro ( $^{56}\text{Fe}$ ). Nella fase di Supernova, invece, l'energia liberata è così alta da creare anche nuclei con numero atomico maggiore di 56. Tale processo viene definito *nucleosintesi esplosiva*.

Le reazioni nucleari che avvengono durante l'esplosione forniscono l'energia per l'espansione, ma non sono direttamente responsabili della produzione dei fotoni che osserviamo. La fonte energetica per la luminosità proviene dal lento decadimento radioattivo del nichel  $^{56}\text{Ni}$  in cobalto  $^{56}\text{Co}$  e successivamente in ferro  $^{56}\text{Fe}$ . La luminosità raggiunge, infatti, il suo massimo circa 15 giorni dopo l'esplosione e poi diminuisce finché tutto il cobalto è decaduto.

La luminosità delle Supernovae (in media  $M_B = -19.5$  per le SN Ia [16]) è così elevata che esse possono essere osservate anche da grandi distanze. Di conseguenza, possono essere usate come indicatori per distanze per le quali gli altri mezzi utilizzati sono inservibili. Affinchè ciò sia possibile è, però, necessario che le supernovae presentino caratteristiche molto simili tra di loro. Le osservazioni mostrano che è possibile raggruppare le Supernovae in due classi principali (come vedremo nella prossima sezione) e che, in effetti, è possibile utilizzare alcune Supernovae come "candele standard". Questa applicazione riveste un'importanza particolare per la determinazione dei parametri cosmologici, tra cui la costante di Hubble. Per una discussione approfondita

si rimanda agli articoli del *The Supernova Cosmology Project* (vedi [15] e referenze incluse).

Un ulteriore motivo dell'importanza delle Supernovae è che esse producono, al momento dell'esplosione, un flusso di neutrini particolarmente intenso. La rivelazione di questi neutrini fornisce, non solo utili informazioni sulle condizioni fisiche del luogo dell'esplosione, bensì anche sulla fisica stessa del neutrino.

I modelli standard dell'esplosione di Supernovae prevedono, inoltre, che esse siano sorgenti di onde gravitazionali di intensità tale da poter essere rivelate con gli strumenti di nuova generazione attualmente in costruzione, anche se l'evento esplosivo avviene in galassie vicine. Ulteriori informazioni si possono ricavare dalla rivelazione dei raggi cosmici che sono prodotti o accelerati nei pressi delle Supernovae. Le Supernovae sono anche in grado di produrre elementi radioattivi che emettono fotoni X e, quindi, contribuiscono alla produzione del fondo X osservato. Particolarmente intenso è anche il flusso di raggi  $\gamma$  e onde radio prodotte.

Infine, le Supernovae, essendo esplosioni ad altissima energia, rappresentano un laboratorio naturale di idrodinamica, che ci permette lo studio di condizioni fisiche irrealizzabili sulla Terra. Purtroppo, però, (1) non è possibile controllare tali eventi come si farebbe in un laboratorio, (2) i dati che riceviamo sono limitati a proiezioni lungo la linea di vista e quindi dobbiamo affidarci ad assunzioni riguardo alla simmetria del problema, (3) non si può prevedere n'è il luogo, n'è l'istante in cui esse avvengono e questo ci impedisce di acquisire le "condizioni iniziali" dell'evento. Tutto questo complica notevolmente lo studio del fenomeno, che si avvale, quindi, dell'uso di simulazioni.

## 1.2 Classificazione delle Supernovae

La classificazione delle Supernovae si basa su dati osservativi fotometrici (dai quali si ricava la cosiddetta *curva di luce*) e spettroscopici. La curva di luce di una Supernova è un grafico dell'andamento temporale della sua luminosità (in una banda fissata). I dati spettroscopici, invece, consentono di identificare gli elementi chimici presenti nel materiale espulso e, tramite l'effetto Doppler, forniscono anche la velocità, lungo la linea di vista, con cui questo materiale viene espulso.

Il criterio principale per la classificazione delle Supernovae è vedere la presenza delle righe dell'idrogeno negli spettri. Se tali righe sono del tutto assenti, la Supernova viene detta di tipo I (SN I); nel caso contrario, la Supernova è detta di tipo II (SN II). Le SN I si suddividono ulteriormente in SN Ib se presentano la riga dell'He I e SN Ia se questa riga non appare (esse possiedono, però, una riga di Si II, assente nel tipo Ib).

Le Supernovae di tipo II, invece, si suddividono ulteriormente in base alle caratteristiche della curva di luce. Esse, però, sono considerate molto eterogenee ed è, quindi, piuttosto difficile definire dei criteri univoci per classificarle. Le Supernovae di tipo I, invece, presentano delle curve di luce molto più omogenee e, proprio grazie a questa proprietà, vengono usate come indicatori di distanza.

La varietà nella classificazione delle Supernovae rispecchia differenti tipi di progenitori. Un'indicazione su quali potrebbero essere questi progenitori ci viene fornita dal sito in cui vengono osservate. Infatti, le Supernovae di tipo Ia si osservano sia in galassie ellittiche che in galassie a spirale (presenti in tutto il disco), mentre le Supernovae di tipo Ib e di tipo II si trovano solo in galassie a spirale e tendono a concentrarsi vicino ai rami della spirale, dove è attiva la formazione stellare. Tenendo presente che nelle galassie ellittiche non c'è formazione stellare in corso, possiamo dedurre che le Supernovae di tipo II e di tipo Ib discendono da stelle a rapida evoluzione (ovvero stelle con massa originaria di almeno  $10 M_{\odot}$ ), mentre i progenitori delle Supernovae di tipo Ia hanno tempi evolutivi di amplissimo spettro, da pochi milioni a diversi miliardi di anni.

L'idea che stelle massicce ad evoluzione rapida fossero alla base delle Supernovae di tipo II ha trovato brillante conferma a seguito dell'esplosione nota come SN 1987A. L'identificazione dei progenitori delle Supernovae di tipo I, d'altra parte, non ha ancora raggiunto una soluzione universalmente accettata. Questo significa che per le SN di tipo II abbiamo a disposizione molte più informazioni e, in particolare, abbiamo un criterio per prevedere il luogo dell'evento esplosivo: basta individuare le stelle più massive.

## 1.3 Supernovae di tipo Ia come indicatori di distanza

Dato che le SN Ia presentano curve di luce molto simili tra di loro, possiamo assumere che la luminosità assoluta  $L_*$ , ovvero il flusso di energia proveniente dalla stella:

$$L_* \equiv 4\pi R^2 \sigma_B T_{eff}^4, \quad (1.1)$$

sia una caratteristica universale. Nella formula  $R$  è il raggio della stella,  $\sigma_B$  la costante di Stefan-Boltzmann e  $T_{eff}$  la temperatura efficace [3]. D'altra parte, noi osserviamo la luminosità apparente  $L$ :

$$L \equiv \frac{L_*}{4\pi d^2}, \quad (1.2)$$

dove  $d$  è la distanza tra la Supernova e la Terra. Di conseguenza, conoscendo sia la luminosità assoluta che quella apparente, è possibile ricavare la distanza  $d$ .

La calibrazione della luminosità assoluta si ottiene a partire dalla luminosità apparente di una Supernova in una galassia a distanza nota (tramite altri metodi, ad esempio per mezzo delle Cefeidi).

L'applicazione del metodo dipende da alcune assunzioni critiche, che non è detto siano sempre valide. In particolare: (1)  $L_*$  è universale; (2) tutti i fotoni ricevuti lungo la linea di vista della Supernova sono da essa emessi; (3) non c'è assorbimento; (4) l'esplosione della Supernova è a simmetria sferica. Ovviamente, se una o più di queste ipotesi sono violate, l'affidabilità del metodo diminuisce e l'errore sulla distanza aumenta.

## 1.4 Un modello per le Supernovae di tipo Ia

Uno dei modelli più plausibili per le Supernovae di tipo Ia prevede che esse siano il frutto dell'esplosione termonucleare di un sistema binario costituito da una nana bianca come stella primaria e da una compagna a più lenta evoluzione come stella secondaria.

Le nane bianche, stelle molto dense e compatte, composte da nuclei di carbonio ed ossigeno e da elettroni *degeneri*, sono il prodotto evolutivo finale di stelle la cui massa iniziale sia inferiore a  $8 M_\odot$ . La loro massa è, però, molto inferiore a questo limite, in quanto (1) durante alcune fasi evolutive, una stella incorre in significative perdite di massa; (2) esiste un limite teorico alla massa di una stella costituita da elettroni degeneri, detto *limite di Chandrasekhar*,

pari a  $1.4 M_{\odot}$  [5]. Infatti, una nana bianca si trova in equilibrio idrostatico perchè la gravità è bilanciata dalla pressione degli elettroni degeneri, ovvero elettroni che occupano tutti i possibili stati quantistici al di sotto del livello di Fermi [13], e tale pressione non dipende dalla temperatura.

Una nana bianca isolata è, quindi, stabile ed inerte, perchè la sua temperatura non è più sufficiente per sostenere delle reazioni nucleari. Essa continua ad irradiare la sua energia, raffreddandosi progressivamente. Le osservazioni, però, ci mostrano che molte nane bianche non sono isolate, bensì appartengono a gruppi di due o più stelle che orbitano attorno ad un comune centro di massa. Se la distanza tra la nana bianca e la sua compagna non è troppo elevata, può succedere che la stella secondaria, durante una fase di espansione, ceda parte della sua massa alla nana bianca. Quest'ultima, dunque, accresce massa finchè non raggiunge il limite di Chandrasekhar.

A questo punto, ad ogni incremento di massa, anche piccolo, corrisponde una sostanziale contrazione della stella e la materia al centro di essa viene compressa. La contrazione favorisce l'aumento di temperatura, innescando, quindi, delle reazioni termonucleari. Nonostante questo processo sia rallentato dalla perdita di neutrini (con conseguente perdita di energia) e dagli scambi di calore, sia convettivi che conduttivi, la temperatura al centro della nana bianca continua ad aumentare e l'energia prodotta diventa maggiore di quella persa.

In una stella ordinaria (con materia non degenera), l'energia prodotta dà luogo ad un'espansione termica, finchè non viene nuovamente ristabilito l'equilibrio tra la forza di gravità e la forza dovuta alla pressione idrostatica. In una nana bianca, invece, l'iniziale aumento di temperatura non varia la pressione degli elettroni degeneri e, quindi, non porta ad una espansione. Le reazioni termonucleari proseguono così senza rallentamenti. Soltanto quando la temperatura è divenuta sufficientemente alta da eliminare la degenerazione della materia, la stella comincia ad espandersi.

A questo stadio, però, l'espansione non è in grado di spegnere le reazioni nucleari, le quali, quindi, proseguono al centro della struttura stellare. L'accensione delle reazioni nucleari dà origine ad un'esplosione che dura solo pochi secondi, ma riesce ad espellere un'energia pari a  $\simeq 10^{51}$  ergs. Questa energia è prodotta da una catena di reazioni termonucleari che parte con la fusione dei nuclei di carbonio e ossigeno e termina con la creazione di nuclei di nichel e ferro.

Le reazioni avvengono principalmente in uno strato sottile della struttura stellare, chiamato *fiamma termonucleare*, che si propaga verso l'esterno. All'inizio, la fiamma è laminare e la sua velocità di propagazione è *subsonica* (cioè inferiore alla velocità del suono). Man mano che la fiamma si allontana dal centro, diventa turbolenta ed accelera.

Se la velocità della fiamma si mantiene subsonica per tutta la durata dell'esplosione, allora si dice che l'esplosione avviene in regime di *deflagrazione*, ma, eventualmente, la velocità della fiamma può arrivare a superare quella del suono (regime *supersonico*) e, in questo caso, il fronte della fiamma è preceduto da un'onda d'urto e l'esplosione prende il nome di *detonazione*.

# Capitolo 2

## Equazioni del moto per i fluidi

In questo capitolo deriveremo schematicamente i risultati della teoria della dinamica dei fluidi utilizzando i metodi della meccanica statistica. In questa schematizzazione, il fluido in esame, che può essere un liquido o un gas, verrà considerato ideale, ovvero un mezzo continuo e omogeneo.

I risultati, qui derivati, verranno nel seguito applicati allo studio delle strutture stellari, in quanto, in prima approssimazione, esse sono composte da gas omogeneo e fortemente collisionale, cioè da particelle identiche il cui cammino libero medio è molto minore del raggio stellare.

Ricordiamo, però, che trascurare le inhomogeneità della materia significa anche trascurare alcuni caratteristici fenomeni di instabilità e. Quindi, nel seguito, rinunceremo all'assunzione di omogeneità per ripristinare la corretta descrizione fisica del problema e studieremo più in dettaglio tali fenomeni, trascurando però l'eventuale presenza di campi magnetici e rotazionali del fluido.

### 2.1 Termodinamica di un fluido

In questa sezione ricorderemo brevemente i fondamentali concetti di termodinamica e meccanica statistica che verranno applicati nel seguito allo studio dei fluidi. Lo scopo di questa sezione non è una derivazione esaustiva e rigorosa, per la quale si rimanda alla letteratura specialistica (tra gli altri [13]), bensì quello di stabilire una notazione convenzionale e fornire le basi per la discussione successiva.

Prima di trattare i fluidi tramite il formalismo termodinamico è importante assicurarsi che si possano definire delle grandezze macroscopiche, come la temperatura, l'entropia e la pressione. È proprio per questo che i fluidi vengono considerati mezzi continui, intendendo con ciò che ogni piccolo elemento di volume del fluido (cioè un volume molto inferiore a quello del corpo considerato, ma molto superiore alle distanze tra le molecole) è sempre sufficientemente grande da contenere un numero di particelle dell'ordine del numero di Avogadro. Dato che le grandezze termodinamiche hanno significato solamente per sistemi in equilibrio termodinamico, noi ci occuperemo solo di fluidi che abbiano già raggiunto tale stato, ovvero fluidi altamente collisionali. L'effetto degli urti è, infatti, quello di condurre il sistema all'equilibrio.

Come punto di partenza ricordiamo la prima legge della termodinamica, la quale afferma che se il fluido compie (o subisce) un lavoro  $\mathcal{L}$ , allora si avrà sia una variazione della sua energia interna  $E$ , sia una variazione del suo calore  $Q$ , in modo tale che:

$$\delta Q = dE + \delta \mathcal{L}. \quad (2.1)$$

La variazione del calore e del lavoro sono indicate diversamente dalla variazione dell'energia interna perchè calore e lavoro non sono variabili di stato. Dalle relazioni  $\delta Q = TdS$  e  $\delta \mathcal{L} = PdV$ , dove  $V$  è il volume occupato dal fluido, si ottiene, riscrivendo l'equazione (2.1), un'utile relazione tra le fondamentali grandezze termodinamiche  $S$ ,  $T$ ,  $P$  e  $V$ :

$$TdS = dE + PdV = \frac{dE}{dT}dT + PdV = C_V dT + PdV, \quad (2.2)$$

dove abbiamo usato la definizione di calore specifico a volume costante  $C_V = (\delta Q/dT)|_V = dE/dT$ . Infine, ponendo  $V = 1/\rho$  (ovvero ponendo la massa totale pari a 1), da cui  $dV = -(1/\rho^2)d\rho$ , la prima legge della termodinamica diventa:

$$dE = TdS + \frac{P}{\rho^2}d\rho. \quad (2.3)$$

Ora introduciamo un'altra grandezza termodinamica, l'*entalpia per unità di massa*:

$$H = E + \frac{P}{\rho}, \quad (2.4)$$

da cui

$$dH = dE + \frac{1}{\rho}dP - \frac{P}{\rho^2}d\rho = TdS + \frac{1}{\rho}dP. \quad (2.5)$$



Un'altra importante relazione tra le grandezze termodinamiche ci viene fornita dall'equazione di stato, in generale nella forma  $f(T, P, \rho) = 0$ , che dipende dalle proprietà specifiche del fluido. Qui ci limitiamo a ricordare le equazioni di stato più usate:

- L'equazione di stato per i gas perfetti

$$PV = \frac{1}{\mu} \mathcal{R}T, \quad (2.6)$$

con  $\mathcal{R}$  costante universale dei gas e  $\mu$ , peso molecolare medio;

- l'*equazione di stato politropica*, cioè l'equazione di stato per i gas perfetti adiabatici, ovvero in cui non ci sono scambi di calore con l'esterno:

$$P = K\rho^\gamma, \quad (2.7)$$

dove  $K$  è una costante moltiplicativa e  $\gamma = C_P/C_V \geq 1$  ( $C_P$  è il calore specifico a pressione costante). L'equazione politropica si ottiene semplicemente ponendo  $\delta Q = 0$  nella (2.2) e utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti.

## 2.2 Funzione di distribuzione

Per descrivere completamente un fluido in moto è necessario conoscere la distribuzione della velocità media delle particelle che compongono il fluido  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z; t)$  e lo stato termodinamico del fluido stesso. Quest'ultimo è noto se si conosce la pressione  $P$  del fluido, la sua densità  $\rho$  e la sua temperatura  $T$ ; quindi lo stato di un fluido in moto è completamente determinato se si conoscono sei quantità in tutto, le tre componenti della velocità  $\mathbf{V}$  e le tre grandezze termodinamiche. Serviranno, di conseguenza, altrettante equazioni; una prima equazione è l'equazione di stato del fluido che ci fornisce una relazione tra  $P$ ,  $\rho$  e  $T$ , le altre equazioni, invece, si ricavano a partire dalla cosiddetta *funzione di distribuzione*.

