Indice

Introduzione

Negli interni stellari avvengono le reazioni nucleari responsabili sia della produzione di energia che mantiene le stelle in equilibrio idrostatico, sia della sintesi degli elementi. Tutti gli elementi presenti nell'Universo, infatti, ad eccezione dell'elio e di alcuni isotopi leggeri, sono stati prodotti esclusivamente all'interno di stelle di vario tipo.

Scopo di questo lavoro è l'analisi dettagliata di questi processi. Gli argomenti trattati sono articolati come segue:

- Nel primo capitolo descriviamo le caratteristiche fisiche di un tipico interno stellare e successivamente analizziamo le caratteristiche generali di una reazione nucleare di interesse astrofisico, senza e con risonanze, definendo le grandezze di interesse (Q-valore, sezione d'urto, reaction rate) e spiegando i metodi e le approssimazioni necessarie per calcolarle.

- Nel secondo capitolo esaminiamo i due principali meccanismi attraverso i quali l'idrogeno viene convertito in elio: catena protone-protone e biciclo CN-NO. Vengono calcolati i tassi di reazione basandosi sui dati degli esperimenti più recenti, e viene esaminata la rispettiva efficienza dei due processi al variare della temperatura della stella.

- Nel terzo capitolo si affronta la sintesi degli elementi più pesanti dell'elio-4, analizzando in particolare la produzione di carbonio-12 attraverso la cosiddetta reazione 3α. L'ultimo paragrafo contiene cenni sulla nucleosintesi degli elementi oltre il ferro.

Capitolo 1

Generalità sulla fusione nucleare nelle stelle

1.1 Materia e radiazione negli interni stellari

1.1.1 Equazione di stato

Data l'alta temperatura necessaria per le reazioni di fusione nucleare, tale processo avviene generalmente negli interni stellari. Cominceremo quindi analizzando le principali caratteristiche fisiche delle regioni interne di una tipica stella.

Le temperature centrali di una stella che si trova nella fase di combustione di idrogeno (quella che occupa la maggior parte della sua vita) variano da circa 10 a circa 30 milioni di Kelvin, mentre le densità centrali sono dell'ordine delle centinaia di g/cm^3. Le stelle più massicce sono quelle più calde e luminose, ma hanno densità centrali inferiori. Nelle fasi finali, a seconda della massa totale, e quindi del tipo di evoluzione a cui la stella andrà incontro, si possono raggiungere temperature centrali anche $\sim 10^9\,\mathrm{K}$ e densità centrali di oltre $10^7\,g/cm^3$.

Il gas che compone una stella è composto per la maggior parte da idrogeno ed elio, e da piccole quantità di elementi più pesanti, che in astrofisica sono sono genericamente chiamati metalli. Si usa definire quantitativamente la composizione chimica tramite 3 parametri: X, Y e Z, che rappresentano l'abbondanza relativa in massa di idrogeno, elio e metalli rispettivamente. Usualmente il valore di X è compreso tra $0,7$ e $0,8$ nelle regioni esterne; nell'interno, man mano che procede la produzione di He, decresce nel tempo fino ad annullarsi. Il valore di Z tipicamente non supera $0,02 \div 0,03$.

In un bagno termico a una temperatura di 10 milioni di Kelvin, (come termine di paragone riportiamo la temperatura centrale del Sole, che secondo i modelli standard più recenti è di $\approx 15,6 \cdot 10^6\,\mathrm{K}$ [2]), l'energia media dei costituenti è $k_B T = 1,343\,\mathrm{keV}$ (k_B è la costante di Boltzmann). Confrontando questo valore con l'energia di ionizzazione dell'idrogeno ($13,6\,\mathrm{eV}$) e con le energie di prima e seconda ionizzazione dell'elio ($24,49\,\mathrm{eV}$ e $52,17\,\mathrm{eV}$), risulta evidente che a questo valore di T i due elementi che costituiscono più del 98% della materia si presentano in stato di completa ionizzazione. E' chiaro quindi che, per le stelle di sequenza principale aventi massa maggiore o uguale di quella solare, la materia presente nel nucleo consiste di un plasma di ioni positivi ed elettroni liberi, in equilibrio termico con un gas di fotoni distribuiti nello spazio delle fasi secondo la legge di Planck.

Per scrivere un'equazione di stato, iniziamo con l'osservare che una stella è un sistema autogravitante in cui la forza di gravità è controbilanciata dalla pressione esercitata dal plasma più quella esercitata dalla radiazione.

$$P_{tot} = P_{gas} + P_{rad} \tag{1.1}$$

Per quanto riguarda la pressione di radiazione, l'equazione è la seguente:

$$P_{rad} = \frac{1}{3} a T^4 \tag{1.2}$$

dove [9]

$$a = \frac{\pi^2}{15} \frac{k_B^4}{(\hbar c)^3} \tag{1.3}$$

Passiamo ora ad esaminare il contributo del plasma.

Cominciamo con l'assumere un'equazione di stato di gas perfetto $P = (N/V)k_B T$; vedremo più avanti sotto quale ipotesi questa approssimazione è valida. Visto che ci troviamo di fronte a una miscela di ioni di massa differente e elettroni, l'equazione può essere scritta, in termini della densità di materia ρ nel seguente modo:

$$P_{gas} = \frac{\rho k_B T}{\mu m_p} \tag{1.4}$$

dove m_p è la massa del protone, e il termine μ è la massa media per costituente espressa in termini della massa atomica dell'idrogeno. Se, per esempio, nel plasma fosse presente solo idrogeno $(X = 1, Y = 0, Z = 0)$, μ prenderebbe il valore di $0,5$, che corrisponde ad assegnare massa $1/2$ all'elettrone e al protone risultanti dalla ionizzazione dell' ^{1}H (massa 1). In funzione delle abbondanze, μ risulta così definito:

$$\mu = \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i(Z_i + 1)}{A_i}} \tag{1.5}$$

dove X_i è l'abbondanza dell'i-esimo elemento.

Considerando entrambi i contributi (plasma – assunto per il momento come gas perfetto – e radiazione), l'equazione di stato si scrive quindi:

$$P_{tot} = \frac{\rho k_B T}{\mu m_p} + \frac{1}{3} a T^4 \tag{1.6}$$

E' possibile stimare in maniera rozza (solo per avere un'idea a grandi linee) un limite superiore per il contributo della pressione di radiazione nel centro di una stella, in funzione della sua massa M. Il calcolo (che si trova svolto per esteso, ad esempio, in [8]) sfrutta l'equazione di stato (1.6) e l'equazione dell'equilibrio idrostatico:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -G \frac{M(r)\rho(r)}{r^2} \tag{1.7}$$

Se introduciamo il termine β definito come il rapporto tra la pressione esercitata dal plasma P_{gas} e la pressione totale, l'equazione di stato si può riscrivere (il pedice c si riferisce al centro della stella):

$$P_{c\,tot} = \left[\left(\frac{k}{\mu_c m_p} \right)^4 \frac{3}{a} \frac{1-\beta_c}{\beta_c^4} \right]^{(1/3)} \rho_c^{(4/3)} \tag{1.8}$$

mentre partendo dall'equazione (1.7), ipotizzando che ρ sia una funzione monotona decrescente di r si può ottenere un limite superiore per la pressione centrale P_c:

$$P_{c\ tot} \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{(1/3)} G \rho_c^{(4/3)} M^{(2/3)} \tag{1.9}$$

Confrontando questa disequazione con la (1.8) si giunge alla diseguaglianza

$$1 - \beta = \frac{P_{rad}}{P} \leq 1 - \beta^\star \tag{1.10}$$

dove $\beta^\star$ è definito dalla seguente relazione:

$$\frac{1-\beta^\star}{\beta^\star} = \frac{\pi a G^3 m_p^4 \mu_c^4 M^2}{18 k^4} \tag{1.11}$$

Nel centro del Sole (ponendo $\mu = 0,5$) si ha $1 - \beta \leq 0,0025$, quindi la pressione di radiazione contribuisce in modo molto piccolo. Questo valore diventa però sempre più grande all'aumentare della massa della stella, tanto che nelle stelle di massa superiore a 25 masse solari la radiazione contribuisce alla pressione totale per più del 50%.

1.1.2 effetti coulombiani, quantistici e relativistici

A questo punto occorre vedere se l'approssimazione di gas perfetto è ragionevole alle temperature e pressioni del nucleo stellare.

Come sappiamo, l'equazione (1.4) è valida per un sistema di particelle governate da un'Hamiltoniana del tipo $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p^2}{2m}$, cioè l'Hamiltoniana di un insieme di particelle libere, classiche e non relativistiche.

Occorre valutare quanto sono fondate le tre ipotesi:

- particelle poco (o non) interagenti;
- particelle che obbediscono alla statistica classica (alla Boltzmann);
- particelle non relativistiche.

Iniziamo dalla prima ipotesi. Poiché stiamo considerando un gas di ioni positivi ed elettroni, si tratta di vedere quanto siano importanti le interazioni coulombiane. E' facile convincersi che l'interazione di Coulomb non influenza molto il sistema se l'energia cinetica media di un costituente è molto maggiore dell'energia potenziale di interazione con il costituente più vicino. In formule:

$$k_B T \gg \frac{Z^2 e^2}{d} \tag{1.12}$$

dove d è la distanza media tra le particelle:

$$d \sim (\frac{V}{N})^{1/3} = (\frac{\mu m(^1\mathrm{H})}{\rho})^{1/3} \tag{1.13}$$

Sostituendo (1.13) in (1.12) si ottiene:

$$\rho \ll \frac{k_B^3 \mu m(^1\mathrm{H}) T^3}{Z^6 e^6} \tag{1.14}$$

Per $T \sim 10^7\,\mathrm{K}$, $X = 1$ la condizione (1.14) corrisponde a $\rho \ll 10^5 g/cm^3$, che è ampiamente soddisfatta negli interni stellari delle stelle di sequenza principale (ad esempio nel Sole $\rho_c \sim 150\,g/cm^3$), mentre non è soddisfatta nelle ultime fasi dell'evoluzione.

Passiamo ora a considerare l'importanza di eventuali effetti quantistici che potrebbero invalidare la nostra descrizione del plasma stellare come gas perfetto classico. Ricordiamo che la statistica di Boltzmann offre una buona descrizione di un gas di particelle confinate in un volume V fino a quando la lunghezza d'onda di De Broglie media associata ai costituenti è molto minore della distanza media tra i medesimi. Quanto si verifica il contrario, la descrizione classica non è più applicabile: occorre tener presente il fatto che lo spazio delle fasi è quantizzato, e quindi le particelle non possono avere energie arbitrarie. In questo caso occorre applicare la statistica di Fermi-Dirac se le particelle sono fermioni o quella di Bose-Einstein se sono bosoni. La distribuzione di Boltzmann risulta un limite di queste due distribuzioni quando l'occupazione media dei domini dello spazio delle fasi è molto piccola.

In pratica, gli effetti quantistici diventano rilevanti in condizioni di bassa temperatura (perché la lunghezza d'onda di De Broglie diventa molto grande) o di altissima densità (perché diminuisce la distanza media tra le particelle). Gli elettroni, a parità di temperatura, risentono degli effetti quantistici a densità minori rispetto agli ioni idrogeno e elio in virtù della massa molto minore (e quindi lunghezza d'onda associata maggiore). Per questo motivo troveremo una condizione di classicità per il gas di elettroni: se questa condizione sarà verificata, sicuramente tutto il plasma sarà descrivibile in termini classici.

Il parametro da tener presente è dunque:

$$a = \frac{\lambda_{dB}}{(V/N_e)^{(1/3)}} \tag{1.15}$$

Dove N_e è il numero di elettroni.

La condizione $a \ll 1$, corrispondente a un comportamento classico, si può riscrivere, esplicitando λ in funzione di T e V/N in funzione di ρ, nel seguente modo:

$$\rho \ll \frac{\mu_e m(^1\mathrm{H})(2 m_e k_B T)^{(3/2)}}{h^3} \tag{1.16}$$

dove μ_e è la massa media associata ad ogni elettrone, sempre espressa in termini della massa dell'idrogeno (in formule la definizione è $\mu_e = \sum_i A_i/(X_i Z_i)$). Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$\rho \ll 4,5 \cdot 10^{-10} T^{(3/2)} g/cm^3 \tag{1.17}$$

Questa condizione non è soddisfatta rigorosamente in molti interni stellari. Ad esempio il centro del Sole ($T_6 \approx 15$) corrisponderebbe a $\rho \ll 26$ g/cm^3 (mentre in realtà si ha $\rho \approx 150$ g/cm^3). In effetti nel centro del Sole il parametro definito dalla (1.15) risulta $\sim 1,4$ (infatti $\lambda_{dB} \sim 0,034\,\mathrm{nm}$ e $d_{media} \sim 0,023\,\mathrm{nm}$).

Che cosa significa questo? Lo spazio delle fasi è quantizzato, quindi in ogni intervallo di energia $[E, E+dE]$ esiste un numero finito di stati accessibili. Per il principio di esclusione di Pauli, ogni stato non può essere occupato da più di un elettrone. Se la densità è troppo grande, la distribuzione di Maxwell-Boltzmann prevederebbe occupazioni troppo grandi dei domini di energia più bassi, che sarebbero incompatibili con il principio di Pauli. Ciò fa sì che una frazione di elettroni degenerino ovvero vadano ad occupare energie più alte di quelle previste dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann. In questo modo la pressione risulta maggiore di quella data dalla (1.4), e la correzione è chiamata pressione di degenerazione.

Quando il parametro (1.15) diventa molto maggiore di 1, siamo nella situazione estrema di completa degenerazione: nello spazio degli impulsi le particelle occupano uniformemente tutti gli stati possibili fino all'*impulso di Fermi*, mentre per implusi più grandi l'occupazione è 0. Il gas fermionico si trova nello stato fondamentale.

In una situazione di questo tipo l'equazione di stato del gas perfetto non può essere applicata; ad esempio, per un plasma di carbonio e ossigeno con $\rho \sim 10^7\,\mathrm{g/cm^3}$ e $T_6 = 10$, la pressione del gas elettronico risulta, usando la corretta equazione di stato del gas di Fermi degenere [9]:

$$P = \frac{\hbar^2 (3\pi^2)^{(2/3)}}{5m_e} \left(\frac{N_e}{V}\right)^{(5/3)} = 1,4 \cdot 10^{23}\,\mathrm{Pa} \tag{1.18}$$

dove N_e/V è la densità numerica di elettroni. Il disaccordo con l'equazione del gas perfetto classico (che darebbe $P = 4,1 \cdot 10^{20}\,\mathrm{Pa}$) è di ben 3 ordini di grandezza.

Per gli interni stellari delle stelle di sequenza principale di massa maggiore a quella solare, siamo al limite tra trattazione classica e quantistica (a prende valori vicini a 1); assumeremo che in esse le particelle costituenti il plasma, per maggiore semplicità dei calcoli, obbediscano alla distribuzione di Maxwell-Boltzmann e all'equazione di stato del gas perfetto classico. Questa distribuzione diventa sempre meno applicabile al diminuire della massa della stella (e quindi all'aumentare della densità centrale); diviene inoltre – come abbiamo visto – inaccettabile nelle fasi conclusive della vita stellare.

Per quanto riguarda gli effetti relativistici, abbiamo due casi. Per un gas di elettroni non degenere, la situazione non relativistica si ha per

$$kT \ll m_e c^2 \Rightarrow T \ll 10^9\,\mathrm{K} \tag{1.19}$$

cioè quando l'energia termica media per costituente è piccola rispetto alla energia di massa. Questa condizione è sempre verificata, tranne nelle fasi evolutive avanzate di stelle molto massive.

Per un gas degenere, bisogna che l'energia di Fermi (l'energia più alta a cui si spingono gli elettroni degeneri) sia molto minore dell'energia di massa:

$$E_{fermi} \ll m_e c^2 \Rightarrow \rho \ll 10^6\mathrm{g/cm^3} \tag{1.20}$$

Tali densità vengono raggiunte in fasi evolutive particolari, come ad esempio la fase di gigante rossa e quella di nana bianca.

E' riportata nella figura (1.1), a scopo riassuntivo, un piano $log(T) - log(\rho)$ in cui sono evidenziate le regioni in cui sono rilevanti effetti coulombiani, quantistici e relativistici.

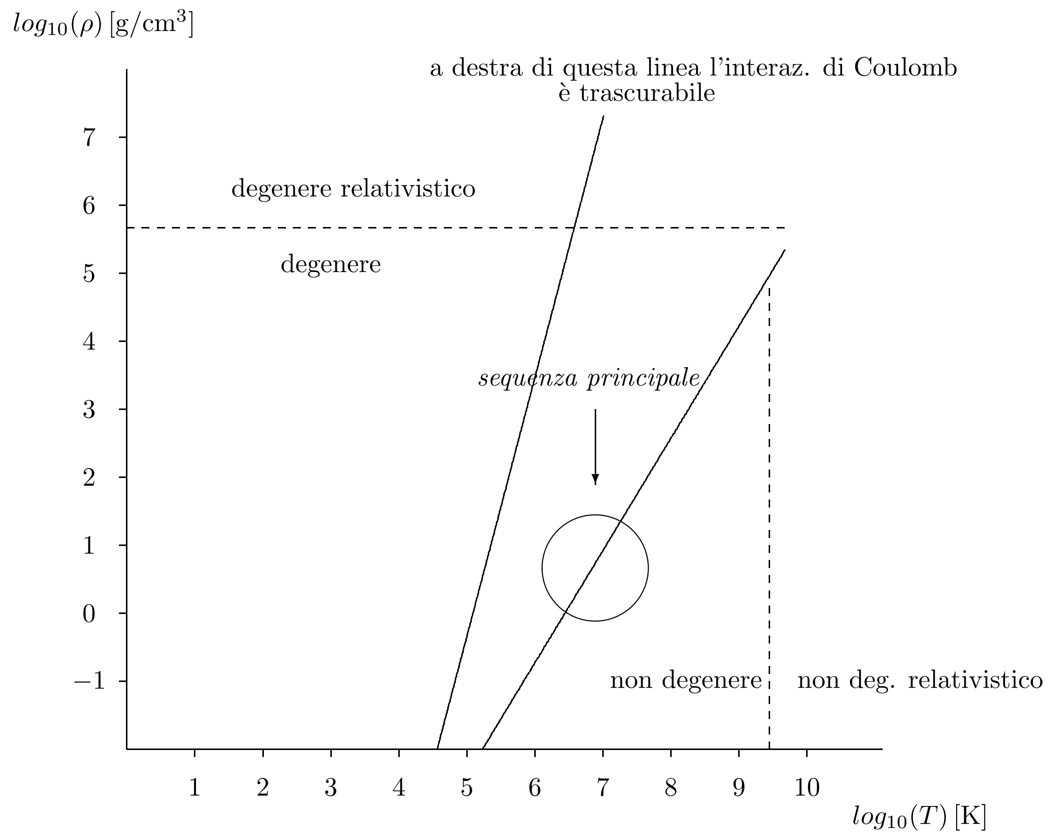

Figura 1.1: Regioni di densità e temperatura in cui si manifestano effetti coulombiani, quantistici e relativistici in un plasma stellare composto di solo idrogeno; adattata da [6]

1.2 Introduzione alle reazioni nucleari stellari

1.2.1 L'energia liberata e il Q-valore

La quantità di energia che il Sole emette in un secondo è circa $4 \cdot 10^{33}$erg. Una delle questioni più problematiche per gli astrofisici dell'inizio del XX secolo era spiegare il meccanismo che sviluppasse una potenza tanto elevata. Appariva chiaro che la fonte non poteva essere semplicemente la liberazione di energia gravitazionale dovuta alla progressiva contrazione della struttura. Infatti, se così fosse, supponendo come situazione di partenza la nube rarefatta e fredda che ha dato origine al Sole ($U_{grav} \sim 0$), come situazione finale quella attuale ($U_{grav} \sim GM^2/R$), e considerando costante nel tempo la luminosità L (assunzione giustificata da evidenze geologiche), il Sole dovrebbe avere un'età

$$t_k = \frac{GM^2}{LR} = \frac{7 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^{66}}{4 \cdot 10^{33} 7 \cdot 10^{10}} \sim 3 \cdot 10^7 \,\text{anni} \tag{1.21}$$

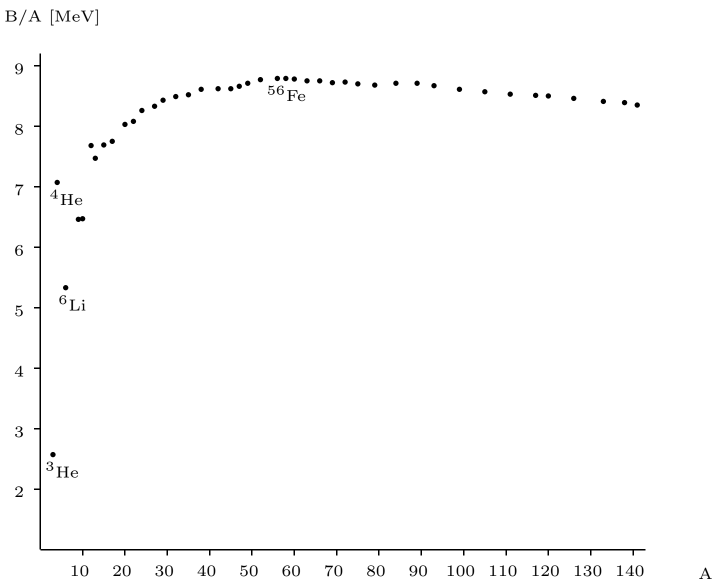

Figura 1.2: Energia di legame per nucleone di alcuni nuclei stabili; dati tratti da [13]

Questo tempo, chiamato tempo di Kelvin, differisce di diversi ordini di grandezza dalle evidenze geologiche che portano a calcolare un'età del Sistema Solare dell'ordine di 4,6 miliardi di anni.

Argomenti di questo genere portarono Eddington a formulare, nel 1920, l'ipotesi che la fonte energetica primaria di una stella fossero le reazioni nucleari. Fu però dopo l'avvento della meccanica quantistica e i progressi della fisica nucleare che si arrivò – verso la fine degli anni '30 – a una trattazione quantitativa del problema.

Oggi è ampiamente noto che la produzione di energia nelle stelle come il Sole avviene attraverso una catena di processi (che verranno descritti in dettaglio nel capitolo successivo) il cui risultato finale è la trasformazione di quattro nuclei di idrogeno (protoni) in un nucleo di elio:

$$4\,{}^{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}\,\mathrm{He} + 2\nu_{\mathrm{e}} + 2\mathrm{e}^{+} \tag{1.22}$$

Questo, così come altri processi che avvengono in fasi successivi dell'evoluzione stellare, è un esempio di *fusione nucleare.*

Per capire perché questi processi portano a una liberazione di energia, osserviamo la figura (1.2) che mostra l'energia di legame per nucleone di tutti gli isotopi stabili, ordinati per numero di massa crescente. In essa si nota che l'energia di legame per nucleone prende i valori massimi per i nuclei del cosiddetto “gruppo del ferro”; in particolare l'isotopo più legato risulta essere il ^{62}Ni.