La funzione di distribuzione di un fluido è una funzione che fornisce la probabilità di ogni singola particella di avere una ben determinata posizione e velocità ad ogni tempo e che tiene conto del fatto che il moto delle particelle che costituiscono il fluido può essere governato da forze dovute sia alla presenza di un campo esterno sia dall'interazione tra la materia stessa. Per introdurre la funzione di distribuzione  $f$  assumiamo che  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  sia un punto

nello spazio delle fasi di una singola particella (si tratta, dunque, di uno spazio a sei dimensioni), allora, se  $dN$  è il numero di particelle che al tempo  $t$  si trovano nell'elemento di volume  $d\mathbf{x}$ , con velocità compresa tra  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ , la funzione di distribuzione è data da:

$$dN = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t) d\mathbf{x} d\mathbf{v}. \quad (2.8)$$

Di conseguenza, integrando, si ha subito che la funzione di distribuzione è caratterizzata dalla seguente proprietà:

$$N = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t) d\mathbf{x} d\mathbf{v}, \quad (2.9)$$

dove l'integrale viene eseguito in un volume  $\Delta\mathbf{x}\Delta\mathbf{v}$  dello spazio delle fasi di singola particella e  $N$  è il numero totale delle particelle contenute in questo volume al tempo  $t$ . Dalla definizione stessa si vede che  $f$  è una probabilità, quindi deve essere una funzione integrabile, normalizzabile e non negativa.

La funzione di distribuzione, dunque, ci fornisce molte informazioni sullo stato del fluido, ma, per poter seguire anche nel tempo il comportamento del fluido, è necessario avere a disposizione un'equazione che descriva l'evoluzione temporale della funzione di distribuzione. In tutta generalità, l'equazione per l'evoluzione temporale della funzione di distribuzione si ottiene semplicemente a partire dalla derivata totale rispetto al tempo:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + \dot{v}_j \frac{\partial f}{\partial v_j} = \left( \frac{df}{dt} \right)_c, \quad (2.10)$$

con la convenzione di somma sugli indici ripetuti. L'equazione (2.10) viene detta *equazione di Boltzmann* e contiene il termine collisionale  $(df/dt)_c$ , il quale serve per tener conto degli effetti dovuti agli urti tra le particelle e rende quest'equazione non-lineare.

Nel caso di sistemi in equilibrio, e quindi nel nostro caso, il termine collisionale si annulla, semplificando notevolmente la nostra equazione. Questo non significa affatto che non vi siano più collisioni (perchè è proprio grazie ad esse che si raggiunge l'equilibrio), ma semplicemente, se si considera un particolare volumetto dello spazio delle fasi di un sistema in equilibrio, l'effetto degli urti sarà solo quello di ridistribuire le particelle mantenendo invariato il numero totale di particelle contenute nel volumetto (ovvero tante ne escono quante ne entrano).

In questo caso particolare, l'equazione di Boltzmann (2.10) diventa:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + \dot{v}_j \frac{\partial f}{\partial v_j} = 0, \quad (2.11)$$

che viene detta *equazione di Vlasov*. Notiamo che, siccome le stelle sono costituite da gas fortemente collisionale [5], nella nostra analisi non è troppo restrittivo ridurci sempre all'equazione di Vlasov.

La soluzione dell'equazione di Vlasov, assegnate le condizioni iniziali  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ , si può ottenere formalmente in termini delle curve caratteristiche, date dalla soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} \equiv \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \\ \frac{dv}{dt} \equiv \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\partial \phi_T}{\partial \mathbf{x}} \end{cases}$$

dove  $\phi_T = \phi_T(\mathbf{x}; t)$  indica il potenziale totale cui è soggetto il sistema.

## 2.3 Metodo dei momenti

Avendo ottenuto una funzione di distribuzione e un'equazione che ne descrive la sua evoluzione (l'equazione di Vlasov) dobbiamo cercare di estrarne delle informazioni sulle grandezze che caratterizzano il fluido in esame. Il metodo dei momenti è appunto un'utile tecnica matematica che ci permetterà di raggiungere questo scopo.

Prima di descrivere in dettaglio questo metodo, ricordiamo la definizione di *momenti di ordine  $n$*  ( $\mathcal{M}^{(n)}$ ) di una assegnata funzione di distribuzione  $F(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t)$ :

- *nello spazio delle velocità*

$$\mathcal{M}_v^{(n)}(\mathbf{x}; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v}^n F(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t) d\mathbf{v}; \quad (2.12)$$

- *nello spazio delle configurazioni*

$$\mathcal{M}_x^{(n)}(\mathbf{v}; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}^n F(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t) d\mathbf{x}, \quad (2.13)$$

dove, nello scrivere  $\mathcal{M}_i^{(n)}$ , indichiamo con  $(n)$  l'ordine considerato e con  $i$  lo spazio in cui si opera.

Ritornando alla funzione di distribuzione  $f$ , si vede subito, dalla definizione (2.9), che il momento di ordine zero nello spazio delle velocità è proprio la densità numerica delle particelle:

$$n(\mathbf{x}; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t) d\mathbf{v}. \quad (2.14)$$

Il numero totale di particelle  $N$  presenti al tempo  $t$  si ricava integrando l'equazione (2.14) sullo spazio delle posizioni:

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} n(\mathbf{x}; t) d\mathbf{x}. \quad (2.15)$$

In generale, però risulta molto più comodo utilizzare la densità di massa  $\rho$ . Anche questa grandezza può essere vista come un momento di ordine zero della funzione di distribuzione, a meno di una costante moltiplicativa che è proprio la massa di una singola particella  $m$  (ricordiamo che abbiamo supposto che le particelle fossero tutte identiche, quindi con ugual massa):

$$\rho(\mathbf{x}; t) = m \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t) d\mathbf{v}. \quad (2.16)$$

Infine definiamo *media* di una generica quantità  $A(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t)$  pesata tramite la funzione di distribuzione  $f$ , la seguente grandezza<sup>1</sup>:

$$\bar{A}(\mathbf{x}; t) \equiv \frac{\int m A(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t) d\mathbf{v}}{\int m f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t) d\mathbf{v}} = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}; t)} \int m A(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t) d\mathbf{v}. \quad (2.17)$$

Quest'ultima definizione è utile perchè il punto di partenza del metodo dei momenti è proprio quello di derivare delle equazioni differenziali che descrivano l'evoluzione di  $\bar{A}$ . Queste equazioni si ottengono facilmente dall'identità

$$\int m A \left( \frac{\partial f}{\partial t} + v_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + \dot{v}_j \frac{\partial f}{\partial v_j} \right) d\mathbf{v} = 0 \quad (2.18)$$

che è un'immediata conseguenza dell'equazione di Vlasov.

Analizziamone termine per termine, ricordando che le medie vanno effettuate da  $-\infty$  a  $+\infty$ :

---

<sup>1</sup>D'ora in avanti, se gli estremi degli integrali non verranno specificati, si intenderà che vengono eseguiti da  $-\infty$  a  $+\infty$ .

- Per il primo addendo si ottiene:

$$\int m A \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} = \int m \left( \frac{\partial f A}{\partial t} - f \frac{\partial A}{\partial t} \right) d\mathbf{v} = \frac{\partial \rho \bar{A}}{\partial t} - \rho \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}, \quad (2.19)$$

in quanto, in questo caso, le operazioni di derivazione e di integrazione commutano perchè  $\mathbf{v}$  è indipendente da  $t$ .

- Il secondo addendo diventa:

$$\int m A v_j \frac{\partial f}{\partial x_j} d\mathbf{v} = \int m \left( \frac{\partial f A v_j}{\partial x_j} - f \frac{\partial A v_j}{\partial x_j} \right) d\mathbf{v} = \frac{\partial \rho \bar{A} v_j}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial \bar{A} v_j}{\partial x_j}, \quad (2.20)$$

dove, nuovamente, le operazioni di derivazione e di integrazione commutano perchè  $\mathbf{v}$  è indipendente da  $\mathbf{x}$ .

- Infine per l'ultimo addendo si ha:

$$\int m A \dot{v}_j \frac{\partial f}{\partial v_j} d\mathbf{v} = \dot{v}_j \int m \left( \frac{\partial f A}{\partial v_j} - f \frac{\partial A}{\partial v_j} \right) d\mathbf{v} = -\rho \dot{v}_j \frac{\partial \bar{A}}{\partial v_j} \quad (2.21)$$

che si trova ricordando che velocità e accelerazioni sono variabili indipendenti e che  $f$  è una funzione integrabile e normalizzabile per cui  $f \rightarrow 0$  per  $|v| \rightarrow \infty$  (cioè particelle con velocità infinita non sono permesse).

Riunendo tutti i termini nell'equazione (2.18) si ottiene la seguente fondamentale identità:

$$\frac{\partial \rho \bar{A}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{A} v_j}{\partial x_j} = \rho \dot{v}_j \frac{\partial \bar{A}}{\partial v_j} + \rho \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \rho \frac{\partial \bar{A} v_j}{\partial x_j}. \quad (2.22)$$

## 2.4 Le equazioni dei fluidi

Grazie al metodo dei momenti, è, dunque, molto semplice ricavare le restanti cinque equazioni che ci servono per caratterizzare completamente un fluido. Infatti, basta applicare la definizione stessa di momento all'equazione (2.18):

- Calcolando il momento di ordine zero ( $A = 1$ ) e tenendo presente che  $\frac{\partial \rho}{\partial v_j} / \frac{\partial x_j} = 0$  si ottiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (2.23)$$

detta *equazione di continuità*.

- Calcolando il primo momento ( $A = v_i$ ) e tenendo presente che  $\overline{\partial v_i v_j / \partial x_j} = 0$  e  $\overline{\partial v_i / \partial t} = 0$  si ottiene l'equazione del moto:

$$\frac{\partial \rho \overline{v_i}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \overline{v_i v_j}}{\partial x_j} = F_i, \quad (2.24)$$

dove con  $F_i$  si intende la densità di forza totale agente sul fluido, cioè  $F_i = \int m \dot{v}_j \delta_{ij} f d\mathbf{v} = \rho \dot{v}_i$ ; in generale la forza totale è dovuta alla presenza di eventuali campi esterni e all'interazione tra le particelle.

- Infine, calcolando il secondo momento ( $A = v_i v_i = v^2$ ) e tenendo presente che  $\overline{\partial v_i^2 v_j / \partial x_j} = 0$  e  $\overline{\partial v_i^2 / \partial t} = 0$  si ottiene:

$$\frac{\partial \rho \overline{v_i v_i}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \overline{v_i v_i v_j}}{\partial x_j} = \rho \dot{v}_j \frac{\partial v_i v_i}{\partial v_j} = 2\rho \dot{v}_j \overline{v_i} \delta_{ij}. \quad (2.25)$$

### 2.4.1 Pressione

Per comprendere meglio il significato delle equazioni appena ricavate, è conveniente riscrivere la velocità  $\mathbf{v}$  di una particella in termini di due addendi:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad v_i = V_i + u_i, \quad (2.26)$$

dove

$$\mathbf{V} \equiv \overline{\mathbf{v}} = \frac{1}{\rho} \int m \mathbf{v} f d\mathbf{v} \quad (2.27)$$

è la velocità *ordinata*, propria del moto d'insieme di tutto il fluido; mentre

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{v} - \mathbf{V} \quad (2.28)$$

è la velocità della singola particella nel sistema di riferimento in cui il fluido è fermo (noto come sistema Lagrangiano). La velocità  $\mathbf{u}$  viene detta *casuale* perchè gode della proprietà di avere media nulla ( $\overline{\mathbf{u}} = 0$ ) e questa è una proprietà macroscopica, nel senso che vale indipendentemente dalla funzione di distribuzione  $f$ .

Con queste definizioni, la media di ogni componente della velocità risulta:

$$\overline{v_i} = \overline{V_i + u_i} = V_i, \quad (2.29)$$

ed analogamente,

$$\overline{v_i v_j} = \overline{(V_i + u_i)(V_j + u_j)} = V_i V_j + \overline{u_i u_j}. \quad (2.30)$$

Il tensore  $\rho \overline{v_i v_j} = \rho V_i V_j + \rho \overline{u_i u_j}$  viene spesso chiamato *tensore di Reynolds*, che contiene sia il termine dovuto al moto macroscopico che quello dovuto al moto microscopico.

In particolare, si definisce tensore della pressione  $P_{ij}$  il momento trasportato dal moto microscopico, ovvero:

$$P_{ij} = \rho \overline{u_i u_j}. \quad (2.31)$$

Inoltre, è conveniente separare la traccia del tensore della pressione per evidenziare meglio che il momento trasportato da una particella a causa del suo moto microscopico consiste di una parte isotropa  $P\delta_{ij}$  e una parte anisotropa  $\pi_{ij}$ :

$$P_{ij} = P\delta_{ij} - \pi_{ij}. \quad (2.32)$$

Con  $P$  indichiamo la pressione scalare (o, semplicemente, pressione), definita da:

$$P = \frac{1}{3} \rho \overline{\mathbf{u}^2}, \quad (2.33)$$

mentre  $\pi_{ij}$  è il *tensore di sforzo viscoso*, simmetrico e senza traccia, proporzionale alla viscosità del fluido. Nel seguito ci occuperemo solamente di fluidi non viscosi, per cui porremo  $\pi_{ij} = 0$ .

Possiamo definire anche un altro tensore legato alla pressione, ovvero il *tensore di sforzo* (dall'inglese, stress tensor):

$$T_{ij} = P\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (2.34)$$

dove il tensore  $\tau_{ij}$  è sempre un termine legato alla viscosità del fluido, ma rappresenta la turbolenza del moto macroscopico. Esso è importante perché la velocità media del moto macroscopico  $\mathbf{V}$  include, in effetti, anche i moti turbolenti, che si verificano nel caso in cui il flusso risulti assolutamente instabile (vedi capitolo 3).

### 2.4.2 Equazione di continuità

Con le precedenti osservazioni è chiaro che l'equazione di continuità (2.23) si può riscrivere più semplicemente in termini della sola velocità relativa al moto ordinato, ovvero:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_j}{\partial x_j} = 0. \quad (2.35)$$

Ora è facile dimostrare che l'equazione di continuità è una diretta conseguenza della *conservazione locale della massa*. Infatti, consideriamo un volume  $V_0$  fisso nello spazio e sia  $S$  la superficie che lo delimita e  $\mathbf{V}$  la velocità del fluido, allora la massa del fluido racchiusa in  $V_0$  è  $\int_{V_0} \rho d\mathbf{x}$ . Invece,

la massa che passa nell'unità di tempo attraverso un elemento unitario della superficie  $S$  è  $\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ , dove  $\mathbf{n}$  è un vettore unitario, avente direzione lungo la normale all'elemento di superficie  $dS$  e verso uscente dalla superficie stessa ( $\rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} > 0$ , se la massa fuoriesce da  $V_0$ ).

Quindi la massa totale del fluido uscente dall'intero volume  $V_0$  nell'unità di tempo è:

$$\int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho d\mathbf{x}, \quad (2.36)$$

dove nell'ultimo membro compare il segno meno perchè stiamo considerando il flusso di massa *uscente*.

Per il teorema della divergenza, l'integrale di superficie diventa:

$$\int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V_0} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathbf{x}, \quad (2.37)$$

così, dall'equazione (2.36) si ottiene:

$$\int_{V_0} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right] d\mathbf{x} = 0. \quad (2.38)$$

Infine, siccome quest'ultima equazione deve valere per un qualunque volume  $V_0$ , si riottiene proprio l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0. \quad (2.39)$$

In particolare se  $\rho = \text{costante}$ , ovvero se il fluido è incompressibile, l'equazione di continuità si riduce a:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (2.40)$$

Quando il fluido è incompressibile, la fluido-dinamica risulta notevolmente semplificata, quindi vogliamo specificare sotto quali condizioni quest'assunzione è ragionevole. Quando un gas è compresso in una regione limitata (locale), l'eccesso di pressione creato genera delle onde sonore che agiscono sulla materia in modo tale da ricondurla ad una distribuzione uniforme. Di conseguenza, solo oggetti che si muovono a velocità paragonabili o superiori a quella del suono sono in grado di produrre delle compressioni apprezzabili. Invece, quando un oggetto si muove più lentamente della velocità del suono, il gas può dissipare la compressione ad una velocità maggiore di quella dell'oggetto stesso. Un gas può, quindi, essere visto come un fluido incompressibile fintanto che tutti i moti interni hanno velocità inferiori a quella del suono.



### 2.4.3 Equazione del moto

L'equazione del moto (2.24) può essere interpretata più facilmente se si utilizzano i risultati (2.30), (2.31), (2.32) e si considera  $\pi_{ij} = 0$ , infatti essa diventa:

$$\frac{\partial \rho V_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_i V_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho V_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho V_i V_j + P \delta_{ij}) = F_i \quad (2.41)$$

oppure

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + V_i \frac{\partial \rho V_j}{\partial x_j} + \rho V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_i} = F_i. \quad (2.42)$$

Infine, grazie all'equazione di continuità (2.35), l'equazione del moto, detta anche *equazione di Eulero*, assume la seguente semplice forma:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + F_i. \quad (2.43)$$

Ricordiamo che  $F_i$  è la densità della forza totale agente sul fluido. Possiamo riscrivere questa grandezza evidenziando che la forza totale può essere sia conservativa (e quindi esprimibile tramite un potenziale  $\Phi$ ), sia non conservativa:

$$F_i = -\rho \partial \Phi / \partial x_i + \rho a_i \quad (2.44)$$

dove  $\mathbf{a}$  indica appunto l'accelerazione dovuta a forze non conservative.

Quest'equazione è legata alla *conservazione dell'impulso*. Infatti, consideriamo un volume  $V_0$  fisso nello spazio e supponiamo che non vi siano campi esterni, allora la forza totale agente su questo volume è  $-\int_S P \mathbf{n} dS$ , dove il segno meno è dovuto alla convenzione di considerare positiva la forza esercitata dal fluido e negativa quella agente sul fluido stesso.