Appare chiaro che, se prendiamo due nuclei X e Y nel ramo ascendente del grafico e consideriamo, ad esempio, la reazione $^{A1}\mathrm{X} +^{A2}\mathrm{Y} \rightarrow^{A1+A2}\mathrm{C}$ l'energia di legame complessiva dei prodotti è maggiore di quella dei reagenti: la differenza viene quindi liberata.

La tabella in esame mostra anche come, per gli elementi del ramo discendente, il modo per avere reazioni esoenergetiche è la *fissione* di un nucleo pesante in due nuclei più leggeri, più fortemente legati.

Vediamo di definire in modo quantitativo questi concetti; in una generica reazione nucleare

$$\mathrm{R_1} + ... + \mathrm{R_n} \rightarrow \mathrm{P_1} + ... + \mathrm{P_m} \tag{1.23}$$

è uso indicare con Q l'energia liberata dalla reazione (o assorbita, in caso di segno negativo). Il Q è definito nel seguente modo:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} M(\mathrm{R_i}) - \sum_{i=1}^{m} M(\mathrm{P_i}) \tag{1.24}$$

Dato che i reagenti e i prodotti sono nuclei, per i quali la massa è uguale alla somma delle masse dei costituenti meno l'energia di legame B, possiamo anche scrivere:

$$Q = \sum_{i=1}^{m} B(\mathrm{P_i}) - \sum_{i=1}^{n} B(\mathrm{R_i}) \tag{1.25}$$

Questa relazione è vera a rigore solo nelle reazioni che non comportano trasformazioni di neutroni in protoni o viceversa: solo in questo caso si cancellano la somma delle masse dei nucleoni che compongono i nuclei reagenti con la somma delle masse dei nucleoni dei nuclei formati nella reazione

Visto che i reagenti, prima di entrare in interazione, sono particelle libere, così come i prodotti una volta che sono usciti dall'interazione, possiamo scrivere – sia per lo stato iniziale che per quello finale – l'energia del sistema come somma delle energie di massa dei costituenti e delle energie cinetiche.

$$E = \sum_{i} M(\mathrm{R_i}) + \sum_{i} T(\mathrm{R_i}) = \sum_{i} M(\mathrm{P_i}) + \sum_{i} T(\mathrm{P_i}) \tag{1.26}$$

La conservazione dell'energia ci porta a dedurre che l'energia liberata da una reazione esotermica, dovuta al passaggio da un sistema meno legato a uno più legato, viene rilasciata sotto forma di energia cinetica dei prodotti:

$$Q = \sum_{i=1}^{m} T(\mathrm{P_i}) - \sum_{i=1}^{n} T(\mathrm{R_i}) \tag{1.27}$$

Osserviamo per concludere che, siccome le quantità effettivamente misurate sono le masse atomiche e non quelle nucleari, il Q definito dalla (1.24) è in effetti una differenza di masse *atomiche*. Ad esempio nella reazione (1.22) per calcolare il Q "aggiungiamo" 4 elettroni a destra e a sinistra in modo da avere a sinistra 4 atomi di idrogeno e a destra 4 atomi di elio (i due positroni cancellano due elettroni). In questo modo il Q è semplicemente

$$Q = 4 \cdot M_{atomica}(^{1}\mathrm{H}) - M_{atomica}(^{4}\mathrm{He}) \tag{1.28}$$

e tiene automaticamente conto del fatto che i due positroni annichilano con gli elettroni presenti nel plasma aumentando in questo modo l'energia prodotta nella reazione.

In realtà, come vedremo meglio più avanti, i neutrini si "portano via" parte del Q in quanto sfuggono dalla stella senza interagire in modo apprezzabile con la materia; in questo modo l'energia efficace effettivamente disponibile è un po' inferiore a quella calcolata con la formula (1.28).

1.2.2 Definizione di sezione d'urto. Reaction rate.

La sezione d'urto è la grandezza fisica che dà una misura quantitativa della probabilità che avvenga una data reazione nucleare.

Supponiamo di avere una reazione a due corpi tra due nuclei A e B:

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{P_1} + ... + \mathrm{P_n} \tag{1.29}$$

Siano N_a e N_b le densità numeriche (espresse in $nuclei/cm^3$) dei nuclei, rispettivamente di specie A e B, che hanno velocità relativa v. Sia inoltre r_{ab} il numero di reazioni del tipo considerato che avvengono nell'unità di volume e nell'unità di tempo. Allora la sezione d'urto $\sigma(v)$ è definita dalla relazione seguente:

$$r_{ab} = N_a \cdot N_b \cdot v\sigma(v) \tag{1.30}$$

e risulta avere le dimensioni di un'area. Usualmente questa grandezza si esprime in barn. 1 barn equivale a 100 fermi quadrati.

Se le particelle di tipo A e B sono identiche l'espressione precedente è moltiplicata per 1/2. La formula generale può essere scritta come segue:

$$r_{ab} = \frac{1}{1+\delta_{ab}} \cdot N_a \cdot N_b \cdot v\sigma(v) \tag{1.31}$$

Poiché non tutte le coppie di particelle hanno la stessa velocità relativa v, se $\phi(v)$ è la funzione di distribuzione delle velocità termiche, normalizzata a 1:

$$\int_0^\infty \phi(v)\mathrm{d}v = 1 \tag{1.32}$$

allora il reaction rate per unità di volume si scrive

$$r_{ab} = \frac{1}{1+\delta_{ab}} N_a \cdot N_b \cdot \langle v\sigma(v)\rangle \tag{1.33}$$

dove

$$\langle v\sigma(v)\rangle = \int_0^\infty v\sigma(v)\phi(v)\mathrm{d}v \tag{1.34}$$

Nel caso dell'interno stellare, siccome sia le particelle A che le B sono distribuite secondo una distribuzione di Maxwell-Boltzmann, è facile vedere che anche la distribuzione relativa delle velocità è anch'essa una Maxwelliana, in cui compare come parametro m_r, la massa ridotta. Riportiamo qui sotto la legge di distribuzione, normalizzata a 1, espressa in funzione della velocità relativa v e dell'energia cinetica relativa $m_r v^2/2$.

$$\phi(v)\mathrm{d}v = \mathrm{d}v \left(\frac{m_r}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 4\pi v^2 \cdot \exp\left(-\frac{m_r v^2}{2kT}\right) \tag{1.35}$$

$$\phi(E)\mathrm{d}E = \mathrm{d}E \frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{(kT)^{\frac{3}{2}}} \cdot E^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \tag{1.36}$$

Usando la (1.36) possiamo scrivere il reaction rate per coppia di particelle nel modo che segue:

$$\langle v\sigma(v)\rangle = \left(\frac{8}{\pi m_r}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{(kT)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_0^\infty E\sigma(E)\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)\mathrm{d}E \tag{1.37}$$

Un'altra grandezza di uso frequente è il numero di reazioni per unità di massa e di tempo, R_{ab}.

$$R_{ab} = \frac{r_{ab}}{\rho} \tag{1.38}$$

Sfruttando la relazione tra densità numerica e abbondanza:

$$X_i = \frac{N_i A_i m_H}{\rho} \tag{1.39}$$

la (1.38) si può riscrivere come segue:

$$R_{ab} = \frac{1}{1+\delta_{ab}}\rho\frac{X_a X_b}{A_a A_b}\frac{1}{m_H^2} \cdot \langle v\sigma(v)\rangle \tag{1.40}$$

Si può anche definire la *produzione di energia per unità di massa e di tempo*, moltiplicando la quantità definita sopra per il Q della reazione. La grandezza così ottenuta si indica con ϵ:

$$\epsilon = Q \cdot R_{ab} \tag{1.41}$$

1.3 Calcolo del reaction rate in assenza di risonanze

1.3.1 La barriera coulombiana

Per calcolare tutte le grandezze definite nel paragrafo precedente è chiaramente necessario conoscere l'andamento della sezione d'urto σ in funzione dell'energia cinetica E del moto relativo dei reagenti.

Un effetto molto importante da tener presente per questo scopo è la barriera coulombiana: gli oggetti che reazionano nel plasma stellare sono ioni carichi positivamente, e quindi per entrare nel range di azione delle interazioni nucleari e dar luogo a processi di fusione devono superare la repulsione elettrostatica che tende a separarli.

Prendiamo come esempio la reazione tra due ioni idrogeno (p + p); nella figura (1.3) abbiamo tracciato il grafico del potenziale d'interazione per un urto frontale ($\ell = 0$): il pozzo causato dall'interazione forte si estende fino alla distanza $R_n \approx 2 \cdot R_p$, dove R_p è il raggio dell'atomo di idrogeno (circa $1,3\,\mathrm{fm}$), mentre a distanze relative maggiori abbiamo il semplice potenziale elettrostatico. L'altezza E_c della barriera Coulombiana per un urto pp è quindi:

$$E_c = \frac{e^2}{R_n} = 550\,\mathrm{keV} \tag{1.42}$$

Ovviamente, per qualsiasi altra reazione tra ioni positivi l'altezza della barriera sarà ancora superiore.

Ricordiamo, per renderci conto di quanto sia notevole questo valore, che a una temperatura $T_6 = 10$ (d'ora in poi useremo le notazioni T_6 e T_9 per indicare la temperatura espressa in milioni e miliardi di Kelvin rispettivamente) l'energia media di un costituente è di soli $0,86\,\mathrm{keV}$.

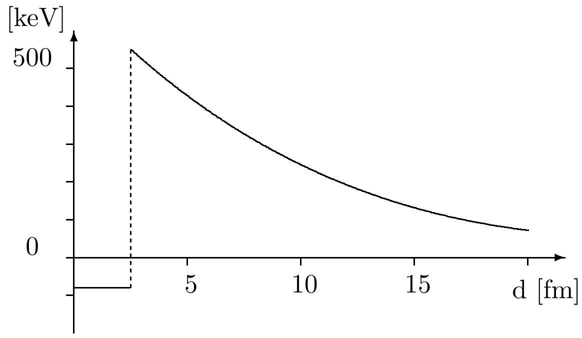

Figura 1.3: Energia potenziale di interazione tra due protoni che si urtano frontalmente, in funzione della loro distanza (vedere testo)

E' interessante quindi calcolare quanti sono i protoni presenti in un plasma stellare (che supporremo composto solo di idrogeno, con $T_6 = 10$) che possiedono un'energia maggiore di 550 keV, necessaria – secondo la fisica classica – per attraversare la barriera Coulombiana.

Integrando numericamente la (1.36) tra E_c e ∞ si ottiene la frazione di particelle con $E \geq E_c$:

$$f(E \geq E_c = 550\,\mathrm{keV}) = \frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{(0,86)^{\frac{1}{2}}} \int_{550}^{\infty} \sqrt{E} \exp\left(-\frac{E}{0,86}\right) \mathrm{d}E \sim 10^{-277} \tag{1.43}$$

Considerando che, per esempio, il Sole contiene un numero di nucleoni dell'ordine di $M_{Sole}/M_{protone} \sim 10^{57}$, appare chiaro che la trattazione classica non è adeguata per la descrizione del fenomeno.