Utilizzando, nuovamente, il teorema della divergenza, si ottiene:

$$-\int_S P \mathbf{n} dS = -\int_{V_0} \nabla P d\mathbf{x}, \quad (2.45)$$

dalla quale si osserva che su un generico elemento unitario di volume del fluido agisce una forza pari a  $-\nabla P$ . Quindi possiamo scrivere:

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = -\nabla P. \quad (2.46)$$

Se ora ammettiamo la presenza di campi esterni, ritroviamo l'equazione del moto nella sua forma usuale:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi + \mathbf{a}. \quad (2.47)$$

Per quanto riguarda le strutture stellari, esse sono sistemi autogravitanti, ovvero le particelle che compongono la materia stellare creano esse stesse il campo gravitazionale cui sono sottoposte. Il potenziale per l'autogravità si ottiene risolvendo l'equazione di Poisson autoconsistente:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (2.48)$$

dove  $G$  è la costante gravitazionale universale.

Ricordiamo, infine, che alle equazioni del moto bisogna sempre aggiungere le condizioni al contorno, che devono essere soddisfatte sulle superfici che confinano il fluido. Per un fluido ideale, la condizione al contorno è semplicemente che il fluido non possa penetrare una superficie solida, ovvero la componente della velocità del fluido normale alla superficie deve essere pari alla velocità della superficie stessa. Nel caso, invece, in cui vi siano due fluidi immiscibili a contatto, la condizione diventa che la pressione e le componenti della velocità normale alla superficie di separazione siano le stesse per entrambi i fluidi ed uguali all'eventuale velocità della superficie stessa (in sezione 2.7 sono riportati maggiori dettagli).

#### 2.4.4 Equazione dell'energia

Seguendo lo stesso ragionamento dei paragrafi precedenti, possiamo riscrivere l'equazione (2.25) nel seguente modo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\rho}{2} (\mathbf{V}^2 + \overline{\mathbf{u}^2}) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\rho}{2} \overline{(V_i + u_i)^2 (V_j + u_j)} \right] = -\rho V_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \rho V_j a_j. \quad (2.49)$$

Esplicitando la media presente nel secondo termine, si ha:

$$\overline{(V_i + u_i)^2 (V_j + u_j)} = \mathbf{V}^2 V_j + 2V_i \overline{u_i u_j} + V_j \overline{\mathbf{u}^2} + \overline{u_j \mathbf{u}^2}. \quad (2.50)$$

A questo punto è utile definire l'energia interna per unità di massa:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{u}^2} = \frac{3}{2} \frac{P}{\rho} \quad (2.51)$$

e il flusso di calore per conduzione termica (nella direzione  $j$ ):

$$Q_j = \frac{1}{2} \overline{\rho u_j \mathbf{u}^2}, \quad (2.52)$$

così, ricordando anche la definizione di pressione (2.32), si ottiene l'equazione dell'energia totale nella forma della sua conservazione:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{2} \mathbf{V}^2 + \rho \epsilon \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\rho}{2} \mathbf{V}^2 V_j + P \delta_{ij} V_i + \rho \epsilon V_j + Q_j \right) = \rho V_j a_j - \rho V_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}, \quad (2.53)$$

oppure

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \epsilon \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho V_j \left( \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \epsilon \right) \right] = \rho V_j a_j - \rho V_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial Q_j}{\partial x_j}. \quad (2.54)$$

L'equazione (2.54) esprime il fatto che l'energia totale del fluido è data dalla somma di una parte dovuta alla velocità media del moto globale del fluido,  $\rho \mathbf{V}^2/2$ , e di una parte dovuta al moto casuale,  $\rho \epsilon$ . Analizziamo, più in dettaglio, l'equazione (2.54): il flusso dell'energia nella  $j$ -esima componente consiste di una parte dovuta al moto d'insieme del fluido,  $\rho V_j \mathbf{V}^2/2$ , più il flusso dell'entalpia,  $\rho V_j (\epsilon + P/\rho)$ , e il flusso del calore dovuto alla conduzione termica,  $Q_j$  (sempre considerando nullo il contributo della viscosità); infine, i termini  $\rho V_j a_j$  e  $-\rho V_j (\partial \Phi / \partial x_j)$ , rappresentano le possibili sorgenti dell'energia.

Se vogliamo tener conto anche delle perdite d'energia, spesso fondamentali in problemi di astrofisica, nell'equazione (2.54), va aggiunto il contributo  $\rho \Lambda$ , dove, con  $\Lambda = \Lambda(T, P, \rho)$  indichiamo tutte le possibili perdite di energia che non erano incluse nell'equazione di Vlasov. In particolare, nelle Supernovae, le perdite di energia sono dovute essenzialmente a processi radiativi e alla perdita di neutrini, mentre processi dissipativi, come la conduzione termica, risultano trascurabili (vedi sezione 3.7).

L'equazione per l'energia interna si trova anch'essa tramite il metodo dei momenti ponendo  $A = \mathbf{u}^2/2$  nell'equazione (2.22):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \epsilon V_j) + \frac{\partial Q_j}{\partial x_j} + P \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0. \quad (2.55)$$

Per quanto riguarda, invece, la conduzione termica, essa è un fenomeno dovuto all'eventuale variazione di temperatura attraverso il fluido (può avvenire anche in un fluido in quiete), per la quale le molecole trasferiscono calore da punti in cui la temperatura è maggiore a punti in cui è minore. Nel caso di piccoli gradienti di temperatura, si può espandere questo flusso di calore in serie di potenze del gradiente della temperatura, mantenendo solo il primo termine di tale espansione. Il termine di ordine zero è evidentemente nullo, in quanto il flusso di calore deve essere nullo quando  $\nabla T = 0$ . Così si ha:

$$\mathbf{Q} = -\rho \kappa \nabla T, \quad (2.56)$$

con  $\kappa$  che indica la *conduttività termica* ed è, in generale, una funzione della temperatura e della pressione.

## 2.5 Vorticità

Introduciamo, ora, una nuova grandezza, la *vorticità*  $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{V}$ .

Dalla definizione stessa segue che la vorticità ha le dimensioni di una frequenza. Essa è una misura della rotazione locale del fluido, in quanto è pari alla circuitazione lungo un percorso chiuso che racchiude una superficie di area unitaria. Infatti, la circuitazione  $C$ , lungo un percorso chiuso  $\Gamma$ , ad un fissato istante di tempo è:

$$C = \int_{\Gamma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.57)$$

Quindi, la circuitazione per unità di superficie, grazie al teorema di Stokes, è  $\nabla \times \mathbf{V}$  (in una regione semplicemente connessa), ovvero è proprio la vorticità. Se la vorticità è nulla ovunque, si dice che il flusso è *irrotazionale*. Notiamo, però, che la vorticità non è legata alla rotazione globale del fluido, ma solo alla rotazione locale delle particelle che lo compongono.

Il modulo della vorticità  $\omega$  è particolarmente utile per calcolare il modulo della velocità angolare  $\Omega$  di un elemento del fluido. Infatti, dato che la vorticità è la circuitazione per unità di superficie, ovvero:

$$\omega = \frac{\int_{\Gamma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}}{\pi r^2} = \frac{2\pi r V}{\pi r^2} = \frac{2V}{r}, \quad (2.58)$$

mentre la velocità angolare di un elemento del fluido è  $\Omega \equiv V/r$ , segue:

$$\Omega = \frac{\omega}{2}. \quad (2.59)$$

Con l'introduzione della vorticità, l'equazione del moto (2.47) che abbiamo ricavato nella sezione 2.4.3:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi + \mathbf{a} \quad (2.60)$$

si può riscrivere come:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \frac{1}{2} \nabla V^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi + \mathbf{a}, \quad (2.61)$$

dove abbiamo fatto uso della formula:

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \equiv (\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V} + \frac{1}{2} \nabla V^2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \frac{1}{2} \nabla V^2. \quad (2.62)$$

L'equazione per la vorticità si ottiene prendendo il rotore di entrambi i membri dell'equazione (2.61) e ricordando che il rotore di un gradiente è sempre nullo:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) = \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla P + \nabla \times \mathbf{a}. \quad (2.63)$$

Possiamo semplificare ulteriormente quest'equazione se ci restringiamo al caso di sole forze conservative (come la gravità), il che significa sostanzialmente trascurare le forze di origine magnetica; così si ha:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) = \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla P. \quad (2.64)$$

L'equazione (2.64), valida in generale per fluidi compressibili ed incompressibili, ci dice che le fluttuazioni della densità e della pressione possono essere viste come termini di generazione o annichilazione della vorticità e che essa non è, in generale, una quantità conservata.

Per un fluido incompressibile ( $\rho = \text{costante}$ ), l'equazione di continuità ci garantisce che  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$  (vedi sezione 2.4.2), mentre l'equazione per la vorticità si semplifica ancora:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) = 0, \quad (2.65)$$

ovvero la vorticità si conserva. Quest'ultima equazione coinvolge solo due variabili primitive,  $\mathbf{V}$  e  $\boldsymbol{\omega}$ , che non sono indipendenti. Se viene assegnata  $\mathbf{V}$ , allora  $\boldsymbol{\omega}$  si può trovare facilmente. D'altra parte, se viene assegnata  $\boldsymbol{\omega}$ , allora  $\mathbf{V}$  si ottiene risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \end{cases}$$

Dal momento che l'equazione per la vorticità fornisce l'evoluzione per un fluido incompressibile e siccome è possibile calcolare  $\mathbf{V}$  a partire da  $\boldsymbol{\omega}$ , è chiaro che abbiamo un set completo di equazioni per la dinamica di un fluido incompressibile, ovvero l'equazione dell'energia risulta, in questo caso, ridondante.

Molti problemi astrofisici (tra i quali la modellizzazione dell'esplosione delle Supernovae), però, riguardano sistemi con apprezzabili variazioni della densità o fenomeni che coinvolgono moti con velocità simile o superiore a quella

del suono. In questi casi, l'approssimazione di fluidi incompressibili non è più ragionevole (vedi sezione 2.4.2) e l'equazione dell'energia diventa indispensabile. Inoltre, per ottenere la vorticità bisognerà usare l'equazione (2.64). Comunque, in varie situazioni astrofisiche (per esempio, nella modellizzazione degli interni stellari), si ricorre anche all'equazione di stato politropica (2.7), dove  $P = P(\rho)$ . In questi casi, allora, si può, nuovamente, utilizzare l'equazione (2.65), perchè vale:

$$\nabla \rho \times \nabla P = 0, \quad (2.66)$$

che viene detta condizione *barotropica*. La condizione barotropica afferma che le superfici a pressione costante (le isobare) coincidono con quelle a densità costante (le isopiche), il che, appunto, non è sempre vero.

## 2.6 Equazione di Bernoulli

Le equazioni della fluido-dinamica si semplificano notevolmente nel caso di flussi *stazionari*, cioè flussi per i quali  $\partial \mathbf{V} / \partial t = 0$ , e in presenza di sole forze conservative. Infatti, l'equazione del moto (2.61) diventa:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \frac{1}{2} \nabla V^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi. \quad (2.67)$$

La condizione di stazionarietà non significa che il fluido è statico, ma solo che la velocità è costante in ogni punto, cioè le particelle si muovono venendo sempre rimpiazzate da altre particelle che si muovono esattamente nello stesso modo.

Introduciamo, ora, il concetto di *linea di flusso*. Una linea di flusso è caratterizzata dalla proprietà che la tangente a tale linea in ogni punto indica la direzione della velocità in quel punto. In un flusso stazionario le linee di flusso non variano con il tempo e coincidono con il percorso effettivamente eseguito dalle particelle del fluido. Invece, in un flusso non stazionario le tangenti alle linee di flusso danno ancora la direzione della velocità delle particelle del fluido per un dato istante, ma non rappresentano più il percorso della particella al variare del tempo.

A questo punto possiamo calcolare il prodotto scalare dell'equazione (2.67) con un vettore unitario  $\mathbf{l}$  tangente una linea di flusso (cioè avente la stessa direzione della velocità delle particelle del fluido) in ogni punto. Siccome il

vettore  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$  è perpendicolare a  $\mathbf{V}$  si ha  $\mathbf{l} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) = 0$  e quindi rimane:

$$\mathbf{l} \cdot \nabla \left( \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \Phi \right) = 0, \quad (2.68)$$

per fluidi incompressibili ( $\rho = \text{costante}$ ). Dato che la proiezione di un gradiente in una qualunque direzione è la derivata rispetto a quella direzione, l'equazione (2.68) diventa:

$$\frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \Phi \right) = 0. \quad (2.69)$$

Questo significa che, per un flusso stazionario, lungo una linea di flusso, la quantità

$$\frac{\mathbf{V}^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \Phi = \text{costante}. \quad (2.70)$$

In generale la costante assume valori differenti a seconda della linea di flusso considerata. L'equazione (2.70) è detta *equazione di Bernoulli*. La principale conseguenza di questa equazione è che, per  $\Phi$  costante, ad ogni aumento del modulo della velocità, corrisponde una diminuzione della pressione e viceversa.

L'equazione di Bernoulli esprime semplicemente la conservazione dell'energia. Notiamo che l'energia interna  $\epsilon$  del fluido non appare perchè abbiamo derivato quest'equazione nel caso particolare in cui  $\rho = \text{costante}$ . In questa situazione nessun lavoro può essere fatto sul fluido e, siccome non stiamo considerando nè la viscosità, nè il flusso di calore, l'entalpia rimane costante.

Osserviamo, inoltre, che, per flussi incompressibili ed anche irrotazionali  $\boldsymbol{\omega} = 0$ , l'equazione del moto (2.61) diventa:

$$\frac{1}{2} \nabla \mathbf{V}^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi. \quad (2.71)$$

oppure

$$\nabla \left( \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \Phi \right) = 0, \quad (2.72)$$

ovvero, la quantità

$$\frac{\mathbf{V}^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \Phi = \text{costante}, \quad (2.73)$$

ovunque.

Infine, vediamo come si scrive l'equazione di Bernoulli per un gas perfetto, adiabatico, comprimibile e, naturalmente, stazionario, in assenza di campi di forza. Conviene ripartire dall'equazione del moto (2.43), la quale, in questo caso, si riduce a:

$$V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} = V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \gamma \rho^{\gamma-2} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0, \quad (2.74)$$

dove la seconda uguaglianza si ottiene grazie all'equazione di stato politropica (2.7) con  $K = 1$ .

Per semplicità consideriamo ora solo un flusso unidimensionale e integriamo l'equazione così ottenuta in  $dx$ :

$$\int V \frac{dV}{dx} dx + \int \gamma \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dx} = \frac{1}{2} V^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = \text{costante}, \quad (2.75)$$

questa equazione è la definizione di *flusso di Bernoulli*.

## 2.7 Superfici di discontinuità

Nelle precedenti sezioni abbiamo considerato solo flussi in cui tutte le quantità (come velocità, pressione, densità) variavano in modo continuo. Sono, però, possibili anche flussi in cui queste quantità presentano alcune discontinuità. Una discontinuità in un fluido può verificarsi in una o più superfici, che vengono dette *superfici di discontinuità*. Per flussi non stazionari, le superfici di discontinuità non rimangono, in generale, fisse.

Naturalmente, le particelle del fluido, durante il loro moto, possono attraversare tali superfici, ma devono essere soddisfatte delle opportune condizioni al contorno, dettate dalle equazioni del moto dei fluidi, che abbiamo ricavato nelle sezioni precedenti. Esse affermano che, per flussi stazionari, ci sono tre quantità che si conservano indipendentemente l'una dall'altra: il flusso della massa, il flusso dell'impulso, il flusso dell'energia.

Per formulare queste condizioni, consideriamo, dunque, un flusso stazionario e utilizziamo un sistema di coordinate fisso rispetto a un elemento della superficie di discontinuità (che indichiamo con  $\Sigma$ ), con l'asse  $z$  lungo la normale alla superficie (vedi figura 2.1).



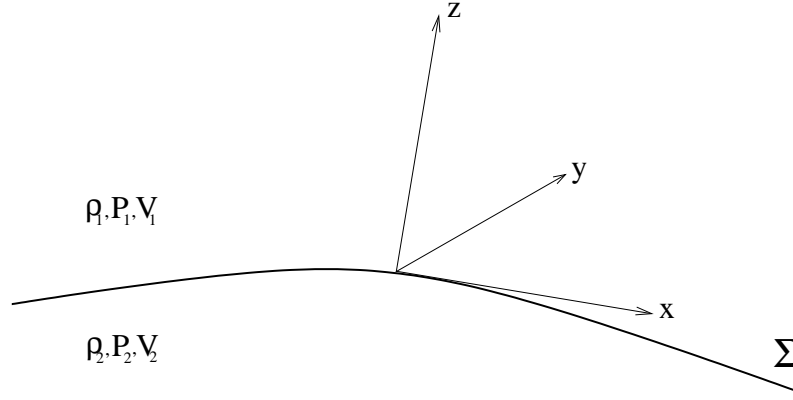


Figura 2.1: *Rappresentazione schematica di una generica superficie di discontinuità  $\Sigma$ .*

Dall'equazione (2.35), è immediatamente chiaro che il flusso della massa deve essere continuo attraverso la superficie  $\Sigma$ , ovvero la massa del fluido che penetra da un lato della superficie di discontinuità verso l'altro deve essere uguale alla massa che penetra nella direzione opposta. Quindi si deve avere:

$$\rho_1 V_{1z} = \rho_2 V_{2z}, \quad (2.76)$$

dove i pedici 1 e 2 indicano i due lati della superficie. Introduciamo, ora, la seguente notazione:

$$[\rho V_z]_\Sigma \equiv \rho_1 V_{1z} - \rho_2 V_{2z}, \quad (2.77)$$

così la condizione diventa:

$$[\rho V_z]_\Sigma = 0. \quad (2.78)$$

Dall'equazione (2.54) si vede, invece, che in assenza di forze non conservative, anche il flusso dell'energia deve essere continuo attraverso la superficie di discontinuità, cioè:

$$\left[ \rho V_z \left( \frac{1}{2} V^2 + \frac{P}{\rho} + E \right) \right]_\Sigma = 0, \quad (2.79)$$

dove con  $E$  indichiamo tutti i possibili contributi alla densità di energia.