In realtà, la percentuale di nuclei di idrogeno che passano attraverso la barriera coulombiana e arrivano a reazionare è di gran lunga maggiore di quella appena calcolata. Ciò è dovuto al fenomeno conosciuto con il nome di "effetto tunnel": la Meccanica Quantistica prevede infatti l'esistenza di una probabilità diversa da 0 che venga superata una barriera di potenziale più alta dell'energia totale della particella incidente.

Se consideriamo una reazione tra due ioni positivi con carica rispettivamente $Z_i e$ e $Z_j e$, l'andamento del potenziale ricalca quello della figura (1.3). Chiamiamo R_c il punto di inversione del moto classico:

$$R_c = \frac{Z_i Z_j e^2}{E} \tag{1.44}$$

(a un'energia di $1,3\,\mathrm{keV}$, si ottiene per $Z_i = Z_j = 1$ un valore di circa 1076 fm, molto maggiore di R_n)

La probabilità cercata è allora il rapporto tra i moduli quadri della funzione d'onda calcolata rispettivamente in R_n e R_c. La soluzione esatta dell'equazione di Schrodinger porta ad un'espressione

Energia [keV]	Calcolo esatto	Calcolo approssimato
1	$8,9 \cdot 10^{-10}$	$2,5 \cdot 10^{-10}$
2	$5,6 \cdot 10^{-7}$	$1,6 \cdot 10^{-7}$
5	$1,7 \cdot 10^{-4}$	$5,0 \cdot 10^{-5}$
10	$3,1 \cdot 10^{-3}$	$9,2 \cdot 10^{-4}$
50	0.14	0.04
100	0.35	0.11
200	0.64	0.21
500	0.99	0.37
550	1.00	0.39

Tabella 1.1: Probabilità di attraversamento della barriera coulombiana tra 2 protoni in funzione dell'energia nel centro di massa. E' mostrata la differenza tra i risultati del calcolo esatto e quello approssimato della formula (1.45) [14]

esatta alquanto complicata che, nel caso $E \ll E_c$ (cioè $R_n \ll R_c$, come nel nostro caso) può essere ridotta alla seguente [3]:

$$P_{tunnel} = \exp\left(-2\pi\eta\right) \tag{1.45}$$

dove η è così definito:

$$\eta = \frac{Z_i Z_j e^2}{\hbar v} = \frac{Z_i Z_j e^2}{\hbar}\left(\frac{m_r}{2E}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.46}$$

Riportiamo nella tabella seguente alcuni valori della probabilità di tunnelling per un urto frontale tra due ioni idrogeno, in funzione dell'energia cinetica del moto relativo (valori calcolati usando sia la formula approssimata 1.45 che la formula esatta):

E' interessante tenere presente che a $T_6 = 10$ il 98% degli ioni ha un'energia compresa tra 50 eV e 5 keV, per cui per la grandissima maggioranza delle particelle la probabilità di tunnelling è comunque molto bassa ed è questo il motivo per cui la combustione di idrogeno nel Sole ha tempi dell'ordine di miliardi di anni.

1.3.2 Lo schermaggio elettronico

I nuclei carichi positivamente che danno luogo alle reazioni di fusione sono immersi in un gas elettronico. Gli elettroni, a causa dell'attrazione elettrostatica, tendono ad addensarsi intorno agli ioni positivi, schermando in questo modo la loro carica e favorendo la penetrazione della barriera da parte degli ioni circostanti.

Se ϕ è il potenziale elettrostatico presente in un punto dello spazio, la densità numerica degli ioni e degli elettroni risulta deviata dai rispettivi valori medi $\bar{n}_i$ e $\bar{n}_e$ nel seguente modo:

$$n_i = \bar{n}_i exp\left(-\frac{Z_i e\phi}{kT}\right) \approx \bar{n}_i\left(1 - \frac{Z_i e\phi}{kT}\right) \tag{1.47}$$

$$n_e = \bar{n}_e exp\left(\frac{e\phi}{kT}\right) \approx \bar{n}_e \left(1 + \frac{e\phi}{kT}\right) \tag{1.48}$$

In questo modo la densità di carica risulta:

$$\rho_{carica} = \sum_i (Z_i e) n_i - e n_e = \sum_i -\frac{Z_i^2 e^2 \phi}{kT}\bar{n}_i - \frac{e^2\phi}{kT}\bar{n}_e = -\chi\frac{e^2\phi}{kT}n \tag{1.49}$$

dove abbiamo introdotto la densità numerica totale di particelle n e il fattore χ:

$$\chi = \left(\sum_i Z_i^2 \bar{n}_i + \bar{n}_e\right)/n \tag{1.50}$$

Ma la densità di carica e il potenziale sono legate anche dall'equazione di Poisson $\nabla^2\phi = -4\pi\rho_{carica}$; intorno a un generico ione si assume simmetria sferica e la parte radiale si può scrivere:

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2(r\phi)}{\mathrm{d}r^2} = -4\pi\rho_{carica} \tag{1.51}$$

Sostituendo nell'equazione (1.51) la ρ_{carica} data dalla (1.49) e risolvendo, si ottiene che il potenziale elettrostatico intorno a un generico ione è

$$\phi = \frac{Ze}{r}exp(-r/r_D) \approx \frac{Ze}{r} - \frac{Ze}{r_D} \tag{1.52}$$

dove abbiamo definito la distanza di Debye-Hückel:

$$r_D = \left(\frac{kT}{4\pi\chi e^2 n}\right)^{(1/2)} \tag{1.53}$$

Il potenziale ottenuto nella (1.52) ci dice che gli elettroni tendono a disporsi su superfici sferiche poste a distanza r_D da ogni ione; fuori da queste superfici il potenziale è praticamente nullo, dentro è all'incirca l'usuale potenziale coulombiano diminuito di un termine costante. La barriera risulta abbassata di una quantità

$$E_D = \frac{Z_i Z_j e^2}{r_D} \tag{1.54}$$

e di conseguenza sia la probabilità di attraversamento sia il tasso di reazioni sono più alti di quelli calcolati senza tener conto dell'effetto schermante degli elettroni. L'effetto dello schermaggio sul reaction rate può essere quantificato sostituendo E con $E - E_D$ nella formula (1.37); risulta che il reaction rate schermato è uguale a quello non schermato moltiplicato per un fattore f così definito:

$$f = exp\left(\frac{E_D}{kT}\right) \tag{1.55}$$

Consideriamo il caso del nucleo del Sole ($T_6 \approx 15$, $\rho \approx 150\,\mathrm{g/cm^3}$) e la reazione tra due atomi di idrogeno. In questo caso risulta $r_D \sim 10^{-8}\,\mathrm{cm}$ e $f = 1,03$.

Reazione	Tipo interazione	Energia dei reagenti	σ
$^{15}\mathrm{N}(\mathrm{p},\alpha)^{12}\mathrm{C}$	forte	2 MeV	0.5 b
$^{3}\mathrm{He}(\alpha,\gamma)^{7}\mathrm{Be}$	elettromagnetica	2 MeV	10^{-6} b
$\mathrm{p}(\mathrm{p},\mathrm{e}^{+},\nu)\mathrm{p}$	debole	2 MeV	10^{-20} b

Tabella 1.2: Valori tipici di sezioni d'urto [14]

1.3.3 Il picco di Gamow

Con le notazioni finora introdotte, e trascurando l'effetto schermante degli elettroni, la $\sigma(E)$ può essere scritta nel modo seguente:

$$\sigma(E) = P_n \cdot \exp(-2\pi\eta) \tag{1.56}$$

Dove P_n rappresenta la probabilità che, una volta superata la barriera coulombiana, la reazione abbia effettivamente luogo. Ovviamente per calcolare P_n occorre specificare quale interazione è responsabile della reazione (forte, debole o elettromagnetica) e i dettagli dell'interazione stessa.

Il tipo di interazione incide in modo determinante sull'ordine di grandezza di P_n e quindi sul valore finale di $\sigma(E)$. Alcuni esempi sono riportati nella tabella (1.2).

Qualunque sia l'interazione, è caratteristica la dipendenza da $1/E$, per cui si suole separare questo termine e racchiudere tutta l'informazione relativa alla specifica reazione nel termine chiamato *fattore astrofisico*, $S(E)$ definito dalla relazione che segue:

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} \cdot \exp(-2\pi\eta) \tag{1.57}$$

Così, il tasso di reazione per coppia di particelle si scrive in modo espressivo nel seguente modo:

$$\langle v\sigma(v)\rangle = \left(\frac{8}{\pi m_r}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{(kT)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_0^\infty S(E) \exp\left(-\frac{E}{kT} - \sqrt{\frac{E_G}{E}}\right) \mathrm{d}E \tag{1.58}$$

dove abbiamo definito l'energia di Gamow E_G come

$$E_G = \frac{2m_r \pi^2 e^4 Z_a^2 Z_b^2}{\hbar^2} \tag{1.59}$$

E' importante far notare che la formula (1.58) è vera per nuclei non schermati; se le condizioni sono tali da rendere significativo l'effetto dello schermaggio elettronico, occorre moltiplicare per l'opportuno fattore correttivo che abbiamo descritto nel paragrafo 1.3.2.

L'integrando della (1.58) consiste – a parte il fattore astrofisico, debolmente dipendente dall'energia – nel prodotto di due esponenziali, uno che nasce dalla Maxwelliana e uno dalla probabilità di effetto tunnel. Questo prodotto ha un andamento caratteristico che riportiamo nella figura (1.4).

L'energia per la quale l'integrando prende il valore massimo è indicata con E_0, e il picco caratteristico che disegna la funzione intorno a E_0 è detto *picco di Gamow.* :

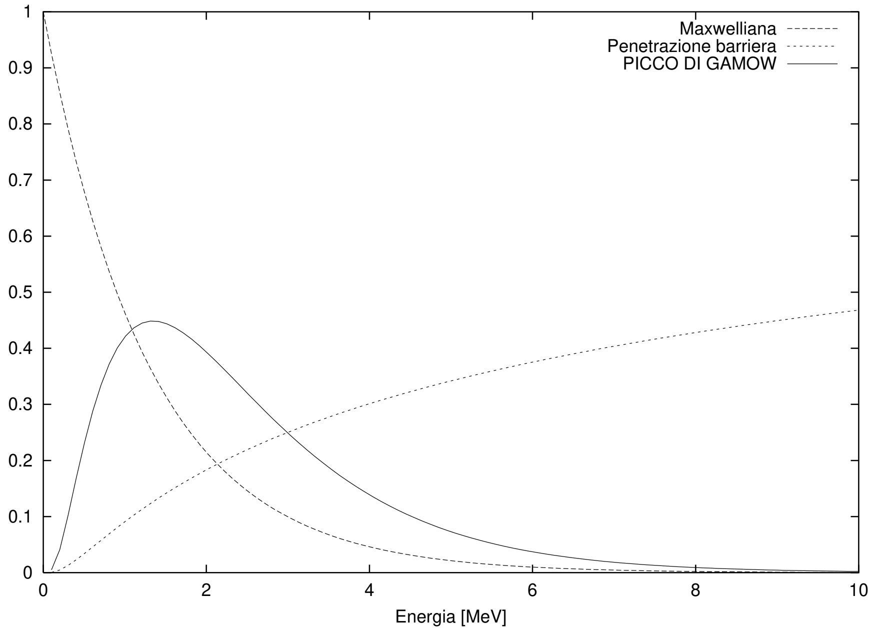

Figura 1.4: Dipendenza dall'energia cinetica delle particelle incidenti dell'integrando della (1.58), relativo alla reazione tra due protoni.

$$E_0 = \left(\frac{\sqrt{E_G} kT}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \tag{1.60}$$

Solo una ristretta finestra intorno alla E_0 contribuisce all'integrale: sono dunque solo le particelle con energia cinetica prossima a questo valore che danno luogo alle reazioni nucleari.

Per calcolare la (1.58), dato che – per le reazioni non risonanti – il fattore astrofisico non varia in modo significativo in questo intervallo, lo si porta fuori dall'integrale come $S(E_0)$; è inoltre comodo approssimare la funzione integranda con una Gaussiana:

$$\exp\left(-\frac{E}{kT} - \sqrt{\frac{E_G}{E}} \right) \approx I_0 \exp\left[-\left(\frac{E - E_0}{\Delta/2} \right)^2 \right] \tag{1.61}$$

aggiustando opportunamente i parametri I_0 e Δ, la larghezza della finestra efficace.

In realtà, quando si deve fare un calcolo preciso, quello che si porta fuori dall'integrale non è esattamente $S(E_0)$, ma un S_{eff}. Essendo S una funzione debolmente dipendente dall'energia, per calcolare il suo valore a basse energie in funzione di $S(0)$ si può usare il polinomio di Taylor:

$$S(E) \approx S(0) + S'(0)E + \frac{1}{2} S''(0)E^2 \tag{1.62}$$

dove

$$S'(0) = \left.\frac{\mathrm{d}S(E)}{\mathrm{d}E}\right|_{E=0}$$

e

$$S''(0) = \left.\frac{\mathrm{d}^2S(E)}{\mathrm{d}E^2}\right|_{E=0}$$

Inserendo questa approssimazione nella (1.58), l'integrale si spezza in una somma di tre integrali. Usando l'approssimazione (1.61) gli integrali possono essere valutati e si arriva a definire S_{eff}.

Riportiamo il risultato finale di questi calcoli [14]:

$$\langle v\sigma(v)\rangle = \left(\frac{2}{m_r}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Delta}{(kT)^{\frac{3}{2}}} S_{eff} \exp\left(-\frac{3E_0}{kT}\right) \tag{1.63}$$

dove S_{eff} è così definito:

$$S_{eff} = S(0) \cdot \left\{ 1 + \frac{5kT}{36E_0} + \frac{S'(0)(E_0 + \frac{35}{36}kT)}{S(0)} + \frac{S''(E_0)}{S(0)}\left(\frac{E_0}{2} + \frac{89}{72}kT\right) \right\} \tag{1.64}$$

Usualmente il numero puro $3E_0/kT$ si indica con τ:

$$\tau = \left(\frac{27\pi^2 e^4 m_r Z_a^2 Z_b^2}{2\hbar^2 kT}\right)^{(1/3)} = 42,46 \cdot (Z_a^2 Z_b^2 (m_r/m_H) T_6^{-1})^{(1/3)} \tag{1.65}$$

Esprimendo S_{eff} in keV b, la (1.63) si scrive [8], in funzione di τ:

$$\langle v\sigma(v)\rangle = 7,207 \cdot 10^{-19} \cdot \frac{S_{eff}}{Z_a Z_b (m_r/m_H)} \cdot \tau^2 e^{-\tau}\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s} \tag{1.66}$$

E' conveniente esplicitare la dipendenza dalla temperatura dall'equazione appena scritta. In un intorno di una T_0 di riferimento, l'andamento può essere approssimato con una legge di potenza:

$$\langle v\sigma(v)\rangle_T = \langle v\sigma(v)\rangle_{T_0} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\nu} \tag{1.67}$$

dove l'esponente ν è chiaramente

$$\nu = \left.\frac{\mathrm{d}ln(\langle v\sigma(v)\rangle)}{\mathrm{d}ln(T)}\right|_{T=T_0} \tag{1.68}$$

Essendo $ln(\langle v\sigma(v)\rangle) = cost. + 2ln\tau - \tau$ e $lnT = cost. - 3ln\tau$ si ottiene $\nu = \tau/3 - 2/3$ e quindi la legge di potenza risulta:

$$\langle v\sigma(v)\rangle \propto T^{(\tau/3-2/3)} \tag{1.69}$$

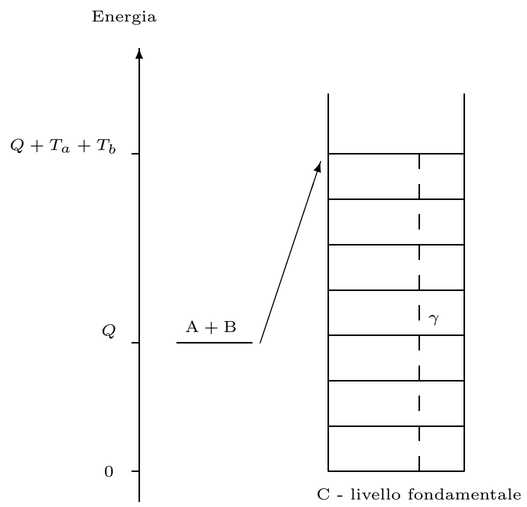

Figura 1.5: Reazione $\mathrm{A} + \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{C} + \gamma$ secondo il modello del nucleo composto. Sulla destra sono schematicamente rappresentati i livelli energetici del nucleo C: il livello eccitato con energia $Q + T_a + T_b$ è responsabile dalla risonanza, e decade al fondamentale tramite emissione di un fotone. Adattato da [14]

In questa espressione notiamo che se $\tau > 3$ (cioè $E_0 > kT$), come avviene in tutti i casi, il tasso di reazioni cresce con la temperatura come ci aspettiamo da un ragionamento intuitivo (la Maxwelliana si sposta verso energie maggiori dove la probabilità di passare la barriera coulombiana è maggiore). Osserviamo anche che il tasso decresce con la carica degli ioni in gioco perché per ioni con carica maggiore la barriera è più alta.

Prendendo come esempio la reazione $\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{d} + \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e}$ a $T_6 = 15$, si ha $E_0 = 5,9\,\mathrm{keV}$ e $\Delta = 6,4\,\mathrm{keV}$. In questo caso la finestra di cui abbiamo parlato non è affatto ristretta: tra 0 e $12,9$ keV sta la quasi totalità delle particelle. Per quasi tutte le reazioni che coinvogono ioni più pesanti essa tende però a restringersi: alla stessa T la reazione $\alpha +^{12}$ O ha $E_0 = 56\,\mathrm{keV}$ e $\Delta = 20,6\,\mathrm{keV}$. In questo caso nell'intervallo efficace sta una frazione di particelle pari a circa 10^{-17}.

1.4 Reazioni risonanti

Nel paragrafo precedente abbiamo considerato il caso in cui la variazione di σ rispetto all'energia è dovuta principalmente alla dipendenza $1/E$ e al fattore di penetrazione della barriera $exp(-2\pi\eta)$, mentre il fattore $S(E)$ – che contiene l'informazione sulla interazione – varia molto lentamente con E.

Questo non è vero per le cosiddette *reazioni risonanti*, in cui l'andamento della sezione d'urto presenta picchi molto pronunciati in corrispondenza di precisi valori dell'energia.

Il motivo per cui si osservano queste risonanze risiede nel meccanismo di reazione: spesso i nuclei, invece di reagire direttamente, formano un *nucleo composto* in uno stato eccitato che subito si scinde negli effettivi prodotti della reazione o decade allo stato fondamentale per emissione gamma (in questo caso la reazione è detta di cattura radiativa).

Quando l'energia cinetica dei reagenti nel centro di massa, sommata al Q della reazione, è molto prossima all'energia di uno dei livelli del nucleo composto, come si vede in figura, la sezione d'urto diventa molto grande: siamo in zona di risonanza.

Le risonanze di interesse sono naturalmente quelle che si presentano per energie racchiuse nella "finestra di Gamow", dipendente dalla temperatura. Quelle presenti a energie molto distanti da questa regione non influenzano in modo rilevante il reaction rate.

Consideriamo una reazione tra due nuclei A e B, con una unica risonanza, che da' luogo al nucleo composto C* in uno stato eccitato. Supponiamo che il nucleo composto abbia, tra i canali di decadimento, la scissione nei nuclei leggeri D ed E.

L'andamento caratteristico di σ per la reazione considerata è dato allora dalla formula di Breit-Wigner:

$$\sigma_{BW}(E) = \frac{\lambda_{dB}^2}{4\pi}\ \omega\ \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{(E-E_R)^2+(\Gamma/2)^2} \tag{1.70}$$

in cui abbiamo indicato con ω il seguente fattore

$$\omega = \frac{2J+1}{(2J_a+1)(2J_b+2)} \tag{1.71}$$

in cui J_a e J_b sono gli spin di A e B, J è il momento angolare totale del nucleo composto.

Nella formula di Breit-Wigner Γ è la larghezza del livello eccitato responsabile della risonanza; Γ_1 è l'ampiezza di probabilità relativa alla formazione del nucleo composto a partire da A e B (o, che è lo stesso, l'ampiezza di decadimento del medesimo in A e B, che darebbe luogo a uno scattering invece che alla reazione); Γ_2 è l'ampiezza relativa al decadimento del nucleo composto nel canale considerato. Se lo scattering e il canale di decadimento in D + E sono gli unici possibili, vale $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$.

Nel caso di un picco isolato il tasso di reazione si scrive:

$$\langle v\sigma(v)\rangle = \left(\frac{8}{\pi m_r}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{(kT)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_0^\infty \sigma_{BW}(E)E\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)\mathrm{d}E \tag{1.72}$$

Se il picco è molto stretto intorno all'energia di risonanza E_R la formula precedente si riduce a:

$$\langle v\sigma(v)\rangle = \left(\frac{8}{\pi m_r}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{(kT)^{\frac{3}{2}}} \cdot E_R\exp\left(-\frac{E_R}{kT}\right) \cdot \int_0^\infty \sigma_{BW}(E)\mathrm{d}E \tag{1.73}$$

Svolgendo l'integrale, otteniamo il tasso di reazione per coppia di particelle nel caso di singola risonanza:

$$\langle v\sigma(v)\rangle = \left(\frac{2\pi}{m_r kT}\right)^{\frac{3}{2}} \hbar^2\,\omega\,\gamma\,f\ \exp\left(-\frac{E_R}{kT}\right) \tag{1.74}$$

dove f è il fattore correttivo dovuto all'electron shielding, mentre con γ abbiamo indicato

$$\gamma = \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\Gamma} \tag{1.75}$$

Γ_1, essendo la probabilità di formazione del nucleo composto a partire da A e B, è dipendente dall'energia di A e B tramite il fattore di penetrazione, e di conseguenza lo è γ. Nella formula (1.74) si deve intendere il valore di γ calcolato all'energia di risonanza.

Capitolo 2

La combustione dell'idrogeno

2.1 Introduzione

La fusione dell'idrogeno è la sorgente di energia che mantiene le stelle in equilibrio idrostatico durante la maggior parte della loro vita.

Furono in particolare i lavori di Hans Bethe ([4] e [5]) che permisero di comprendere in dettaglio i meccanismi di reazione, la cui analisi è lo scopo di questo capitolo.

Abbiamo già accennato che il processo fondamentale è

$$4\,{}^{1}\mathrm{H} \rightarrow^{4} \mathrm{He} + 2\nu_{\mathrm{e}} + 2\mathrm{e}^{+} \tag{2.1}$$

ed è caratterizzato da un $Q \approx 26,73\,\mathrm{MeV}$.