Infine, l'equazione (2.41), sempre nella condizione che non ci siano forze non conservative, esprime il fatto che anche il flusso dell'impulso deve essere continuo, ovvero le forze esercitate dal fluido su ogni lato della superficie di

discontinuità devono essere uguali. Il flusso dell'impulso per unità di superficie (nella  $i$ -esima componente) è  $Pn_i + \rho V_i V_j n_j$ , con  $\mathbf{n}$  vettore normale alla superficie (dunque lungo  $z$ ). Di conseguenza la continuità della componente  $z$  del flusso dell'impulso, porta a:

$$[P + \rho V_z^2]_\Sigma = 0, \quad (2.80)$$

mentre la continuità lungo  $x$  e  $y$  fornisce:

$$[\rho V_x V_z]_\Sigma = 0 \quad \text{e} \quad [\rho V_y V_z] = 0. \quad (2.81)$$

Le equazioni (2.78), (2.79), (2.80) e (2.81) sono dette *condizioni di Rankine-Hugoniot* e formano un sistema completo di condizioni al bordo per la superficie di discontinuità  $\Sigma$ .

Da questo sistema di equazioni si può vedere immediatamente che è possibile realizzare due tipi di discontinuità:

- *Discontinuità tangenziale*

In questo primo caso si ha una superficie di discontinuità, attraverso la quale non fluisce massa, cioè  $\rho_1 V_{1z} = \rho_2 V_{2z} = 0$ . Poichè  $\rho_1$  e  $\rho_2$  non sono nulle, allora segue che  $V_{1z} = V_{2z} = 0$ . In questo modo le condizioni (2.79) e (2.81) sono soddisfatte e la condizione (2.80) implica  $P_1 = P_2$ .

- *Onda d'urto o shock*

In questo secondo caso, il flusso della massa attraverso la superficie di discontinuità non è nullo, quindi  $V_{1z}$  e  $V_{2z}$  non sono nulli. Di conseguenza, le condizioni (2.78) e (2.81) danno  $[V_x] = 0$  e  $[V_y] = 0$ , cioè la velocità tangenziale è continua alla superficie di discontinuità. La velocità normale, la pressione, la densità e le altre grandezze termodinamiche, invece, sono discontinue. Queste discontinuità sono correlate dalle condizioni (2.36), (2.79) e (2.80).

In questa tesina, ci occuperemo solo di discontinuità tangenziali, in cui la pressione non cambia attraverso la superficie. Le onde d'urto, però, sono determinanti per le fasi esplosive di una Supernova e saranno argomento del futuro lavoro di tesi.

Ricordiamo, inoltre, che se si desidera ritornare ad un sistema di coordinate fisso nello spazio, bisogna sostituire a  $\mathbf{V}$  (velocità del fluido rispetto alla superficie) la differenza tra la velocità del fluido rispetto a tale sistema fisso  $\mathbf{V}_S$  e la velocità  $\mathbf{V}_\Sigma$  della superficie stessa:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_S - \mathbf{V}_\Sigma. \quad (2.82)$$

Infine, esplicitiamo le condizioni di Rankine-Hugoniot per la componente della velocità normale alla superficie di discontinuità, nel caso in cui il fluido in esame sia un gas perfetto adiabatico (assunzione, spesso, adottata in molti problemi astrofisici.):

$$\begin{aligned} [\rho V]_{\Sigma} &= 0 \\ [\rho V^2 + P]_{\Sigma} &= 0 \\ \left[ \frac{1}{2} V^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} \right]_{\Sigma} &= 0 \end{aligned} \tag{2.83}$$

# Capitolo 3

## Instabilità

Nel capitolo precedente abbiamo derivato le equazioni che governano il moto dei fluidi. In linea di principio, ad ogni problema con assegnate condizioni al contorno, può essere associata un'esatta soluzione delle equazioni della fluido-dinamica. L'esistenza della soluzione, però, non fornisce alcuna informazione sulla sua stabilità, ovvero sulla possibilità che tale configurazione possa permanere invariata nel tempo. In questo capitolo ci occuperemo, pertanto, di studiare le condizioni per la stabilità di una data soluzione rispetto ad una piccola perturbazione.

Un flusso si dice *asintoticamente stabile* (o solo stabile) se piccole perturbazioni, che possono verificarsi occasionalmente, diminuiscono con il tempo. Se, invece, piccole perturbazioni nel flusso tendono ad aumentare con il tempo, allora il flusso è detto *assolutamente instabile*. Infine, se le piccole perturbazioni non diminuiscono, nè aumentano con il tempo, ma mantengono circa la stessa intensità si dice che il flusso è *neutralmente stabile*. Se la configurazione è stabile, allora esiste la possibilità che le perturbazioni diano origine a delle oscillazioni o onde.

### 3.1 Principali fonti di perturbazione

In questa sezione vogliamo elencare quali sono i meccanismi più importanti che possono dare origine a delle perturbazioni dello stato di equilibrio del flusso.

La forza di gravità è di uno dei principali meccanismi che possono perturbare un flusso, infatti se il fluido è costituito da materia di differente densità, la gravità tende a far gallagiare la materia più leggera. Di conseguenza, la

gravità sarà fonte di instabilità, come vedremo nella sezione 3.5, se il gradiente di densità nel fluido è, inizialmente, invertito rispetto alla direzione dell'accelerazione gravitazionale. Naturalmente, in questo caso, dopo un iniziale mescolamento della materia, è possibile raggiungere nuovamente una situazione di equilibrio, con la corretta distribuzione di densità.

Esistono, però, anche instabilità non legate alla presenza di forze esterne, come l'instabilità di Kelvin-Helmholtz, dovuta alla presenza di un gradiente di velocità all'interno del flusso considerato. Un caso particolare di questo tipo di instabilità è rappresentato da due flussi che si muovono a contatto in direzione opposta; infatti, la superficie di separazione tra i due flussi è sede di una discontinuità della velocità e lungo tale superficie, si originano dei vortici, come vedremo in sezione 3.6.

La viscosità e la conduttività termica hanno, invece, in generale, un'influenza stabilizzante. Infatti la viscosità dissipa l'energia della perturbazione e la conduttività termica fa diminuire le differenze di temperatura create dalla perturbazione. Questi fattori, quindi, tendono a riportare il flusso in uno stato di equilibrio. Noi, però, trascureremo questi fenomeni, in quanto, nelle Supernovae, i loro effetti si propagano alla velocità del suono, mentre, gli effetti delle instabilità di cui ci occuperemo si verificano sul fronte di un'onda d'urto che viaggia a velocità supersonica.

Infine, anche le superfici che confinano il flusso in esame possono giocare un ruolo importante nello sviluppo delle instabilità, in quanto esse possono originare perturbazioni dell'equilibrio di un flusso tramite, per esempio, la forza d'attrito, che può dar luogo a dei gradienti di velocità.

## 3.2 Fondamenti dell'analisi della stabilità di un fluido

In questa sezione descriveremo un approccio generale allo studio della stabilità di un flusso, che chiameremo *flusso di base*. Dato che una configurazione di non equilibrio è chiaramente instabile, l'analisi della stabilità è condotta su flussi di base che rappresentano una soluzione d'equilibrio delle equazioni della fluido-dinamica. Questo fa sì, in particolare, che siano noti i valori di tutte le variabili caratteristiche del fluido in ogni punto  $x$  e ad ogni istante  $t$ . In generale, la soluzione in esame può essere non stazionaria, ma, per semplicità, restringeremo il nostro studio ai soli flussi di base stazionari.

Assegnato il flusso di base, ciò che vogliamo investigare è la risposta di tale flusso ad una piccola perturbazione. Tutte le possibili piccole perturbazioni possono, però, essere eccitate (più o meno intensamente) da qualche irregolarità o vibrazione presente nel flusso di base. Di conseguenza, il flusso di base persisterà solo se esso è stabile rispetto a tutte le piccole perturbazioni.

### 3.2.1 Il quadro fisico

La scelta di trattare solo il caso di flussi di base stazionari ci permette di semplificare notevolmente la descrizione fisica del problema. Infatti, in queste condizioni, possiamo ricorrere all'equazione di Bernoulli (2.70), secondo la quale l'energia resta costante lungo una linea di flusso. Consideriamo un flusso incompressibile che si muove con una velocità media pari a  $\mathbf{V}$  e supponiamo che non ci siano campi di forza, così, l'equazione di Bernoulli si riduce a:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} = \text{costante}. \quad (3.1)$$

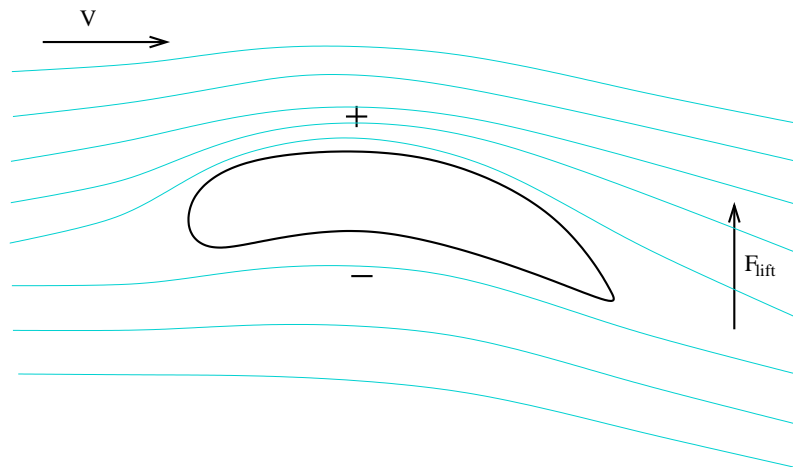


Figura 3.1: Un oggetto solido non simmetrico presente in un flusso modifica l'andamento delle linee di flusso, creando un gradiente di pressione, indicato dal + e dal -. Questo origina una forza, detta “lift”, perpendicolare alla velocità media del flusso.

Perturbiamo questo flusso con un ostacolo non simmetrico rispetto alla direzione di  $\mathbf{V}$ . Con riferimento alla figura 3.1, al di sopra della superficie convessa, le linee di flusso si avvicinano. Ciò significa che, da questo lato dell'oggetto, il fluido si muove più velocemente della velocità media iniziale  $\mathbf{V}$  e,

quindi, la pressione diminuisce. Analogamente, le linee di flusso si allontanano dalla parte della superficie concava, ovvero, qui, la velocità diminuisce e la pressione aumenta. Di conseguenza, il gradiente di pressione formatosi nei pressi dell'oggetto produce una forza, detta *lift*, diretta perpendicolarmente alla velocità  $\mathbf{V}$ .

Notiamo che la forza di *lift*, che può essere vista come una reazione del fluido rispetto alla perturbazione, appare ogni qualvolta ci si allontana dalle condizioni di equilibrio, anche in assenza di ostacoli. Eventualmente la forza di *lift* potrà contribuire essa stessa alla crescita della perturbazione. D'altra parte potrebbe giocare un ruolo stabilizzante. Nella prossima sezione deriveremo un criterio per determinare la stabilità del fluido rispetto ad una perturbazione.

### 3.2.2 L'analisi matematica per l'instabilità

L'analisi matematica della stabilità di un flusso si basa sulla tecnica della *linearizzazione* e sullo sviluppo in *modi normali*. La tecnica della linearizzazione delle equazioni perturbative consiste nel trascurare i termini non lineari delle quantità perturbate. Se le perturbazioni sono effettivamente piccole questo metodo di procedere è giustificato, perchè i termini lineari sono, in questo caso, dominanti. Se la perturbazione dà luogo ad una instabilità, le piccole perturbazioni cresceranno, entro un tempo scala caratteristico, fino al punto tale che tale approssimazione cesserà di fornire una corretta descrizione fisica. In questo caso sarà necessario abbandonare l'ipotesi di linearità e trovare esplicitamente una soluzione per il sistema non lineare di equazioni differenziali.

Il vantaggio della linearizzazione è che il principio di sovrapposizione, valido solo per equazioni lineari (e, quindi, non valido, in generale, per le equazioni fluido-dinamiche, che sono non lineari), diventa applicabile anche per le quantità perturbate. Inoltre, il principio di sovrapposizione ci permette di sviluppare ogni arbitraria perturbazione nelle sue componenti di Fourier, ovvero in modi normali. Infine, l'evoluzione di ogni modo normale può essere studiata singolarmente, perchè la linearità del problema implica che i diversi modi non interagiscono tra loro. Per poter applicare con successo questo metodo bisogna, però, riuscire a trovare un *set completo* di modi normali che descrivano l'evoluzione della perturbazione. Notiamo che questo metodo ha anche uno svantaggio, infatti, esso ci consente solo di determinare la stabilità di un flusso e l'eventuale tempo caratteristico con cui si sviluppa l'instabilità,

ma non ci fornisce alcuna informazione su come evolve la struttura del flusso stesso o su quale sia l'ampiezza dell'eventuale instabilità.

Procediamo, ora all'applicazione del metodo sopra descritto, considerando, per semplicità, solo il caso di fluido incompressibile, sebbene il metodo si applichi in maniera analoga anche a fluidi compressibili (basta utilizzare la corretta equazione di continuità e aggiungere l'equazione dell'energia).

Partiamo da un flusso di base stazionario con velocità  $\mathbf{V}_0(x, y, z)$ , pressione  $P_0$ , temperatura  $T_0$  e densità  $\rho = \text{costante}$  e, ad esso, sovrapponiamo una perturbazione infinitesima non stazionaria con velocità  $\mathbf{V}_1(x, y, z; t)$  e pressione  $P_1$ , tale che il sistema rimanga isoterma (a  $T = T_0$ ). La velocità risultante  $\mathbf{V} \equiv \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1$  e la pressione totale  $P \equiv P_0 + P_1$  soddisfano le equazioni del moto dei fluidi:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi + \mathbf{a}. \quad (3.3)$$

Le equazioni del moto per il flusso di base sono:

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_0 = 0 \quad (3.4)$$

$$(\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \mathbf{V}_0 = -\frac{1}{\rho} \nabla P_0 - \nabla \Phi + \mathbf{a} \quad (3.5)$$

quindi, le equazioni per la perturbazione, trascurando i termini superiori al primo ordine in  $\mathbf{V}_1$ , sono:

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_1 = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial t} + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \mathbf{V}_1 + (\mathbf{V}_1 \cdot \nabla) \mathbf{V}_0 = -\frac{1}{\rho} \nabla P_1, \quad (3.7)$$

che si trovano semplicemente utilizzando le equazioni (3.4) e (3.5) dopo aver sostituito nelle equazioni (3.2) e (3.3) la velocità e la pressione totale con le loro definizioni.

Dalle equazioni (3.6), (3.7) si vede che  $\mathbf{V}_1$  deve essere soluzione di un sistema di equazioni lineari differenziali, con coefficienti che sono funzioni soltanto delle coordinate e non del tempo. La soluzione generale di un tale sistema può essere rappresentata dalla somma di particolari soluzioni (modi normali), in cui  $\mathbf{V}_1$  dipende dal tempo come  $e^{\sigma t}$ . Le frequenze  $\sigma$  delle perturbazioni non sono arbitrarie, ma sono da determinare risolvendo le equazioni (3.6) e (3.7), con le appropriate condizioni al bordo.



Inoltre, queste frequenze sono, in generale, complesse:  $\sigma \equiv \sigma_r + i\sigma_i$ . Abbiamo, così, ottenuto un modo per riconoscere se il flusso di base è stabile oppure no. Infatti, se  $\sigma_r > 0$  per un modo, allora la corrispondente perturbazione cresce esponenzialmente con il tempo, quindi il flusso si trova in una situazione assolutamente instabile. Se, invece,  $\sigma_r = 0$  il modo è detto neutralmente stabile e, in questo caso, un ulteriore piccolo cambiamento dei parametri che caratterizzano il flusso può condurre il sistema ad un regime instabile. Infine, se  $\sigma_r < 0$ , la perturbazione decresce esponenzialmente con il tempo e il flusso è in una situazione stabile. Di conseguenza, un modo è instabile se  $\sigma_r > 0$  e stabile se  $\sigma_r \leq 0$ . Una piccola perturbazione del flusso di base, però, in generale, eccita più modi, così che se  $\sigma_r > 0$  per almeno un modo allora il flusso è instabile; al contrario, il flusso è stabile se  $\sigma_r \leq 0$  per ogni modo del set completo scelto come base per lo sviluppo in serie di Fourier.

La situazione di confine tra stabilità ed instabilità, ovvero  $\sigma_r = 0$ , è anche detta *stato marginale*. Ci possono essere due tipi di stati marginali a seconda che  $\sigma_i = 0$  o  $\sigma_i \neq 0$ . Se, per uno stato marginale,  $\sigma_i = 0$  allora, evidentemente, anche  $\sigma = 0$ , quindi non c'è dipendenza temporale della soluzione perturbata, cioè il flusso perturbato è ancora stazionario. D'altra parte, se  $\sigma_i \neq 0$  per uno stato marginale, allora l'instabilità genera un'oscillazione di ampiezza crescente. Un tale modo di instabilità è frequentemente chiamato *over-stabilità*, perchè le forze di richiamo sono così forti che il sistema oltrepassa la sua configurazione di equilibrio (fenomeno che, in inglese, viene detto *over-shooting*).