Ci sono varie ragioni per cui la (2.1) è favorita, in particolare per l'elevatissima disponibilità di nuclei di idrogeno, che costituisce la maggior parte della massa di qualunque stella; inoltre le reazioni tra nuclei di idrogeno sono caratterizzate dalla barriera coulombiana più piccola possibile (per reazioni tra particelle cariche).

La reazione è fortemente esoenergetica poiché da' luogo a un elemento, l'elio 4, molto stabile. La stabilità dell'elio-4 è messa bene in evidenza dal grafico di figura (1.2), ed è dovuta al fatto che - con un numero di protoni e neutroni uguale a 2 - è uno di quei nuclei che viene chiamato doppiamente magico in quanto sia per i protoni che per i neutroni lo shell di valenza (il più esterno) è completo.

Tutti questi fattori fanno sì che la produzione di energia di una stella di sequenza sia interamente dovuta alla conversione di idrogeno in elio. Nel Sole, per il quale la potenza sviluppata è di $2,4 \cdot 10^{39}\,\mathrm{MeV/s}$, vengono prodotti $0,9 \cdot 10^{38}$ nuclei di elio al secondo, quindi la massa di idrogeno convertito in elio in 1 s è $6,16 \cdot 10^{11}$ Kg. Visto che la massa del Sole è $\sim 10^{30}$ Kg, il combustibile sarebbe sufficiente per 10^{11} anni. In realtà una stella come il Sole vive per un tempo inferiore di 1 ordine di grandezza, perché è solo la regione centrale - che contiene meno del 10% della totalità dell'idrogeno disponibile - che possiede temperature sufficienti per innescare la fusione.

La reazione di conversione di 4 protoni in un nucleo di elio non può però avvenire in un'unica fase, vista la probabilità enormemente bassa che si verifichi un urto a 4 corpi. In effetti avvengono, a seconda delle condizioni presenti nell'interno stellare, due distinte catene di eventi, che prendono il nome di catena pp e ciclo CNO.

2.2 Catena protone-protone

2.2.1 Produzione del deuterio

Dato che le reazioni a 3 e 4 corpi sono rarissime, la catena ha inizio nella quasi totalità dei casi con un urto tra 2 protoni.

Poiché un sistema legato di 2 protoni (elio-2) non esiste - o meglio decade praticamente subito nei 2 protoni che lo hanno originato - una reazione nucleare tra 2 nuclei di idrogeno non può procedere per mezzo dell'interazione forte o elettromagnetica. Esiste invece un sistema legato protone-neutrone (il deuterio): ma - perché esso si formi - un protone, durante l'urto, deve trasformarsi in neutrone, e questo processo non può che avvenire tramite l'interazione debole.

Si ha quindi la reazione

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{d} + \mathrm{e}^{+} + \nu_{\mathrm{e}} \tag{2.2}$$

caratterizzata da un $Q = 1,44\,\mathrm{MeV}$. Il Q efficace, invece, è $1,18\,\mathrm{MeV}$, a causa della perdita di energia dovuta all'emissione del neutrino elettronico (la cui energia media è circa 260 keV). Essendo una reazione debole, la sua sezione d'urto è estremamente piccola, tanto che non esistono misure sperimentali, ma solo stime teoriche.

Un valore recentemente calcolato per il fattore astrofisico a energia 0 è:

$$S(0) = 4,00 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{keV\,b} \tag{2.3}$$

(tratto da [1]).

A una temperatura $T_6 = 15,6$, applicando la formula (1.64) per calcolare il fattore astrofisico efficace e infine la (1.66), si ottiene il risultato seguente:

$$\langle\sigma v\rangle_{pp}(T_6 = 15,6) = 1,61 \cdot 10^{-43}\,\mathrm{cm^3 s^{-1}} \tag{2.4}$$

Supponendo condizioni stellari simili a quelle del centro del Sole ($\rho = 150\,\mathrm{g/cm^3}$, $X = 0,3$ e di conseguenza $N_p \approx 2,7 \cdot 10^{25}$ protoni/cm^3), il reaction rate risulta

$$r_{pp}(T_6 = 15,6) = \frac{N_p^2}{2}\langle\sigma v\rangle_{pp} \approx 5,8 \cdot 10^7 \text{reazioni}/(\mathrm{cm}^3 \cdot \mathrm{s}) \tag{2.5}$$

Per renderci conto di che cosa significhi un valore di 58 milioni di reazioni per centimetro cubo al secondo, calcoliamo quanti urti complessivi C avvengono tra i protoni del plasma nell'unità di volume e di tempo. Assumendo come sezione d'urto quella di una collisione tra particelle classiche (πr^2 con $r \approx 1,2\,\mathrm{fm}$), sfruttando la formula (1.37) si ha:

$$C = \frac{N_p^2}{2}\left(\frac{8}{\pi m_r}\right)^{(1/2)} \frac{1}{(kT)^{(3/2)}} \cdot \int_0^\infty \pi r^2 E \exp\left(-\frac{E}{kT}\right)\mathrm{d}E = r^2 N_p^2 \left(\frac{2\pi kT}{m_r}\right)^{(1/2)} \approx 3 \cdot 10^{34}\mathrm{cm^{-3}s^{-1}} \tag{2.6}$$

Dunque solo 1 urto su 10^{27} dà luogo alla reazione, mentre tutti gli altri sono semplici diffusioni. Il numero di reazioni potrebbe essere anche di 15 ordini di grandezza maggiore se l'interazione in gioco fosse quella forte.

Reazione	tipo interazione	Q [MeV]	S(0) [keV b]
$\mathrm{d} + \mathrm{p} \rightarrow^{3} \mathrm{He} + \gamma$	elettromagnetica	$5,49$	$2,16 \cdot 10^{-4}$
$\mathrm{d} + \mathrm{d} \rightarrow^{3} \mathrm{H} + \mathrm{p}$	forte	$4,03$	39
$\mathrm{d} +^{3} \mathrm{He} \rightarrow^{4} \mathrm{He} + \mathrm{p}$	forte	$18,35$	6240

Tabella 2.1: Reazioni possibili per il deuterio prodotto nel primo step della catena pp, con corrispondente valore di Q e di $S(0)$. Tratto da [14]. Il valore di $S(0)$ relativo alla reazione d+p è tratto da [11]

La reazione fin qui analizzata non è comunque l'unica possibile per la produzione del deuterio: concorre con essa la cosiddetta "pep":

$$\mathrm{p} + \mathrm{e}^{+} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{d} + \nu_{\mathrm{e}} \tag{2.7}$$

Anche questa reazione è debole, ma la sua sezione d'urto è di 4 ordini di grandezza inferiore alla protone+protone, perché si tratta di una reazione a 3 corpi.

Questa reazione è comunque importante, ad esempio, per il computo dei flussi di neutrini solari. Questa reazione, infatti, ha 2 prodotti, e la conservazione di energia e impulso impone che l'energia disponibile nel centro di massa (cioè il Q di 1,44 MeV più le energie cinetiche delle particelle incidenti, dell'ordine dei keV) sia spartita sotto forma di energia cinetica dei prodotti con proporzionalità inversa rispetto alla massa. Poiché il neutrino ha una massa di molti ordini di grandezza inferiore a quella del deuterio, o addirittura nulla, in questa reazione si prende tutta l'energia disponibile. Questo non avveniva nella reazione p+p perché i prodotti della reazione erano 3 e le leggi di conservazione di energia e impulso non fissavano l'energia cinetica dei prodotti: abbiamo quindi uno spettro continuo di energia per i neutrini prodotti dalla reazione protone+protone, e una riga a 1,44 MeV per quelli prodotti con la "pep".

2.2.2 Distruzione del deuterio e completamento della catena

Il deuterio prodotto può a questo punto dare luogo a molte reazioni, alcune delle quali sono elencate nella tabella (2.1)

Nonostante vi siano reazioni forti con sezioni d'urto di gran lunga maggiori, la grandissima abbondanza di protoni nel plasma stellare fa sì che la reazione dominante (quella con reaction rate maggiore) sia

$$\mathrm{d} + \mathrm{p} \rightarrow^{3} \mathrm{He} + \gamma \tag{2.8}$$

che costituisce il secondo step della catena pp ($Q = 5,49\,\mathrm{MeV}$).

Anche per stabilire il destino dell'elio-3 prodotto bisogna valutare le reazioni possibili e decidere la più probabile, in base all'abbondanza degli elementi con cui può reagire e alle sezioni d'urto. In condizioni solari, il canale più probabile è:

$$^{3}\mathrm{He} +^{3} \mathrm{He} \rightarrow^{4} \mathrm{He} + 2\mathrm{p} + \gamma \tag{2.9}$$

che ha un Q di 12,86 MeV.

In questo modo è stato prodotto l'elio-4 e si completa quella che viene chiamata *catena pp-1.*

Supponendo che la catena pp-1 sia l'unica responsabile della produzione di energia, è possibile fare alcuni semplici calcoli.

Siano N_1, N_2 e N_3 le densità numeriche di idrogeno, deuterio e elio-3 rispettivamente. Siano inoltre λ_{11}, λ_{12} e λ_{33} i valori di $\langle\sigma v\rangle$ per le 3 reazioni della catena. Allora possiamo scrivere le seguenti relazioni:

$$r_{11} = \frac{1}{2}N_1^2\lambda_{11} \tag{2.10}$$

$$r_{12} = N_1N_2\lambda_{12} \tag{2.11}$$

$$r_{33} = \frac{1}{2}N_3^2\lambda_{33} \tag{2.12}$$

per cui le densità dei vari elementi variano nel tempo nel seguente modo:

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = -2r_{11} - r_{12} \tag{2.13}$$

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = r_{11} - r_{12} \tag{2.14}$$

$$\frac{\mathrm{d}N_3}{\mathrm{d}t} = r_{12} - 2r_{33} \tag{2.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}N_4}{\mathrm{d}t} = r_{33} \tag{2.16}$$

2.2.3 Misura dei fattori astrofisici. Calcolo di ϵ

Per calcolare i valori di λ_{12} e λ_{33} a una data temperatura, occorre disporre di dati sperimentali per i fattori astrofisici a energie vicine a E_0, in modo da poter estrapolare il valore di S(0) e valutare così il S_{eff} da inserire nella formula (1.66).

Non è facile effettuare misure di sezione d'urto a energie così basse (per la reazione (2.8) il valore di E_0 per condizioni solari è 6,6 keV). La sezione d'urto diventa infatti molto piccola (a causa della bassa probabilità di attraversamento della barriera coulombiana) e così i rivelatori non riescono - a causa del rumore di fondo - a contare in modo preciso il numero di reazioni.

Ad esempio, nella reazione (2.8) tra protone e deuterio, la sezione d'urto si misura contando i fotoni di energia 5,5 MeV che vengono emessi. Se l'energia delle particelle incidenti nel c.d.m. - e quindi la sezione d'urto - diventa troppo piccola, il numero di fotoni rilevati diventa paragonabile con il fondo di raggi γ di provenienza cosmica.

Questi problemi si possono risolvere schermandosi dai raggi cosmici, cosa che può essere ottenuta facendo misure in laboratori sotterranei; ad esempio all'interno dei Laboratori Nazionali del Gran Sasso, sotto il massiccio del Gran Sasso, è stato costruito LUNA (Laboratory for Underground Nuclear Astrophysics). In questo modo negli ultimi anni sono state effettuate misure accurate delle sezioni d'urto - e quindi dei fattori astrofisici - per alcune reazioni di interesse astrofisico nel range utile di energia.

Riportiamo nella tabella (2.2) le estrapolazioni per $S(0)$ ottenute dalle più recenti misure relative alla reazioni (2.8) e (2.9) e nella figura (2.1) i dati misurati per la reazione (2.8).

Reazione	S(0) [keV b]	S'(0) [b]
$\mathrm{d} + \mathrm{p} \rightarrow ^3\mathrm{He} + \gamma$	$2,16 \pm 0,06 \cdot 10^{-4}$	$5,9 \pm 0,4 \cdot 10^{-6}$
$^3\mathrm{He} + ^3\mathrm{He} \rightarrow ^4\mathrm{He} + 2\mathrm{p} + \gamma$	5100 ± 100	$-2,6 \pm 0,7$

Tabella 2.2: Valori del fattore astrofisico a energia 0 e sua derivata prima per le reazioni della catena pp-1. Questi valori sono estrapolati da dati sperimentali ottenuti a energie nell'intervallo di Gamow [11] [12]

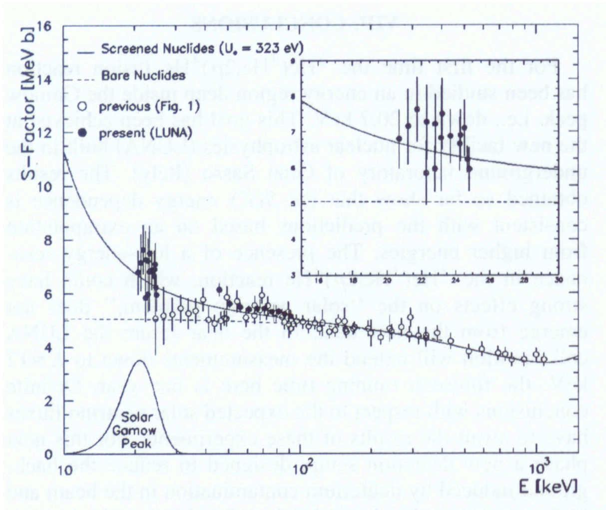

Figura 2.1: Valori del fattore astrofisico della reazione $^3\mathrm{He}(^3\mathrm{He}, 2\mathrm{p})^4\mathrm{He}$ per energie fino alla zona del picco di Gamow solare. Tratta da [11]

Usando questi dati, possiamo applicare le formule del cap. 1 per calcolare fattore astrofisico efficace e λ. Riportiamo i risultati relativi alla temperatura presente nel centro del Sole:

- $\lambda_{12}(T_6 = 15,6) = 2,3 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{cm^3 s^{-1}}$
- $\lambda_{33}(T_6 = 15,6) = 7,3 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{cm^3 s^{-1}}$

Notiamo che questi numeri sono di gran lunga superiori a λ_{11}. La prima reazione - quella di produzione del deuterio - procede quindi - almeno nel Sole - con un tasso enormemente più lento: ciò significa che il deuterio prodotto viene subito distrutto con la seconda reazione, molto più veloce. E' dunque la reazione tra protone e protone che governa la velocità dell'intera catena; la lentezza di questa reazione, che pure ha la barriera coulombiana più bassa, è dovuta al fatto che procede, a differenza delle successive, attraverso l'interazione debole.

Ritorniamo ora al sistema di equazioni (2.13 - 2.15), che dovevamo risolvere.

Iniziamo ad esaminare la (2.14), che regola la concentrazione del deuterio: osserviamo che, se N_2 è più piccola di $N_1\lambda_{11}/(2\lambda_{12})$, allora la sua derivata rispetto al tempo è positiva, mentre se è più grande dello stesso valore limite la derivata è negativa. Siamo di fronte a una equazione cosiddetta auto-regolante, e quindi a un sistema che – qualunque siano le condizioni iniziali – raggiunge una situazione di equilibrio. Tutti gli elementi che, come il deuterio, raggiungono dopo un certo tempo una concentrazione di equilibrio vengono chiamati *elementi secondari.*

La concentrazione di equilibrio del deuterio è molto facile da calcolare: basta imporre uguale a 0 il secondo membro della (2.14):

$$\left(\frac{N_2}{N_1}\right)_{eq} = \frac{\lambda_{11}}{2\lambda_{12}} \tag{2.17}$$

Al centro del Sole il rapporto N_2/N_1 vale $\approx 3,5 \cdot 10^{-18}$.

E' importante valutare quanto tempo impiega il deuterio a raggiungere la situazione stazionaria. Se, ad esempio, si parte da una concentrazione maggiore di quella di equilibrio, prevale la reazione di distruzione e si ha la seguente equazione differenziale:

$$\frac{1}{N_2}\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = -N_1\lambda_{11} \tag{2.18}$$

che ha come soluzione:

$$N_2 = N_2(t=0)e^{(-t/\tau)} \tag{2.19}$$

con $\tau = N_1^{-1}\lambda_{11}^{-1}$.

In generale, quando un elemento A viene distrutto in seguito alla reazione con l'elemento B, se N_a e N_b sono le concentrazioni di A e B rispettivamente, supponendo N_b costante l'andamento di N_a sarà

$$N_a = N_a(t=0)e^{(-t/\tau_{ab})} \tag{2.20}$$

con

$$\tau_{ab} = \frac{1}{N_b\lambda_{ab}}. \tag{2.21}$$

τ_{ab} è detta la vita media dell'elemento A rispetto alla reazione di distruzione con l'elemento B.

Facendo i calcoli relativi al nostro caso, risulta che il deuterio raggiunge l'equilibrio, in condizioni solari, dopo 1 s.

A questo punto, bisona esaminare l'equazione dell'elio-3. Possiamo, per quello che abbiamo appena visto, considerare N_2 costante, e con questa approssimazione è facile convincersi che ci troivamo di fronte ad un'altra equazione auto-regolante.

La concentrazione di equilibrio è stavolta:

$$\left(\frac{N_3}{N_1}\right)_{eq} = \sqrt{\frac{\lambda_{11}}{2\lambda_{33}}} \tag{2.22}$$

$$\tag{2.23}$$

In condizioni solari, il rapporto N_3/N_1 vale $\approx 10^{-5}$.

Però l'elio-3 si differenzia dal deuterio per il tempo che impiega a raggiungere l'equilibrio: per le condizioni al centro del Sole sono ben $2 \cdot 10^5$ anni.

Questo tempo, che dipende da $1/\lambda$, diventa ovviamente più grande al diminuire della temperatura. Di conseguenza, il valore che abbiamo dato è valido solo al centro del Sole, ma in realtà si dice che l'^{3}He è all'equilibrio quando la sua concentrazione si stabilizza in tutta la zona in cui le reazioni di fusione sono pienamente efficienti: perché ciò avvenga nel Sole occorrono circa 10^7 anni. Inoltre, per lo stesso motivo in alcune stelle molto meno massicce del Sole e quindi con temperature centrali molto più basse l'elio-3 non raggiunge mai l'equilibrio, e ha il ruolo di elemento pseudo-primario.

Riassumendo, dall'analisi del sistema di equazioni è emerso che, per una stella come il Sole, all'istante in cui si accendono le reazioni nucleari abbiamo 3 fasi:

- All'inizio nessuno degli elementi secondari è all'equilibrio. Dopo appena 1 secondo, la concentrazione di deuterio si stabilizza e si conclude la prima fase
- la concentrazione di ^{3}He, in un tempo, come abbiamo visto, molto lungo, raggiunge lentamente il valore di equilibrio (seconda fase)
- alla fine, le concentrazioni N_2 e N_3 si mantengono costanti e l'idrogeno viene progressivamente trasformato in elio-4 con una velocità governata dal tasso della reazione $\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{d} + \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e}$.

Quando è stata raggiunta la terza fase, il calcolo delle grandezze relative alla produzione di energia diventa semplice.

Sostituendo le condizioni N_2 = costante e N_3 = costante, si ottiene la seguente relazione tra i tassi di reazione:

$$r_{11} = r_{12} = 2r_{33} \tag{2.24}$$

Cioè ogni due cicli di reazione protone-protone e protone-deuterio, quando si sono quindi formati due nuclei di elio-3, avviene una reazione elio-elio.

Per quanto riguarda ϵ, è naturale scrivere:

$$\epsilon_{pp1} = Q_{pp1} \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}N_4}{\mathrm{d}t} = \frac{Q_{pp1}}{2} \cdot \frac{r_{11}}{\rho} \tag{2.25}$$

Con Q_{pp1} abbiamo indicato l'energia disponibile nella stella in seguito alla creazione di 1 nucleo di elio-4 attraverso la catena pp-1. Visto che la reazione elio3+elio3 avviene ogni 2 volte che ha luogo la prima coppia di reazioni, Q_{pp1} vale $2Q_{11} + 2Q_{12} + Q_{33}$. Inserendo i valori efficaci dei Q, corretti per la perdita di energia dovuta ai neutrini, si ottiene 26,20 Mev (supponendo un'energia media dei neutrini della prima reazione di 260 keV).

Sfruttando questo valore, abbiamo eseguito il calcolo di ϵ_{pp1} per il centro del Sole, ottenendo $\approx 0,5 \cdot 10^7\,\mathrm{Mev/(g \cdot s)}$.

2.2.4 Altre diramazioni della catena

In realtà le cose sono un po' più complicate, a causa del fatto che nel plasma stellare è presente una percentuale di elio-4. L'elio-3 prodotto può anche reagire con esso tramite l'interazione elettromagnetica:

$$^3\mathrm{He} +^4 \mathrm{He} \rightarrow^7 \mathrm{Be} + \gamma \tag{2.26}$$

$$p + p \to d + e^+ + \nu_e \quad (p + e^- + p \to d + \nu_e)$$

$$d + p \to^3 He + \gamma$$

$$^3He +^3 He \to^4 He + 2p + \gamma$$

catena pp1

$Q_{eff} = 26,20\,\mathrm{MeV}$

$$^3He +^4 He \to^7 Be + \gamma$$
$$^7Be + e^- \to^7 Li + \nu_e$$
$$^7Li + p \to^8 Be + \gamma$$
$$^8Be \to^4 He +^4 He$$

catena pp2

$Q_{eff} = 25,66\,\mathrm{MeV}$

$$^3He +^4 He \to^7 Be + \gamma$$
$$^7Be + p \to^8 B + \gamma$$
$$^8B \to^8 Be + e^+ + \nu_e$$
$$^8Be \to^4 He +^4 He$$

catena pp3

$Q_{eff} = 19,17\,\mathrm{MeV}$

Figura 2.2: Diramazioni della catena pp

e dare origine ad altre serie di reazioni, riassunte nella figura (2.2).

Le diramazioni della catena si differenziano tra loro per la percentuale di energia portata via dai neutrini: infatti, nella catena pp-2 – oltre a quello prodotto con la reazione protone+protone – si ha il neutrino emesso in seguito alla cattura elettronica del berillio, e nella pp-3 quello emesso dal boro che decade in berillio-8. La perdita è del 4% per la pp2 e del 28% per la pp3, contro il 2% della pp1.

Riportiamo nella figura (2.3) lo spettro dei neutrini prodotti nel Sole attraverso le 3 diramazioni della catena pp, calcolato utilizzando una recente implementazione del modello solare standard.

Per determinare in quali condizioni la catena pp-1 è prevalente rispetto alle altre 2, occorre confrontare le due diverse reazioni di distruzione dell'elio-3: la (2.9) e la (2.26).