Notiamo, infine, che la teoria lineare fin qui applicata, ci permette solo di capire come si sviluppa una perturbazione che all'inizio è infinitesima. Naturalmente questa teoria non è più adeguata se l'ampiezza della perturbazione è troppo grande. Inoltre, nel caso in cui il flusso sia instabile, la teoria lineare ci mostra come evolve la perturbazione solo inizialmente, cioè fino a che nel flusso si origina il fenomeno della *turbolenza*, ovvero la perturbazione ha raggiunto un'intensità tale che la non-linearità del fenomeno diventa significativa e la teoria lineare risulta inadeguata.

### 3.3 Perturbazioni alla superficie di separazione tra due fluidi

In questa sezione noi svilupperemo un'analisi matematica generale per mostrare come evolve una perturbazione applicata ad una superficie (inizialmente piana) che separa due fluidi immiscibili. In seguito analizzeremo alcuni casi particolari di onde ed instabilità che derivano dalla generale relazione di dispersione che troveremo. Per semplificare l'analisi, assumiamo che i fluidi che si trovano da entrambi i lati della superficie siano incompressibili, irrotazionali ed ideali e trascuriamo la forza dovuta alla tensione superficiale agente tra i due fluidi. Trattare solo il caso di superficie inizialmente piana non è troppo restrittivo, perchè, data una superficie generica, è sempre possibile suddividerla in porzioni così piccole da essere considerate piane. L'ipotesi di irrotazionalità, invece, ci permette di dire che  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V} = 0$  e, quindi, di introdurre un potenziale per la velocità  $\varphi$  definito da  $\mathbf{V} = \nabla\varphi$ .

Noi abbiamo, in precedenza (vedi sezione 2.6), derivato l'equazione di Bernoulli per flussi stazionari. Ora otterremo un risultato molto simile per un flusso incompressibile ed irrotazionale, ma variabile nel tempo. Riscriviamo l'equazione del moto (2.61), sostituendovi  $\mathbf{V} = \nabla\varphi$ :

$$\nabla \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) + \nabla \left( \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) = -\nabla \left( \frac{P}{\rho} \right) - \nabla\Phi_g, \quad (3.8)$$

dove si è tenuto conto solo del potenziale gravitazionale  $\Phi_g$ . Integrando l'equazione (3.8) nello spazio delle configurazioni, si ottiene:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathbf{V}^2 + \frac{P}{\rho} + \Phi_g = F(t), \quad (3.9)$$

dove  $F(t)$  è costante nello spazio, ma può essere funzione del tempo. Possiamo notare che, nel derivare l'equazione di Bernoulli nella sezione (2.6), non abbiamo assunto il fluido irrotazionale e quindi abbiamo dovuto integrare lungo una linea di flusso per annullare il termine  $\mathbf{l} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V})$ . Nel caso che stiamo trattando ora, invece,  $\boldsymbol{\omega} = 0$  per ipotesi, così che non è più necessario integrare lungo una linea di flusso.

Chiamiamo  $\Sigma$  la superficie di separazione tra i due fluidi e prendiamo un sistema di riferimento tale che l'asse  $z$  sia normale alla superficie e la superficie stessa giaccia sul piano  $xy$  a  $z = 0$ . Indichiamo con il pedice 1 tutte le quantità legate al fluido che, inizialmente, occupa lo spazio con  $z < 0$

e con il pedice 2 tutte le quantità legate al fluido che, inizialmente, occupa lo spazio con  $z > 0$ . Siano  $\rho_1 = \text{costante}$  e  $\rho_2 = \text{costante}$  le densità dei due fluidi ed assumiamo che essi abbiano a  $t = 0$  velocità uniformi  $\mathbf{V}_1 = -V\hat{\mathbf{x}}$  e  $\mathbf{V}_2 = V\hat{\mathbf{x}}$  nella direzione dell'asse  $x$  e con  $V > 0$ . Senza perdita di generalità, stiamo considerando che i due fluidi abbiano velocità dirette in versi opposti, infatti è sempre possibile scegliere un sistema di riferimento tale che questa ipotesi sia soddisfatta. È evidente che questa configurazione è una soluzione stazionaria delle equazioni dei fluidi, quindi è un buon flusso di base, di cui studiare la stabilità. Perturbiamo la superficie di separazione tra i due fluidi dalla sua posizione iniziale imperturbata  $z = 0$  e indichiamo con  $z = \xi(x, y; t)$  la posizione della superficie perturbata all'istante  $t$ . Il nostro scopo è vedere se questa perturbazione cresce con il tempo, si annulla o oscilla.

Grazie all'ipotesi di irrotazionalità, possiamo assumere l'esistenza di un potenziale della velocità per entrambi i fluidi:

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_2 & (\text{per } z > \xi) \\ \varphi_1 & (\text{per } z < \xi) \end{cases}.$$

Inoltre, come conseguenza della condizione di incompressibilità ( $\nabla \cdot \mathbf{V}$ ) per entrambi i fluidi, si deve avere:

$$\nabla^2 \varphi_2 \equiv \Delta \varphi_2 = 0 \quad (\text{per } z > \xi) \quad (3.10)$$

$$\nabla^2 \varphi_1 \equiv \Delta \varphi_1 = 0 \quad (\text{per } z < \xi). \quad (3.11)$$

Se supponiamo che la perturbazione si verifichi in una regione finita della superficie di discontinuità, allora la condizione al bordo, cui devono soddisfare i potenziali della velocità è che  $\forall t$ :

$$\nabla \varphi_2 \rightarrow \mathbf{V}_2 \quad (\text{per } z \rightarrow +\infty) \quad (3.12)$$

$$\nabla \varphi_1 \rightarrow \mathbf{V}_1 \quad (\text{per } z \rightarrow -\infty) \quad (3.13)$$

Dato che le perturbazioni alla velocità sono causate dagli spostamenti della superficie di discontinuità, noi dobbiamo trovare la connessione tra il potenziale della velocità e gli spostamenti della superficie. Per far questo, consideriamo un elemento di fluido (1 o 2) infinitamente vicino alla superficie e cerchiamo la sua velocità verticale, tenendo presente che i due fluidi non possono occupare lo stesso punto allo stesso istante e che non si deve formare una cavità tra i due fluidi. In termini del potenziale della velocità, la velocità verticale è data da  $\partial \varphi_i / \partial z$  (con  $i = 1, 2$ ). D'altra parte, la velocità verticale

dell'elemento di fluido è data anche dalla derivata totale dello spostamento della superficie  $d\xi/dt$ , quindi, per  $z = \xi$  e  $i = 1, 2$ :

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \dot{x}_i + \frac{\partial \xi}{\partial y} \dot{y}_i = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}. \quad (3.14)$$

(Le equazioni sono due, indicate dal pedice  $i$ , proprio perchè c'è una discontinuità della velocità tangenziale alla superficie).

Infine, per una discontinuità tangenziale, sappiamo che la pressione deve essere continua attraverso la superficie (vedi sezione 2.7), ovvero  $P_1 = P_2$  a  $z = \xi$ . Dall'equazione (3.9) si ha:

$$P_1 = \rho_1 \left[ -\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla \varphi_1)^2 - gz + F_1(t) \right] \quad (3.15)$$

$$P_2 = \rho_2 \left[ -\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla \varphi_2)^2 - gz + F_2(t) \right], \quad (3.16)$$

dove abbiamo fatto uso del potenziale della velocità ed abbiamo esplicitato il potenziale gravitazionale  $\Phi_g = -gz$  scegliendo  $g$  in verso opposto all'asse  $z$ .

Di conseguenza, perchè la condizione  $P_1 = P_2$  sia soddisfatta, a  $z = \xi$  si deve avere:

$$\rho_1 \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \varphi_1)^2 + gz \right] = \rho_2 \left[ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \varphi_2)^2 + gz \right] + K, \quad (3.17)$$

con  $K = \rho_1 F_1(t) - \rho_2 F_2(t)$ . Sebbene  $K$ , possa essere, in linea di principio, una funzione del tempo, qui  $K$  deve essere costante perchè abbiamo supposto che la perturbazione sia locale, ovvero che essa, per ogni istante, si annulli lontano dalla superficie di discontinuità. Per trovare  $K$ , si deve applicare l'equazione (3.17) alla configurazione del flusso di base, per la quale  $\xi = 0$ ,  $\varphi_1 = V_1 x$  e  $\varphi_2 = V_2 x$  ( $V_1 \equiv |\mathbf{V}_1|$  e  $V_2 \equiv |\mathbf{V}_2|$ ). Infatti si ottiene:

$$K = \frac{1}{2}\rho_1 V_1^2 - \frac{1}{2}\rho_2 V_2^2. \quad (3.18)$$

A questo punto abbiamo a disposizione tutte le equazioni che ci servono per discutere la stabilità del flusso di base. Quindi, possiamo procedere con l'applicazione del metodo della linearizzazione e dello sviluppo in modi normali, descritto nella sezione 3.2.2. Per linearizzare le equazioni, scriviamo, per entrambi i fluidi, il potenziale della velocità come:

$$\varphi_2 = V_2 x + \varphi_2' \quad \text{per } z > \xi \quad (3.19)$$

$$\varphi_1 = V_1 x + \varphi_1' \quad \text{per } z < \xi, \quad (3.20)$$

dove  $V_i x$  è la parte imperturbata del potenziale della velocità, che dà la velocità uniforme  $\pm V$  nella direzione dell'asse  $x$ , mentre  $\varphi'_i$  è la parte perturbata. Le equazioni diventano lineari se trascuriamo i prodotti degli incrementi  $\varphi'_1$ ,  $\varphi'_2$  e  $\xi$ , il che è possibile fin tanto che tali incrementi sono piccoli. Purtroppo, non c'è una lunghezza di scala nella velocità del fluido di base, per cui non è semplice decidere quando questa approssimazione sia valida. È, però, possibile giustificare la linearizzazione se lo spostamento della superficie e la sua inclinazione sono tali che  $\partial\xi/\partial x \ll 1$ ,  $\partial\xi/\partial y \ll 1$ ,  $g\xi \ll V_1^2$  e  $g\xi \ll V_2^2$ .

Di conseguenza, se queste condizioni sono verificate, la linearizzazione del problema è immediata. Dalle equazioni (3.10) e (3.11) si ha subito che:

$$\nabla^2 \varphi'_2 = 0 \quad (\text{per } z > 0) \quad (3.21)$$

$$\nabla^2 \varphi'_1 = 0 \quad (\text{per } z < 0). \quad (3.22)$$

Poi, dalle equazioni (3.14) si ottiene:

$$\frac{\partial \varphi'_i}{\partial z} = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + V_i \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (\text{per } z = 0, i = 1, 2) \quad (3.23)$$

perchè abbiamo scelto un sistema di riferimento in cui il flusso di base ha velocità diretta solo lungo l'asse  $x$ , da cui  $\partial\varphi_i/\partial y = 0$ .

Infine, notiamo che:

$$(\nabla\varphi_i)^2 = (V_i + \nabla\varphi'_i)^2 = V_i^2 + 2V_i \frac{\partial \varphi'_i}{\partial x} \quad (\text{per } i = 1, 2) \quad (3.24)$$

se teniamo solo i termini lineari delle quantità perturbate.

Sostituendo i risultati (3.24) e (3.18) nell'equazione (3.17), si trova anche l'ultima relazione:

$$\rho_1 \left( \frac{\partial \varphi'_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} + g\xi \right) = \rho_2 \left( \frac{\partial \varphi'_2}{\partial t} + V_2 \frac{\partial \varphi'_2}{\partial x} + g\xi \right) \quad (\text{per } z = 0). \quad (3.25)$$

Riassumendo, abbiamo ottenuto il seguente sistema di cinque equazioni in cinque incognite ( $\xi$ ,  $\varphi'_1$ ,  $\varphi'_2$ ,  $V_1$  e  $V_2$ ):

$$\begin{aligned} &\text{per } z > 0, \quad \Delta \varphi'_2 = 0 \\ &\text{per } z < 0, \quad \Delta \varphi'_1 = 0 \\ &\text{per } z = 0, \quad \frac{\partial \varphi'_i}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + V_i \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad i = 1, 2 \\ &\text{per } z = 0, \quad \rho_1 \left( \frac{\partial \varphi'_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} + g\xi \right) = \rho_2 \left( \frac{\partial \varphi'_2}{\partial t} + V_2 \frac{\partial \varphi'_2}{\partial x} + g\xi \right) \end{aligned}$$

da risolvere con le condizioni al bordo:

$$\nabla \varphi_2' \rightarrow 0 \quad \text{per } z \rightarrow +\infty \quad (3.26)$$

$$\nabla \varphi_1' \rightarrow 0 \quad \text{per } z \rightarrow -\infty, \quad (3.27)$$

che sono diretta conseguenza delle equazioni (3.12) e (3.13).

Notiamo che tutti i coefficienti di questo sistema di equazioni lineari alle derivate parziali sono costanti. Procediamo, dunque, allo sviluppo in modi normali, assumendo che ogni arbitraria perturbazione possa essere risolta in modi indipendenti, della forma:

$$\xi = \xi(x, y; t) = A e^{i(lx+my)+\sigma t} \quad (3.28)$$

$$\varphi_1' = \varphi_1'(x, y, z; t) = C_1(z) e^{i(lx+my)+\sigma t} \quad (3.29)$$

$$\varphi_2' = \varphi_2'(x, y, z; t) = C_2(z) e^{i(lx+my)+\sigma t}, \quad (3.30)$$

con  $A$  costante arbitraria,  $\sigma \in \mathbb{C}$  e  $l, m \in \mathbb{R}$ . Con questo sviluppo, stiamo assumendo che le quantità perturbate abbiano un andamento ondulatorio e il vettore d'onda totale sia dato da  $k = (l^2 + m^2)^{1/2}$ . Le funzioni  $C_1(z)$  e  $C_2(z)$  si trovano ricordando che  $\varphi_1'$  e  $\varphi_2'$  devono soddisfare le equazioni (3.21) e (3.22), da cui:

$$C_1(z) = B_1 e^{kz} \quad (3.31)$$

$$C_2(z) = B_2 e^{-kz}, \quad (3.32)$$

dove  $k \in \mathbb{R}$  è proprio il vettore d'onda totale e  $B_1$  e  $B_2$  sono costanti arbitrarie; inoltre, il segno davanti a  $kz$  è stato scelto in accordo con le condizioni al bordo, ovvero in modo che la perturbazione si annulli lontano dalla superficie. Quindi:

$$\varphi_1' = B_1 e^{i(lx+my)+kz+\sigma t} \quad (3.33)$$

$$\varphi_2' = B_2 e^{i(lx+my)-kz+\sigma t}. \quad (3.34)$$

Ora le equazioni (3.23) e (3.25) diventano tre equazioni lineari omogenee per le tre costanti arbitrarie  $A$ ,  $B_1$  e  $B_2$ :

$$B_1 = \frac{\sigma + ilV_1}{k} A \quad (3.35)$$

$$B_2 = -\frac{\sigma + ilV_2}{k} A \quad (3.36)$$

$$\rho_1 [B_1 (\sigma + ilV_1) + gA] = \rho_2 [B_2 (\sigma + ilV_2) + gA]. \quad (3.37)$$

Risolvendo quest'ultimo sistema si ottiene:

$$\rho_1 [(\sigma + ilV_1)^2 + gk] = -\rho_2 [(\sigma + ilV_2)^2 + gk]. \quad (3.38)$$

Infine, la soluzione di questa equazione quadratica dà due modi normali con:

$$\sigma = -il \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \left[ \frac{l^2 \rho_1 \rho_2 (V_1 - V_2)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} - \frac{kg(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 + \rho_2} \right]^{1/2}. \quad (3.39)$$

Quest'ultima equazione è molto importante perchè ci fornisce la relazione di dispersione che stavamo cercando. Il primo termine dell'equazione (3.39) è semplicemente il moto medio della perturbazione, che può essere rimosso con un appropriato cambiamento di coordinate. Notiamo che il termine  $A \equiv (\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2)$ , detto anche *numero di Atwood*, che compare nell'equazione (3.39) è l'analogo della macchina di Atwood per un fluido incompressibile.

Secondo i criteri stabiliti nella sezione 3.2.2 si vede che entrambi i modi sono neutralmente stabili se

$$kg(\rho_1^2 - \rho_2^2) \geq l^2 \rho_1 \rho_2 (V_1 - V_2)^2. \quad (3.40)$$

Invece, se

$$kg(\rho_1^2 - \rho_2^2) < l^2 \rho_1 \rho_2 (V_1 - V_2)^2 \quad (3.41)$$

un modo è asintoticamente stabile, ma l'altro no, e, quindi, nella condizione (3.41) il flusso di base è sempre assolutamente instabile.

Per interpretare meglio la relazione (3.39) esamineremo separatamente, nelle prossime sezioni, alcuni casi particolari.

## 3.4 Onde di gravità superficiali

Consideriamo due fluidi in quiete ( $V_1 = V_2 = 0$ ), con il fluido più leggero giacente sopra a quello più pesante, cioè  $\rho_1 > \rho_2$ . Allora la relazione (3.39) ci dice che, se perturbiamo la superficie di separazione tra i due fluidi, otteniamo:

$$\sigma = \pm (-kgA)^{1/2}. \quad (3.42)$$

Da quest'ultima relazione è immediato vedere che, poichè  $k$  è reale,  $\sigma$  è un numero puramente immaginario e quindi siamo in una situazione neutralmente stabile. La perturbazione si muove sulla superficie di separazione dei fluidi sotto forma di onde, dette *onde di gravità superficiali*, perchè, in accordo con le condizioni al bordo che abbiamo posto, il moto è confinato in

una regione nelle vicinanze della superficie di discontinuità. La velocità di fase  $v_f \equiv i\sigma/k$  di queste onde dipende dal vettore d'onda (totale)  $k$ :

$$v_f = \pm \left[ \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{k(\rho_1 + \rho_2)} \right]^{1/2}. \quad (3.43)$$

Questo significa che onde superficiali di differente lunghezza d'onda si muovono con velocità diverse, cioè le onde di gravità superficiali sono dispersive.

Un esempio molto semplice di onde di gravità superficiali sono le onde che osserviamo nel mare dove l'acqua è piuttosto profonda. Infatti, in questo caso, la densità dell'aria è trascurabile rispetto a quella dell'acqua, quindi, con  $\rho_2 = 0$ , la relazione (3.42) diventa:

$$\sigma = \pm i\sqrt{kg}, \quad (3.44)$$

ovvero:

$$v_f = \pm \sqrt{g/k}. \quad (3.45)$$

Notiamo che abbiamo derivato quest'espressione trascurando la tensione superficiale e assumendo che il fluido sottostante non fosse confinato, cioè che l'acqua avesse profondità infinita. Se la profondità dell'acqua è finita il ragionamento precedente può essere ripetuto, avendo cura che la componente normale della velocità si annulli sul fondo.

## 3.5 Instabilità di Rayleigh-Taylor

Consideriamo ancora due fluidi in quiete ( $V_1 = V_2 = 0$ ), ma, ora, assumiamo che il fluido più pesante giaccia sopra quello più leggero, cioè  $\rho_1 < \rho_2$ . Un flusso di base di questo tipo soddisfa le equazioni della fluido-dinamica ed è una configurazione di equilibrio. Ci aspettiamo, però, che questa situazione sia instabile, perchè il fluido più pesante è accelerato verso il basso dalla forza di gravità e il suo moto è ostacolato dal fluido più leggero. È facile vedere che questa supposizione è corretta perchè, in questo caso, l'equazione (3.42) è ancora valida e fornisce un  $\sigma$  reale e positivo. Di conseguenza, dall'equazione (3.28), che descrive lo spostamento verticale della superficie di discontinuità, si vede che la perturbazione cresce esponenzialmente nel tempo. Questo fenomeno è chiamato *instabilità di Rayleigh-Taylor*.



Notiamo che l'instabilità di Rayleigh-Taylor non è legata al solo caso della forza di gravità. Essa si verifica ogni volta che il fluido, sottoposto ad una qualsiasi accelerazione, presenta inizialmente delle variazioni di densità (anche continue), con un gradiente opposto alla direzione dell'accelerazione  $\mathbf{a}$ . In questo caso l'equazione (3.42), può essere riscritta come:

$$\sigma = \pm \left[ \frac{ka(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + \rho_2} \right]^{1/2}, \quad (3.46)$$

con  $a = |\mathbf{a}|$ .

L'instabilità di Rayleigh-Taylor è un fenomeno molto importante in ambito astrofisico. In particolare, le prime fasi dell'esposizione di una Supernova sono guidate proprio dall'instabilità di Rayleigh-Taylor (vedi sezione 3.8). Infatti, quando una stella termina “il combustibile” per le reazioni nucleari, l'unica forza agente è la forza di gravità che tende a far collassare la struttura verso il centro. La materia al centro della stella, però, è molto calda e, quindi, poco densa rispetto all'involuppo esterno della stella (più freddo e, quindi, più denso), dunque si verifica una situazione analoga a quella schematizzata all'inizio di questa sezione che conduce, chiaramente, all'instabilità.

Concludiamo, notando che l'instabilità di Rayleigh-Taylor implica un *mescolamento* della materia, perchè la forza agente sul sistema tende a modificare la distribuzione della densità. Durante questo mescolamento il fluido più pesante penetra in quello più leggero formando una tipica figura “a dita”, ovvero la compenetrazione avviene sotto forma di cilindretti (ovviamente distorti) con asse nella stessa direzione dell'accelerazione.

## 3.6 Instabilità di Kelvin-Helmholtz

In questa sezione analizzeremo l'*instabilità di Kelvin-Helmholtz*, la quale si origina esclusivamente a causa dell'esistenza di una discontinuità della velocità, indipendentemente dalla distribuzione della densità e dalla presenza di campi di forza. Più precisamente, la sorgente dell'instabilità di Kelvin-Helmholtz risiede nell'energia cinetica dovuta al moto relativo dei diversi strati del flusso. La tendenza all'instabilità è tanto maggiore quanto più grande è la differenza di velocità.

### 3.6.1 Il caso tradizionale

Per dimostrare quanto appena affermato, trattiamo il caso classico in cui si verifica l'instabilità di Kelvin-Helmholtz. Consideriamo, dunque, un flusso di base costituito da due fluidi incompressibili che viaggiano in direzione opposta con velocità  $V_1 \neq V_2$ , ma aventi la stessa densità ( $\rho_1 = \rho_2$ ), così che il sistema risulti sicuramente stabile rispetto all'instabilità di Rayleigh-Taylor. L'equazione (3.39) fornisce la seguente relazione di dispersione:

$$\sigma = -\frac{1}{2}il(V_1 + V_2) \pm \frac{1}{2}l(V_1 - V_2), \quad (3.47)$$

che, come volevamo, non dipende più dall'accelerazione. Di conseguenza, per ogni valore del vettore d'onda, anche per differenze di velocità molto piccole, esiste sempre un  $\sigma_r > 0$ , ovvero il flusso è sempre instabile.

La perturbazione genera delle onde che si muovono con velocità di fase pari a:

$$v_f = \frac{1}{2}l \frac{V_1 + V_2}{k}, \quad (3.48)$$

che è proprio la velocità media del flusso di base distribuita nella direzione di propagazione  $(l/k, m/k, 0)$ . L'ampiezza di queste onde cresce esponenzialmente nel tempo, qualunque sia la lunghezza d'onda. Si nota, comunque, che, assegnata la lunghezza d'onda  $\lambda = 2\pi/k$ , l'onda che cresce più rapidamente è quella che si propaga nella stessa direzione del flusso di base (cioè con  $l = k$ ), così che, dopo un po' di tempo, le onde in direzione del flusso di base saranno dominanti.

### 3.6.2 La formazione dei vortici

Un'importante conseguenza dell'instabilità di Kelvin-Helmholtz è che il moto del fluido perturbato dà luogo a dei vortici sulla superficie di separazione dei due fluidi, causando, anche in questo caso, un mescolamento della materia. Il movimento vorticoso è molto importante, perchè esso contribuisce ad aumentare lo spostamento della superficie, finchè l'ampiezza di tale spostamento diventa così grande che l'approssimazione lineare non è più plausibile e il flusso viene detto *turbolento*.

Per comprendere meglio come si instauri il moto vorticoso, consideriamo un flusso di base (vedi figura 3.2 a)) con le stesse caratteristiche descritte in precedenza, ma che sia solo bi-dimensionale, nel piano  $xz$ . Lo spostamento

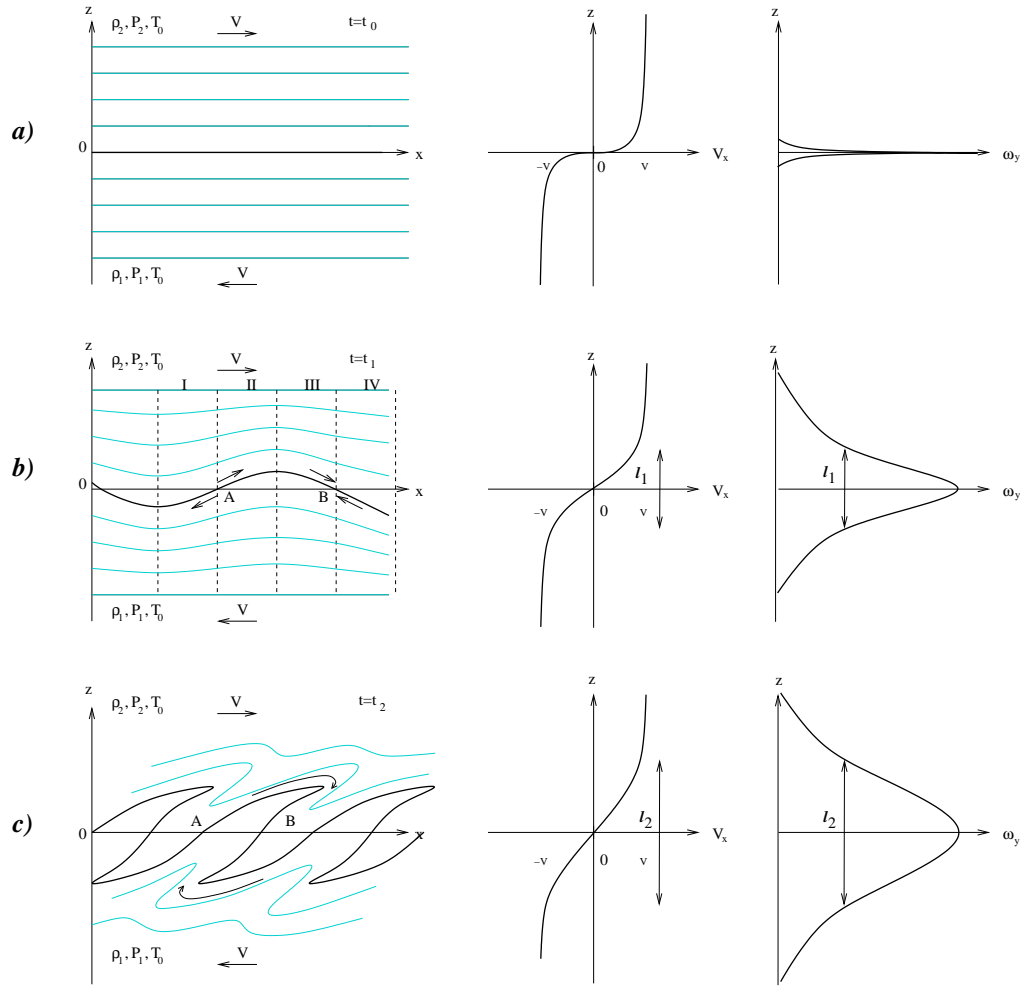


Figura 3.2: *Formazione di vortici. Le figure mostrano l'evoluzione temporale ( $t_0 < t_1 < t_2$ ) di un flusso soggetto all'instabilità di Kelvin-Helmholtz. La figura a) mostra il flusso di base in cui è presente una discontinuità della velocità  $V_x$  a  $z = 0$  e, quindi, la vorticità  $\omega_y$ , come funzione di  $z$ , è una Delta di Dirac. In figura b) la perturbazione comincia a crescere e la velocità  $V_x$  diminuisce, mentre la lunghezza di mescolamento  $l$  aumenta. Infine, in figura c), vediamo lo sviluppo dei vortici attorno al punto B. La lunghezza di mescolamento  $l$  ha raggiunto il suo valore di saturazione.*

della superficie di separazione è così dato da  $z = \xi(x; t)$  e la velocità del flusso non dipende da  $y$ :

$$\mathbf{V} = \begin{cases} \mathbf{V}_2 = V \hat{\mathbf{x}} & (z > 0) \\ \mathbf{V}_1 = -V \hat{\mathbf{x}} & (z < 0) \end{cases}, \quad \text{con } V > 0$$

Siano, inoltre,

$$\rho = \begin{cases} \rho_2 \\ \rho_1 \end{cases}, \quad P = \begin{cases} P_2 \\ P_1 \end{cases}, \quad T = \begin{cases} T_2 & (z > 0) \\ T_1 & (z < 0) \end{cases},$$

con  $\rho_1 = \rho_2$ ,  $P_1 = P_2$  e  $T_1 = T_2 = T_0$ .

Come definito in sezione 2.5, la vorticità è data da  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V}$ , che, nel nostro caso, è diretta lungo l'asse  $y$  e vale:

$$\boldsymbol{\omega} = \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}}, \quad (3.49)$$

Per il flusso di base si ha, dunque, che il modulo della vorticità è *formalmente* rappresentabile con una funzione “Delta di Dirac” centrata nell'origine.

Applicando una piccola perturbazione, che, per semplicità, supponiamo sinusoidale, alla superficie di discontinuità della velocità, il flusso, nelle vicinanze di tale superficie, non ha più velocità diretta solo lungo l'asse  $x$ . Infatti, la velocità del flusso acquista anche una componente lungo l'asse  $z$ :

$$V_z = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + V_x \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (3.50)$$

Inoltre, l'equazione di Bernoulli (2.70), ci assicura che, in questo caso, l'energia cinetica rimane costante, quindi, all'aumentare di  $V_z$  corrisponde una diminuzione di  $V_x$ . Si crea, dunque, una zona di “transizione” (indicata in figura 3.2 con il simbolo  $l$ ), all'interno della quale la velocità  $V_x$  non è più costante e la vorticità non è più nulla. Questo significa che si stanno originando dei vortici e che in questa zona sta avvenendo un mescolamento della materia.

Per trovare il centro dei vortici, analizziamo qualitativamente l'andamento della velocità. Con riferimento alla figura 3.2 b), si ha:

|                   |                |                          |                                     |
|-------------------|----------------|--------------------------|-------------------------------------|
| nella regione I   | $V_{1z} < 0$ , | perchè $V_{1x} = -V < 0$ | e $\partial \xi / \partial x > 0$ ; |
| nella regione II  | $V_{2z} > 0$ , | perchè $V_{2x} = V > 0$  | e $\partial \xi / \partial x > 0$ ; |
| nella regione III | $V_{2z} < 0$ , | perchè $V_{2x} = V > 0$  | e $\partial \xi / \partial x < 0$ ; |
| nella regione IV  | $V_{1z} > 0$ , | perchè $V_{1x} = -V < 0$ | e $\partial \xi / \partial x < 0$ . |

Di conseguenza, sulla superficie perturbata esistono dei punti con  $\xi = 0$  da cui il flusso tende ad allontanarsi (punti come A) e punti, sempre con  $\xi = 0$ , verso cui il flusso tende ad avvicinarsi (punti come B). Il flusso, però, deve essere

sempre continuo, ovvero non si possono creare cavità (nei punti come A) e due elementi distinti del flusso non possono occupare lo stesso punto (per esempio B), allo stesso istante. Quindi, la distribuzione di velocità, che si ottiene a seguito della perturbazione, porta alla creazione di vortici, che hanno per centro punti come B e, nel caso in esame, la rotazione avviene in senso orario (vedi figura 3.2 c)). Man mano che si sviluppano i vortici, il valore di  $l$  aumenta e raggiunge un massimo quando il flusso diventa turbolento, quindi possiamo dire che, a questa situazione, corrisponde un regime di *saturazione*.

### 3.6.3 Il criterio di instabilità di Rayleigh per flussi con un gradiente di velocità

Nella sezione precedente abbiamo esaminato l'instaurarsi dell'instabilità di Kelvin-Helmholtz nel caso in cui il flusso di base presenti una discontinuità netta nella distribuzione della velocità. In realtà, però, questo tipo di instabilità si può verificare anche quando il flusso di base presenta una variazione continua della velocità, ma non tutti i profili di velocità conducono all'instabilità. In questa sezione, il nostro intento è quello di ricavare una condizione necessaria (ma non sufficiente) sul profilo della velocità che permetta di stabilire se il flusso è stazionario oppure no.

Consideriamo un flusso di base stazionario, non viscoso, incompressibile e bi-dimensionale (nel piano  $xz$ ), confinato da due piani orizzontali  $\tilde{z} = \tilde{z}_1$  e  $\tilde{z} = \tilde{z}_2$ , della forma:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \tilde{V}(\tilde{z})\hat{\mathbf{x}} \quad \text{con } \tilde{z}_1 \leq \tilde{z} \leq \tilde{z}_2, \quad (3.51)$$

dove  $\hat{\mathbf{x}}$  è un vettore unitario lungo l'asse  $x$ . Inoltre adottiamo la convenzione che le quantità con il simbolo “ $\sim$ ” siano dimensionali, per non confonderci con le quantità adimensionali che presto verranno introdotte. Il profilo di velocità  $\tilde{V}(\tilde{z})$  può essere un'arbitraria funzione di  $\tilde{z}$  e le pareti confinanti il fluido possono eventualmente essere poste all'infinito.

Nell'analisi di questo problema riscriviamo le equazioni della fluido-dinamica in termini di quantità adimensionali, introducendo una lunghezza caratteristica  $L$  e una velocità caratteristica  $U$  associate con il flusso di base. È chiaro che la scelta di queste grandezze non è univoca; per questa tesina, noi seguiremo le defizioni adottate da Drazin e Reid [8], ovvero:

$$U \equiv \max_{\tilde{z}_1 \leq \tilde{z} \leq \tilde{z}_2} |\tilde{V}(\tilde{z})|, \quad (3.52)$$

e, se la pareti non sono all'infinito,

$$L \equiv \frac{1}{2}(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1). \quad (3.53)$$

Con queste grandezze possiamo definire:

$$t \equiv \frac{U}{L}\tilde{t}, \quad \mathbf{x} \equiv \frac{\tilde{\mathbf{x}}}{L}, \quad \mathbf{V} \equiv \frac{\tilde{\mathbf{V}}}{U}, \quad P \equiv \frac{\tilde{P}}{\rho U^2}, \quad (3.54)$$

e, infine:

$$\mathbf{V} \equiv \frac{\tilde{\mathbf{V}}}{U} \equiv V(z)\mathbf{x}, \quad (3.55)$$

dove  $\rho$  è la densità (dimensionale) del fluido, che è costante. Ricordiamo, inoltre che tutti i vettori sono definiti in uno spazio bi-dimensionale. Di conseguenza, in assenza di campi di forza, l'equazione di continuità (2.39) e l'equazione del moto (2.47) adimensionali diventano:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P. \quad (3.57)$$

Il flusso di base soddisfa l'equazione (3.57) solo se  $\nabla P = 0$ , cioè se la pressione resta costante ( $P = P_0$ ). Questa condizione, unita al fatto che  $\rho = \text{costante}$  implica che anche la temperatura debba rimanere costante. Per analizzare la stabilità del flusso di base, applichiamo una perturbazione isoterma (che lasci invariata la temperatura) e scriviamo la velocità e la pressione nella forma:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}; t) = V(z)\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{V}'(\mathbf{x}; t), \quad (3.58)$$

$$P(\mathbf{x}; t) = P_0 + P'(\mathbf{x}; t), \quad (3.59)$$

dove, come in precedenza,  $\mathbf{V}'$  e  $P'$  denotano la variazione della velocità e della pressione in seguito della perturbazione. Sostituendo le espressioni (3.58) e (3.59) nelle equazioni (3.56) e (3.57) e trascurando i termini del secondo ordine in  $\mathbf{V}'$ , si ottiene il seguente sistema lineare:

$$\nabla \cdot \mathbf{V}' = 0 \quad (3.60)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + V(z) \frac{\partial}{\partial x} \right] \mathbf{V}' + V'_z \frac{dV(z)}{dz} \hat{\mathbf{x}} = -\nabla P'. \quad (3.61)$$

Poichè i coefficienti delle equazioni (3.60) e (3.61) dipendono solo da  $z$ , la soluzione può essere scritta in modi normali del tipo (ricordiamo che il problema è bi-dimensionale):

$$\mathbf{V}'(\mathbf{x}; t) = \mathbf{A}(z)e^{ikx+\sigma t} \quad (3.62)$$

$$P'(\mathbf{x}; t) = B(z)e^{ikx+\sigma t}, \quad (3.63)$$

con  $k \in \mathbb{R}$  e  $\sigma \in \mathbb{C}$ . Sostituendo queste espressioni nelle equazioni (3.60) e (3.61) troviamo il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$(\sigma + ikV) A_x + A_z \frac{dV}{dz} = -ikB \quad (3.64)$$

$$(\sigma + ikV) A_z = -\frac{dB}{dz} \quad (3.65)$$

$$ikA_x + \frac{dA_z}{dz} = 0. \quad (3.66)$$

Per le condizioni al bordo, supponendo pareti rigide, si ha:

$$A_z = 0 \quad \text{per } z = z_1 \text{ e } z = z_2. \quad (3.67)$$

Il sistema di equazioni (3.64)-(3.66) si può *formalmente* riscrivere come un problema agli autovalori:

$$\begin{pmatrix} (\sigma + ikV) & dV/dz & ik \\ 0 & (\sigma + ikV) & d/dz \\ ik & d/dz & 0 \end{pmatrix} = 0$$

la cui soluzione fornisce la relazione di dispersione  $F(V, k, \sigma) = 0$ . Di conseguenza, assegnato il profilo di velocità  $V(z)$  e il vettore d'onda  $(k, 0)$ , si trovano i valori accettabili di  $\sigma$ , che ci permettono di capire se il flusso è stabile (secondo i criteri descritti nella sezione 3.2.2).

Per verificare la stabilità del flusso di base dovremmo esplicitare la relazione di dispersione  $F(V, k, \sigma) = 0$ . A tale scopo, notiamo che la condizione (3.60),  $\nabla \cdot \mathbf{V}' = 0$ , ci permette di introdurre una funzione  $\psi(x, z; t)$  tale che  $\mathbf{V}' = -\nabla \times \psi \hat{\mathbf{y}}$ , ovvero tale che le componenti perturbate della velocità risultino date da:

$$V'_x = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (3.68)$$

$$V'_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.69)$$

Se ammettiamo che  $\psi$  abbia la forma:

$$\psi(x, z; t) = \phi(z)e^{ikx + \sigma t}, \quad (3.70)$$

dove  $\phi(z)$  è una funzione  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , allora

$$A_x = \frac{d\phi}{dz} \quad (3.71)$$

$$A_z = -ik\phi. \quad (3.72)$$

Inserendo questi risultati nell'equazione (3.64) si ottiene:

$$B = \frac{dV}{dz}\phi + \left(\frac{i\sigma}{k} - V\right) \frac{d\phi}{dz} \quad (3.73)$$

e, infine, sostituendo quest'ultima espressione nell'equazione (3.65) si ha:

$$\left(V - \frac{i\sigma}{k}\right) \left(\frac{d^2\phi}{dz^2} - k^2\phi\right) - \frac{d^2V}{dz^2}\phi = 0, \quad (3.74)$$

che viene spesso detta *equazione di Orr-Sommerfeld*.

L'equazione di Orr-Sommerfeld, insieme con la condizione al contorno  $k\phi = 0$  per  $z = z_1$  e  $z = z_2$  (diretta conseguenza della condizione (3.67)), è proprio la relazione di dispersione che stavamo cercando. Purtroppo, in questo caso, non è possibile esplicitare la parte reale di  $\sigma$  e, quindi, fornire un criterio di validità generale per la stabilità del flusso di base. Siamo, però, in grado di determinare almeno una condizione *necessaria* per l'instabilità. Infatti, riscriviamo l'equazione di Orr-Sommerfeld (3.74) nel seguente modo:

$$\phi'' - k^2\phi - \frac{V''\phi}{V - \frac{i\sigma}{k}} = 0, \quad (3.75)$$

dove  $\phi'' = d^2\phi/dz^2$  e  $V'' = d^2V/dz^2$ . Moltiplicando entrambi i membri per il complesso coniugato di  $\phi$  e integrando da  $z_1$  a  $z_2$  si ottiene:

$$\int_{z_1}^{z_2} \left( \left| \frac{d\phi}{dz} \right|^2 + k^2 |\phi|^2 \right) dz + \int_{z_1}^{z_2} \frac{V''}{V - \frac{i\sigma}{k}} |\phi|^2 dz = 0, \quad (3.76)$$

dove abbiamo integrato per parti il primo termine e abbiamo tenuto presente le condizioni al contorno, valide tanto per  $\phi$ , quanto per il suo complesso



coniugato  $\phi^*$ , ovvero  $\phi^*|_{z_1} = 0$  e  $\phi^*|_{z_2} = 0$ . Scriviamo, ora,  $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ , così l'equazione (3.76) diventa:

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} \left( \left| \frac{d\phi}{dz} \right|^2 + k^2 |\phi|^2 \right) dz + \left( V + \frac{\sigma_i}{k} \right) \int_{z_1}^{z_2} \frac{V''}{\left( V + \frac{\sigma_i}{k} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_r}{k} \right)^2} |\phi|^2 dz + \\ + i \frac{\sigma_r}{k} \int_{z_1}^{z_2} \frac{V''}{\left( V + \frac{\sigma_i}{k} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_r}{k} \right)^2} |\phi|^2 dz = 0. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Affinchè quest'ultima equazione sia soddisfatta, è necessario che si annullino separatamente sia la parte reale (i primi due termini) che la parte immaginaria (l'ultima addendo). L'annullarsi della parte reale dà i valori accessibili per  $\sigma_i$ , mentre l'annullarsi della parte immaginaria fornisce i valori possibili di  $\sigma_r$ . L'ultimo termine dell'equazione (3.77) si annulla solo se si verifica una di queste due situazioni

- a)  $\sigma_r \neq 0$  e l'integrale è nullo;
- b)  $\sigma_r = 0$  e l'integrale non è nullo.

Di conseguenza bisogna vedere quando l'integrale si annulla. Notando che l'integrando è simmetrico tranne per la presenza del termine  $V''$ , allora, affinché l'integrale dia zero, il valore di  $V''$  deve cambiare segno almeno una volta nell'intervallo aperto  $(z_1, z_2)$ . Più precisamente, la condizione necessaria perchè l'integrale si annulli è che nel profilo di velocità del flusso di base esista almeno un punto di flesso (non coincidente con le pareti confinanti il flusso).

Questa osservazione ci permette di ricavare una condizione necessaria per l'instabilità, nota come *criterio di Rayleigh*, infatti, il caso a), ci garantisce che se  $\sigma_r > 0$  (situazione instabile), il flusso deve necessariamente avere un profilo di velocità con almeno un punto di flesso. Il caso b), inoltre, ci assicura che un profilo di velocità senza punti di flesso implica un  $\sigma_r = 0$ , ovvero una situazione neutralmente stabile.

Concludiamo, notando che, in questa sezione, abbiamo considerato solo perturbazioni bi-dimensionali. Il criterio di Rayleigh, però, vale anche per perturbazioni tri-dimensionali (mantenendo, comunque, un flusso di base bi-dimensionale), poichè esiste un teorema (introdotto da Squire, per la cui dimostrazione rimandiamo a [8]), che afferma che, con un'opportuna trasformazione di coordinate, un sistema di equazioni, descriventi l'evoluzione del flusso soggetto ad una perturbazione tri-dimensionale, è del tutto equivalente al sistema bi-dimensionale (3.64)-(3.66).

### 3.6.4 Instabilità di Kelvin-Helmholtz per flussi con gradienti di densità e di velocità

In precedenza, abbiamo più volte sottolineato che l'instabilità di Kelvin-Helmholtz si può originare anche in assenza di forze esterne. In questa sezione, invece, vogliamo vedere come la gravità possa influenzare l'instaurarsi dell'instabilità di Kelvin-Helmholtz in un flusso che presenti un gradiente di velocità.

Consideriamo, dunque, un fluido isoterma comprimibile bi-dimensionale e scegliamo un sistema di riferimento tale che la velocità del flusso sia diretta lungo l'asse  $x$  e sia funzione della sola variabile  $z$ , cioè  $\mathbf{V} = V(z)\hat{\mathbf{x}}$ . Inoltre, sovrapponiamo un campo gravitazionale uniforme diretto lungo l'asse  $z$ , cioè  $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$ , così che la distribuzione di densità presenti un gradiente opposto alla direzione dell'asse  $z$ , oppure, analogamente, un gradiente della pressione diretto nello stesso verso dell'asse  $z$ .

Come abbiamo notato all'inizio della sezione 3.6, la fonte dell'instabilità di Kelvin-Helmholtz è l'energia cinetica dovuta al moto relativo dei diversi strati del flusso di base (sia esso costituito da due fluidi che scorrono parallelamente con velocità diverse o da un unico fluido con un gradiente di velocità). Naturalmente, maggiore è la differenza di velocità presente nel flusso di base, maggiore è la tendenza all'instabilità, come di può vedere dall'equazione (3.39). La stessa equazione, però, ci dice anche che la forza di gravità può diminuire il tempo scala  $t_{KH}$  caratteristico dell'insorgere dell'instabilità, infatti  $t_{KH} \equiv 1/\sigma_r$  e il valore di  $\sigma_r$  aumenta se  $\nabla\rho$  è diretto nel verso opposto dell'asse  $z$ . Di conseguenza, finché la gravità genera un gradiente di densità, ovvero un gradiente di pressione, sufficientemente alto da contrastare l'effetto del gradiente di velocità, l'instabilità di Kelvin-Helmholtz non si verifica.

Per ottenere un'espressione quantitativa di questa condizione, consideriamo due volumi adiacenti e uguali del flusso, uno ad altezza  $z$ , con densità  $\rho$  e velocità orizzontale  $V$ , l'altro ad altezza  $z + \delta z$ , con densità  $\rho + \delta\rho$  e velocità orizzontale  $V + \delta V$ , e supponiamo che si invertano. Il lavoro, per unità di massa e di volume, che il fluido deve fare contro la forza di gravità per effettuare questo scambio, è dato da:

$$\delta W = -g \cdot \delta\rho \cdot \delta z. \quad (3.78)$$

Dopo lo scambio, entrambi i volumi hanno una velocità orizzontale media  $V_{media} = (2V + \delta V)/2$ , quindi, l'energia cinetica, per unità di massa e di

volume, disponibile per compiere il lavoro  $\delta W$  è:

$$\frac{1}{2}\rho \left[ V^2 + (V + \delta V)^2 - \frac{1}{2} (2V + \delta V)^2 \right] = \frac{1}{4}\rho (\delta V)^2. \quad (3.79)$$

Questo ci suggerisce che una condizione *necessaria* per l'instabilità è:

$$\frac{1}{4}\rho (\delta V)^2 < -g \cdot \delta \rho \cdot \delta z \quad (3.80)$$

oppure, analogamente, per spostamenti infinitesimi:

$$\left( \frac{dV}{dz} \right)^2 < -4 \frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz}. \quad (3.81)$$

Se definiamo *numero di Richardson*, la quantità:

$$J \equiv -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho/dz}{(dV/dz)^2}. \quad (3.82)$$

allora la condizione (3.81) diventa:

$$\text{stabilità} \quad \implies \quad J > \frac{1}{4} \quad \text{ovunque.} \quad (3.83)$$

Ricordiamo che questa è una condizione necessaria, ma non sufficiente, infatti, esistono situazioni in cui si ha un flusso instabile nonostante  $J > 1/4$  [2].

### 3.6.5 Applicazioni astrofisiche dell'instabilità di Kelvin-Helmholtz

Naturalmente, anche l'instabilità di Kelvin-Helmholtz gioca un ruolo importante in ambito astrofisico. In particolare, essa è uno dei principali fenomeni responsabili del mescolamento della materia stellare [2]. Inoltre, questo tipo di instabilità va tenuta in considerazione anche per modellizzare l'esplosione delle Supernovae (vedi sezione 3.8). Infatti, durante un'esplosione di Supernova la materia viene espulsa tramite un violento getto che si genera nell'interno della stella e che deve attraversarne tutto l'involuppo. In questo caso, l'instabilità si origina a causa della differenza di velocità tra il flusso di materia uscente e il gas circostante, che può essere considerato inizialmente a riposo. Inoltre, è chiaro che in questa situazione (come in molte altre situazioni realistiche), l'instabilità di Rayleigh-Taylor e quella di Kelvin-Helmholtz si sovrappongono e la configurazione che si ottiene viene detta *a forma di fungo*.

## 3.7 Tempi caratteristici di alcuni processi della fluido-dinamica

In questa sezione deriveremo brevemente i tempi scala caratteristici dei processi fisici più importanti che abbiamo considerato, ponendo enfasi particolare sulle instabilità. Potremo così confrontarli tra di loro e capire quali siano le condizioni nelle quali un processo giochi un ruolo fondamentale rispetto agli altri.

Per le instabilità possiamo definire in modo naturale il *tempo scala*,  $t_{scala}$ , come il tempo con cui cresce la perturbazione alla superficie di discontinuità. Dall'equazione (3.28), si ha che:

$$t_{scala} \equiv \frac{1}{\sigma_r}, \quad (3.84)$$

ovvero, il tempo scala è l'inverso del *tasso di crescita* della perturbazione: maggiore è il tempo scala, più la perturbazione cresce lentamente.

Tramite l'equazione (3.84) e dalla relazione (3.46) segue che il tempo scala caratteristico per l'instabilità di Rayleigh-Taylor è:

$$t_{RT} = \left( \frac{\tilde{\rho}}{k_z a \Delta \rho} \right)^{1/2}, \quad (3.85)$$

dove  $\tilde{\rho}$  indica la densità media del flusso di base,  $\Delta \rho$  è la differenza di densità,  $a$  l'accelerazione cui il flusso è sottoposto e  $k_z$  il vettore d'onda lungo la direzione dell'accelerazione.

Per l'instabilità di Kelvin-Helmholtz si ricava, invece, dall'equazione (3.47), che:

$$t_{KH} = \frac{1}{k_x \Delta V}, \quad (3.86)$$

dove  $\Delta V$  è la differenza di velocità e  $k_x$  il vettore d'onda nella direzione della velocità iniziale.

Per valutare se un'eventuale instabilità giochi un ruolo rilevante nella fisica del problema dobbiamo confrontare il suo tempo caratteristico con quello del moto macroscopico (detto tempo *dinamico*):

$$t_{din} = \frac{L}{V}, \quad (3.87)$$

### 3.7 Tempi caratteristici di alcuni processi della fluido-dinamica 60

dove  $V$  e  $L$  sono, rispettivamente, la velocità media e la lunghezza caratteristica del flusso di base.

Di conseguenza, dobbiamo calcolare

$$R_{RT} \equiv \frac{t_{din}}{t_{RT}} = \left( \frac{k_z a L^2 \Delta \rho}{\tilde{\rho} V^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad R_{KH} \equiv \frac{t_{din}}{t_{KH}} = \frac{k_x L \Delta V}{V}, \quad (3.88)$$

e, se  $R_{RT}$  e/o  $R_{KH}$  sono  $> 1$ , allora l'instabilità di Rayleigh-Taylor e/o quella di Kelvin-Helmholtz sono fenomeni da non trascurare.

Nel caso delle Supernovae, il tempo dinamico è il tempo con cui si propaga l'onda d'urto che dà origine all'esplosione. Esso si può stimare tenendo presente che  $V$  è dell'ordine di  $10^3$  km/sec (altamente supersonico), mentre  $L$  è dell'ordine del raggio della stella, ovvero  $L = 10^8$  cm, per le SN di tipo I, e  $L = 10^{12}$  cm, per le SN di tipo II. Ne segue che i tempi dinamici sono estremamente brevi:  $t_{din} \sim 1$  sec, per le SN di tipo I e  $t_{din} \sim 10^4$  sec, per le SN di tipo II.

All'inizio di questo capitolo abbiamo discusso il ruolo che la viscosità e la conduzione termica giocano nell'ambito della stabilità di un fluido e abbiamo deciso di trascurare questi effetti. Per poter giustificare rigorosamente questa assunzione dobbiamo confrontare i tempi scala caratteristici. Infatti, il tempo scala con cui si risentono gli effetti della viscosità è:

$$t_{visc} = \frac{L^2}{\nu}, \quad (3.89)$$

dove abbiamo indicato con  $\nu$  il *coefficiente di viscosità*, mentre per la conduzione termica si ha:

$$t_{cond} = \frac{L^2}{\kappa}, \quad (3.90)$$

con  $\kappa$ , coefficiente di conduzione termica.

Purtroppo, però, per il caso delle Supernovae, è molto difficile anche solo fornire un ordine di grandezza dei parametri in esame. Il problema nasce dal fatto che, in questo stato evolutivo, la stella è costituita da diverse componenti, neutroni, elettroni, fotoni, neutrini, atomi e molecole, in parte anche degeneri. Non solo ognuna di queste componenti porta un diverso contributo a  $\nu$  e  $\kappa$ , ma il valore di questi due parametri dipende anche dall'interazione non lineare dei vari contributi. D'altra parte, qualitativamente, riteniamo che i tempi scala di questi fenomeni siano grandi rispetto ai tempi dinamici,

in quanto gli effetti della conduttività e della viscosità si propagano nel fluido alla velocità del suono  $c_s$ , mentre l'onda d'urto viaggia a velocità supersoniche ( $\sim 10^3 - 10^4 c_s$ ).

Infine, come abbiamo accennato nella sezione 2.4.4, negli eventi di Supernova molta energia viene rilasciata sia per irraggiamento che attraverso la perdita di neutrini, quindi è necessario valutare anche il tasso di raffreddamento:

$$R_{loss} = \frac{1}{\Lambda}, \quad (3.91)$$

dove  $\Lambda$  indica tutte le possibili perdite di energia. Anche in questo caso, non è facile stimare il valore di  $\Lambda$ , perchè esso dipende criticamente dai dettagli idrodinamici dell'esplosione. D'altra parte, dato che, l'energia espulsa tramite fotoni è dell'ordine di  $10^{51}$  erg e l'energia trasportata dai neutrini è dell'ordine di  $10^{53}$  erg, è, ragionevole supporre che  $\Lambda$  assuma valori molto grandi, per cui non è realistico trascurare queste perdite. Da qui si comprende, quindi, la necessità di introdurre il termine  $\rho\Lambda$  nell'equazione dell'energia (2.54).

## 3.8 Deflagrazione termonucleare di una nana bianca di carbonio ed ossigeno

In questa sezione mostriamo un'applicazione in ambiente astrofisico della teoria fin'ora descritta. In particolare, riportiamo i risultati recentemente ottenuti da Gamezo et al. [9] nella simulazione della deflagrazione termonucleare delle Supernovae di tipo Ia, concentrando la nostra attenzione sul ruolo che giocano, in questo processo, le instabilità di Rayleigh-Taylor e di Kelvin-Helmholtz.

Gamezo et al. hanno realizzato un modello della deflagrazione termonucleare di una nana bianca di carbonio ed ossigeno di massa  $1.4 M_\odot$ , inizialmente in equilibrio idrostatico, con raggio iniziale di  $R_{WD} = 2 \cdot 10^8$  cm, densità centrale iniziale di  $\rho_c = 2 \cdot 10^9$  g/cm<sup>3</sup>, temperatura iniziale uniforme pari a  $T = 10^5$  K e composizione iniziale uniforme (stessa massa frazionaria di  $^{12}\text{C}$  e  $^{16}\text{O}$ ). Per dare origine all'esplosione, al centro della nana bianca è stata aggiunta, senza disturbare l'equilibrio idrostatico, una piccola regione sferica (avente raggio di  $0.015 R_{WD}$ ) a temperatura maggiore e contenente alcuni prodotti di reazioni nucleari.

Il modello numerico utilizzato per simulare l'esplosione è basato sulle equazioni della fluido-dinamica che descrivono la conservazione della massa, dell'impulso e dell'energia, considerando la materia stellare non viscosa. Le proprietà termodinamiche della materia stellare, invece, sono descritte dall'equazione di stato della materia degenere. Infine, il codice numerico tiene in considerazione anche la chimica delle reazioni termonucleari che portano alla formazione di nichel e ferro a partire da carbonio ed ossigeno.

Lo scopo della simulazione è descrivere l'evoluzione dell'esplosione mentre la fiamma termonucleare si propaga verso gli strati più esterni della struttura stellare. La fiamma, inizialmente, è laminare e il suo moto può considerarsi stazionario; in seguito, però, subentra l'instabilità di Rayleigh-Taylor e la fiamma viene accelerata. L'instabilità si verifica a causa della presenza del campo gravitazionale della stella e del fatto che la materia interna alla fiamma termonucleare proviene dal centro della stella e, quindi, è molto calda e poco densa, mentre la materia che circonda la fiamma è meno calda e più densa. Possiamo, dunque, applicare l'equazione (3.46), la quale ci suggerisce che la fiamma viene spinta verso l'esterno con una velocità proporzionale a  $\sqrt{AgL}$ , dove  $g$  è il modulo dell'accelerazione gravitazionale,  $A \equiv (\rho_0 - \rho_1)/(\rho_0 + \rho_1)$  è il numero di Atwood ( $\rho_0$  e  $\rho_1$  sono le densità della materia all'interno e all'esterno della fiamma) e  $L$  è una lunghezza caratteristica legata alla dimensione della zona in cui si verifica il mescolamento della materia. Ne segue che la fiamma viene accelerata man mano essa si propaga verso l'esterno, perchè, allontanandosi dal centro della stella  $g$  e  $A$  aumentano (in particolare  $A$  aumenta perchè aumenta la differenza di densità tra la materia all'interno e all'esterno della fiamma).

L'instabilità di Rayleigh-Taylor ha, però, anche un'altra conseguenza, infatti, per definizione stessa di instabilità (vedi sezione 3), essa permette la crescita esponenziale di piccole perturbazioni della superficie della fiamma, la quale comincia a distorcersi, formando delle cosiddette "dita" (vedi sezione 3.5). Queste distorsioni continuano a crescere, dando luogo anche all'instabilità di Kelvin-Helmholtz. Infatti, si ha una discontinuità di velocità dovuta al fatto che la fiamma, di materia leggera, si muove verso l'esterno, mentre la restante materia stellare, più pesante, si muove in direzione opposta. Come conseguenza dello sviluppo dell'instabilità di Kelvin-Helmholtz (vedi sezione 3.6), si originano anche dei vortici lungo la superficie della fiamma, la quale comincia ad assumere la caratteristica "forma a fungo". Un importante conseguenza delle instabilità è che esse permettono il mescolamento della materia. Questo, infine, favorisce sia ulteriori reazioni termonucleari che ri-

scaldano la struttura, sia processi di decadimento radioattivo, che, invece, rappresentano una perdita di energia. Di conseguenza, i risultati di progetti rivolti alla rivelazione di fotoni  $\gamma$  saranno molto utili per fornire nuove informazioni per i modelli delle Supernovae.

Quando le distorsioni alla superficie della fiamma hanno raggiunto dimensioni sufficientemente grandi, cominciano a svilupparsi anche instabilità secondarie di Rayleigh-Taylor e di Kelvin-Helmholtz, che producono il successivo livello di superficie a “forma a fungo”. L’evoluzione nel tempo della risultante complicata superficie della fiamma è mostrata in figura 3.3.

Durante la propagazione della fiamma, l’energia prodotta dalle reazioni termonucleari provoca l’espansione della superficie della nana bianca. Questa espansione è accelerata e diventa non uniforme quando il fronte dell’onda d’urto si avvicina alla superficie della stella. Gli autori hanno realizzato alcune simulazioni facendole proseguire fino a che la velocità delle cosiddette “dita” della fiamma diventa trascurabile rispetto alla velocità della materia stellare in espansione, ovvero la perturbazione ha praticamente terminato la sua crescita. Questo effetto viene detto *congelamento* dell’instabilità di Rayleigh-Taylor. Le simulazioni si differenziano per la scelta di alcuni parametri, come come la composizione chimica originaria della nana bianca o la velocità iniziale della fiamma.

Una volta conclusa la simulazione, è necessario confrontare i risultati ottenuti con i dati delle osservazioni astronomiche. Un importante parametro che può essere utilizzato come mezzo di paragone è l’energia cinetica  $E_k$  della materia in espansione. Infatti, questa energia si può ricavare analizzando l’effetto Doppler delle linee spettrali, che fornisce la velocità dell’espansione. Tipici valori, così ottenuti, dell’energia cinetica per una SN di tipo Ia sono compresi tra  $(1 - 1.5) 10^{51}$  erg. Con le simulazioni, invece, si ottengono dei valori di  $E_k$  compresi tra  $(0.37 - 1.2) 10^{51}$  erg, quindi, leggermente inferiori. In ogni caso, però, l’energia totale rilasciata (data dalla somma dell’energia cinetica e dell’energia termica) è sempre superiore all’energia dell’autogravità, ovvero, la materia non è più legata dalla gravità.

Questi risultati sono di fondamentale importanza perchè è la prima volta che, con una simulazione, si riesce ad ottenere un’energia maggiore dell’energia di legame gravitazionale e questo si deve al fatto che si tratta, per la prima



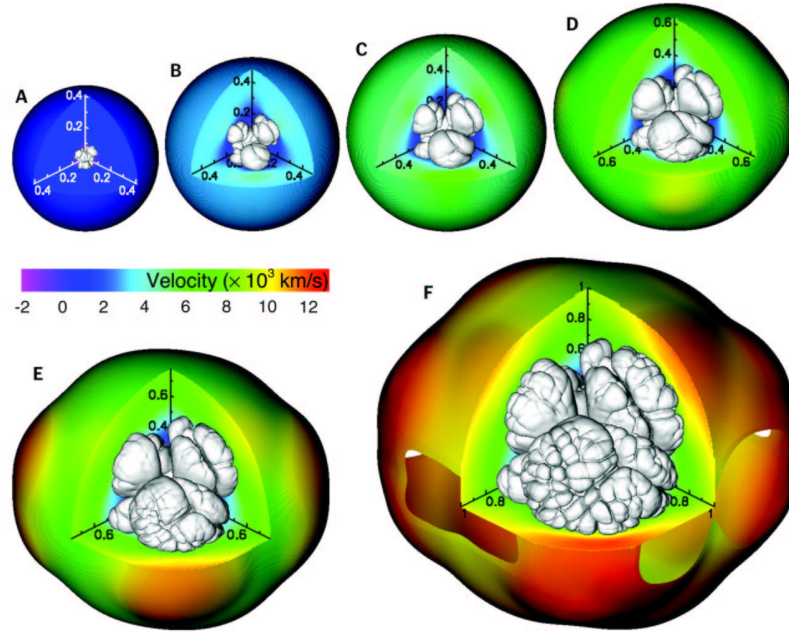


Figura 3.3: Sviluppo della deflagrazione termonucleare a partire da una nana bianca di Carbonio e Ossigeno di massa  $1.4 M_{\odot}$ . È mostrata la fiamma termonucleare ai tempi (A) 1.26 sec, (B) 1.49 sec, (C) 1.57 sec, (D) 1.65 sec, (E) 1.76 sec, (F) 1.90 sec dopo l'inizio dell'esplosione. La forma della fiamma è determinata dall'instabilità di Rayleigh-Taylor e Kelvin-Helmholtz. La scala di grigi indica la velocità radiale della materia negli strati esterni. La scala delle distanze è normalizzata al raggio iniziale della nana bianca ( $2 \cdot 10^8$  cm). La figura e la didascalia sono tratte da [9].

volta, di una simulazione tri-dimensionale. Le esplosioni bi-dimensionali, infatti, non sono in grado di produrre sufficiente energia perchè la superficie della fiamma non può assumere dimensioni abbastanza grandi.

Altri parametri utilizzati per paragonare simulazioni con osservazioni sono la distribuzione spaziale e l'abbondanza frazionaria degli elementi chimici. Il confronto dei valori assunti da questi parametri nelle simulazioni e nelle osservazioni, presenta qualche discrepanza. Si può concludere, pertanto, che il modello della deflagrazione termonucleare di una SN di tipo Ia descritto in [9], pur rappresentando un significativo passo in avanti nella comprensione teorica delle Supernovae Ia, risulta tuttavia ancora incompleto. Gli autori propongono, per ottenere risultati più consistenti con le osservazioni, di far evolvere la fiamma termonucleare in modo tale che la sua velocità, inizial-

mente subsonica, diventi in seguito supersonica, ovvero si passi da un regime di deflagrazione ad uno di detonazione [11]. In un regime di detonazione, però, bisogna tener presente anche di un'altra importante instabilità della fluido-dinamica, quella di Richtmyer-Meshkov [6], [10], [24]. Infine, altri dati astronomici [10], [21], [23] hanno messo in evidenza il fatto che l'esplosione di Supernovae non ha una simmetria sferica, ma, invece, lobata. Questi sono tutti importanti fattori da considerare nei futuri modelli di esplosione di Supernova, soprattutto vista l'importanza che SN Ia rappresentano in quanto considerate "candele standard".

## *Ringraziamenti*

*Desidero ringraziare il Professor Steven Shore per avermi illustrato con chiarezza l'affascinante teoria della fluidodinamica e per avermi guidato con costante disponibilità e pazienza in questo lavoro. Grazie, in particolare, per le stimolanti discussioni che hanno sempre caratterizzato i nostri incontri.*

*Grazie anche agli altri membri del gruppo di ricerca di astrofisica dell'Università di Pisa, in particolare Rosa Poggiani e Scilla Degl'Innocenti, per le letture consigliatemi e per gli utili suggerimenti.*

*Un grazie particolare a Michele, non solo per avermi aiutato a risolvere problemi tecnici in  $\text{\LaTeX}$  e seguito nel lavoro di revisione, ma soprattutto per avermi sopportato in questi mesi, trovando sempre una parola di incoraggiamento.*

*Infine voglio ringraziare la mia famiglia e tutti coloro che, pur non avendo concretamente collaborato alla stesura di questo lavoro, mi sono stati vicini con tanto affetto in questo periodo.*

# Bibliografia

- [1] Arnett D. (1996). *Supernovae and Nucleosynthesis*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- [2] Brüggén M. and Hillebrandt W. (2001). Mixing through shear instabilities. *M.N.R.A.S.* **320**, 73
- [3] Castellani V. (1985). *Astrofisica Stellare. I fondamenti fisici dell'interpretazione evolutiva di stelle e galassie*. Bologna: Zanichelli.
- [4] Chandrasekhar S. (1961). *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford: Oxford University Press; reprinted by Dover.
- [5] Chandrasekhar S. (1939). *Introduction to the Study of Stellar Structure*. Chicago: The University of Chicago Press; reprinted by Dover.
- [6] Charakhch'yan A. A. (2001). Reshocking at the non-linear stage of Richtmyer-Meshkov instability. *Plasma Phys. Control. Fusion*. **43**, 1169
- [7] Ciotti L. (2000). *Lecture Notes on Stellar Dynamics*. Pisa: Scuola Normale Superiore.
- [8] Drazin P. G. and Reid W. H. (1983). *Hydrodynamic Stability*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [9] Gamezo V. N. et al. (2003). Thermonuclear Supernovae: Simulations of the Deflagration Stage and Their Implications. *Science*. **299**, 77
- [10] Khokhlov A. M. et al. (1999). Jet-Induced Explosions of Core Collapse Supernovae. *Astrophys. J.* **524**, L107
- [11] Khokhlov A. M. (1991). Delayed detonation model for type Ia supernovae. *Astron. Astrophys.* **245**, 114
- [12] Landau L. D. and Lifshitz E. M. (1963). *Fluid Mechanics*, 2<sup>nd</sup> edition. Oxford: Pergamon.

- 
- [13] Landau L. D. and Lifshitz E. M. (1999). *Fisica statistica*, 2<sup>a</sup> edizione. Roma: Editori Riuniti.
  - [14] Matsuoka C. (2003). Nonlinear evolution of an interface in the Richtmyer-Meshkov instability. *Physical Review Letter*. **67**, 036301
  - [15] Perlmutter S. et al. (1999). Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 high redshift Supernovae. *Astrophys. J.* **517**, 565
  - [16] Richardson D. et al. (2001). A comparative study of the absolute magnitude distribution of Supernovae. *Astron. J.* **123**, 745
  - [17] Shore S. N. (1992). *An Introduction to Astrophysical Hydrodynamics*. San Diego, California: Academic Press.
  - [18] Shore S. N. (2003). *The Tapestry of Modern Astrophysics*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.
  - [19] Tornambè A. (1990). *Fisica delle Supernovae*. Pisa: Riassunto delle lezioni del corso integrativo di Fisica Stellare tenute presso l'Università di Pisa.
  - [20] Tritton D. J. (1988). *Physical Fluid Dynamics*. Oxford: Oxford University Press.
  - [21] Wang L. et al. (2002). The Axisymmetric Ejecta of Supernova 1987A. *Astrophys. J.* **579**, 671
  - [22] Wheeler J. C. et al. (1990). *Supernovae* by Jerusalem Winter School of Theoretical physics.
  - [23] Wheeler J. C. et al. (2002). Asymmetric Supernovae from Magnetocentrifugal Jets. *Astrophys. J.* **568**, 807
  - [24] Zhang Q. (1998). Analytical Solution of Layer-Type Approach to Unstable Interfacial Fluid Mixing. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3391