A basse temperature (fino a $T_6 = 14$) la reazione (2.26) è sfavorita rispetto alla (2.9), a causa della massa ridotta maggiore e del fattore astrofisico minore. Però, la massa ridotta maggiore implica un τ maggiore (equazione 1.65) e quindi (equazione 1.69) una dipendenza dalla temperatura con esponente maggiore. Di conseguenza, più la temperatura aumenta più gli altri due rami crescono di importanza.

Cerchiamo di fornire una stima del branching ratio tra pp1 e pp2+pp3.

Definiamo $p1$, $p2$ e $p3$ le frazioni di nuclei di elio-4 prodotti attraverso le tre diramazioni della catena. La grandezza che cerchiamo di determinare è

$$\frac{p1}{p2 + p3} = \frac{r_{33}}{r_{34}} \tag{2.27}$$

infatti sono proprio i rates delle due reazioni concorrenti elio3+elio3 e elio3+elio4 a determinare quale percentuale di particelle α verrà prodotta dalla prima catena e quale dalle altre due.

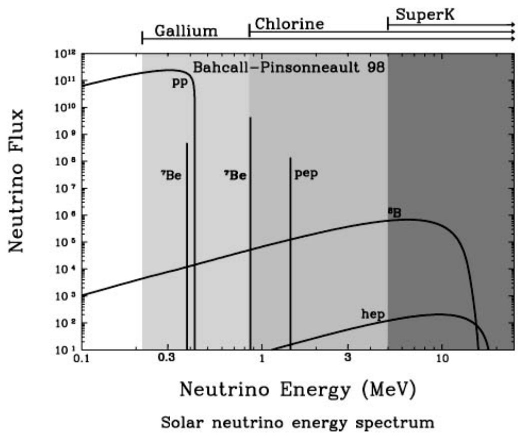

Figura 2.3: Spettro dei neutrini solari prodotti dalla catena pp, calcolato usando un modello solare standard. Tratto da *http://www.sns.ias.edu/ jnb/*

Tenendo conto di queste due reazioni, la concentrazione all'equilibrio di ^{3}He ha un'espressione più complicata di quella ottenuta nel paragrafo precedente.

Risulta infatti che, all'equilibrio:

$$\frac{\mathrm{d}N_3}{\mathrm{d}t} = 0 = r_{12} - 2r_{33} - r_{34} = \frac{\lambda_{11} N_1^2}{2} - \lambda_{33} N_3^2 - \lambda_{34} N_3 N_4 \tag{2.28}$$

da cui

$$(N_3)_{eq} = \frac{-\lambda_{34} N_4 + \sqrt{\lambda_{34}^2 N_4^2 + 2\lambda_{11}\lambda_{33} N_1^2}}{2\lambda_{33}} \tag{2.29}$$

Sostituendo questo valore nell'espressione di r_{33}, dopo alcuni semplici passaggi si ha:

$$\frac{p1}{p2 + p3} = \frac{r_{33}}{r_{34}} = \frac{\lambda_{33} N_3}{2\lambda_{34} N_4} = \frac{\sqrt{1 + \dfrac{2}{\alpha}} - 1}{4} \tag{2.30}$$

dove

$$\alpha = \frac{\lambda_{34}^2}{\lambda_{33}\lambda_{11}} \left(\frac{N_4}{N_1}\right)^2 \tag{2.31}$$

Nel centro del Sole α vale $0,177$ e il rapporto PP1/(PP2+PP3) vale circa 6/10.

Passiamo al confronto tra il ramo pp-2 e pp-3. Anche qui la temperatura gioca un ruolo fondamentale.

Il ^{7}Be prodotto dalla reazione (2.26) è instabile per cattura elettronica, con vita media – nel plasma solare – di circa 120 giorni. Più la temperatura aumenta, e più diventa probabile che, nel tempo che trascorrerebbe tra la creazione di un nucleo di ^{7}Be e la sua cattura elettronica, tale nucleo reagisca invece con un protone per dar luogo a boro-8. Quindi all'aumentare di T aumenta anche l'efficienza di pp-3 rispetto a pp-2.

In conseguenza a tutto ciò, per il calcolo generale di ϵ_{pp} a una temperatura generica occorre tener conto di tutti i tre i rami. Una volta noti i branching ratios relativi alle 3 diramazioni, la formula generale è:

$$\epsilon_{pp} = (p_1 Q_{pp1} + p_2 Q_{pp2} + p_3 Q_{pp3}) \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}N_4}{\mathrm{d}t} \tag{2.32}$$

Se operano concorrentemente tutte le 3 diramazioni, si ha:

$$\frac{\mathrm{d}N_4}{\mathrm{d}t} = \frac{\lambda_{11} N_1^2}{4} + \frac{\lambda_{34} N_3 N_4}{2} \tag{2.33}$$

.

Sostituendo questo termine nella (2.32), e utilizzando il valore di N_3 all'equilibrio calcolato nella (2.29), dopo alcuni passaggi otteniamo [7]:

$$\epsilon_{pp} = (p_1 Q_{pp1} + p_2 Q_{pp2} + p_3 Q_{pp3}) \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\lambda_{11} N_1^2}{4} \Phi(\alpha) \tag{2.34}$$

dove

$$\Phi(\alpha) = 1 - \alpha + \alpha \left(1 + \frac{2}{\alpha}\right)^{(1/2)} \tag{2.35}$$

Spesso si scrive la produzione di energia totale in termini di quella relativa alla sola catena pp1 per un fattore correttivo:

$$\epsilon_{pp} = (p_1 Q_{pp1} + p_2 Q_{pp2} + p_3 Q_{pp3}) \cdot \frac{\epsilon_{pp1}}{Q_{pp1}} \cdot \Phi(\alpha) \tag{2.36}$$

2.3 Ciclo CNO

2.3.1 Descrizione del ciclo e calcolo del reaction rate

In presenza di quantità non trascurabili di carbonio, azoto e ossigeno la trasformazione di 4 protoni in un nucleo di elio può avvenire anche mediante il ciclo seguente:

$$\begin{aligned}
{}^{12}\mathrm{C}(\mathrm{p},\gamma)^{13}\mathrm{N} \quad & (Q = 1,94\,\mathrm{MeV}) \\
{}^{13}\mathrm{N}(\mathrm{e}^+,\nu_\mathrm{e})^{13}\mathrm{C} \quad & (Q_{eff} = 1,51\,\mathrm{MeV}) \\
{}^{13}\mathrm{C}(\mathrm{p},\gamma)^{14}\mathrm{N} \quad & (Q = 7,54\,\mathrm{MeV}) \\
{}^{14}\mathrm{N}(\mathrm{p},\gamma)^{15}\mathrm{O} \quad & (Q = 7,29\,\mathrm{MeV}) \\
{}^{15}\mathrm{O}(\mathrm{e}^+,\nu_\mathrm{e})^{15}\mathrm{N} \quad & (Q_{eff} = 1,76\,\mathrm{MeV}) \\
{}^{15}\mathrm{N}(\mathrm{p},{}^4\mathrm{He})^{12}\mathrm{C} \quad & (Q = 4,96\,\mathrm{MeV})
\end{aligned}$$

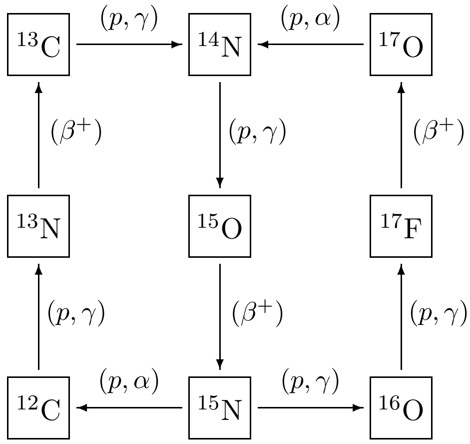

Figura 2.4: Biciclo CN-NO

chiamato ciclo CN (Q totale = 25,02 MeV).

Questo ciclo presenta varie diramazioni minori: ad esempio, l'azoto-15 può anche dar luogo alla reazione

$$^{15}\mathrm{N}(\mathrm{p},\gamma)^{16}\mathrm{O} \tag{2.37}$$

che innesca una ulteriore serie di processi per poi ritornare nel ciclo principale. Abbiamo così il biciclo CN-NO (figura 2.4).

Siccome il rapporto tra i fattori astrofisici delle reazioni $^{15}\mathrm{N} \rightarrow^{12} \mathrm{C}$ e $^{15}\mathrm{N} \rightarrow^{16} \mathrm{O}$ è di circa 2000 a 1 (e i reagenti sono gli stessi), segue che la diramazione in questione può – almeno alle temperature presenti nel centro del Sole – essere trascurata ai fini di dare una stima della produzione di energia nel ciclo.

Concentriamoci dunque sul CN. Questo processo si chiama *ciclo* perché utti i nuclei più pesanti dell'elio che vi prendono parte sono secondari: le loro concentrazioni all'equilibrio non variano nel tempo, e dunque questi elementi servono solo per catalizzare la trasformazione di 4 protoni in un nucleo di elio. Le loro concentrazioni all'equilibrio sono inoltre direttamente proporzionali al rate della rispettiva reazione di creazione ed inversamente proporzionali al rate della rispettiva reazione di distruzione.

La reazione più lenta delle 6, il cui rate governa tutto il ciclo, è la trasformazione di azoto-14 in ossigeno-15:

$$^{14}\mathrm{N}(\mathrm{p},\gamma)^{15}\mathrm{O} \tag{2.38}$$

che (secondo [1]) ha un S(0) di 3,5 keV b. Utilizzando la solita formula calcoliamo λ a 15,6 milioni di K:

$$\lambda_{14,1}(T_6 = 15,6) = 5,0 \cdot 10^{-42} cm^3 s^{-1} \tag{2.39}$$

La produzione di energia del ciclo CN si scrive semplicemente:

$$\epsilon_{CN} = Q_{CN} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot r_{14,1} \tag{2.40}$$

Con i dati relativi al centro del Sole si ottiene:

$$\epsilon_{CN}(T_6 = 15,6) = 0,7 \cdot 10^6 \,\mathrm{MeV/(g \cdot s)}, \tag{2.41}$$

mentre ricordiamo che ϵ_{pp} risultava per il Sole, nelle stesse unità, $0,5 \cdot 10^7$.

Anche se nelle stelle come il Sole il ciclo CNO non è importante ai fini della produzione di energia, non bisogna trascurare la sua importanza per la nucleosintesi: il gas interstellare da cui le stelle hanno origine è infatti ricco di elementi "multipli" di ^{4}He (come ^{12}C, ^{16}O), mentre è relativamente povero di ^{14}N. L'effetto del ciclo CN – in cui, come ricordiamo, la reazione di distruzione più lenta è proprio quella del ^{14}N – è di aumentare l'abbondanza di questo elemento a spese di quella del carbonio-12. Il ciclo NO, che inizia a diventare efficiente solo oltre $T_6 = 20$, causa anche la diminuzione della concentrazione di ^{16}O.

2.3.2 Confronto tra ciclo CNO e catena pp al variare della temperatura

I calcoli numerici da noi effettuati per la produzione di energia – sia tramite catena pp che tramite ciclo CNO – erano sempre riferiti alle condizioni del centro del Sole, che abbiamo preso come riferimento. Abbiamo quindi ottenuto dai calcoli un risultato importante: nelle stelle che hanno temperature dell'ordine di quella solare il processo responsabile della produzione di energia è quasi esclusivamente la catena pp.

Bisogna ora vedere che cosa succede per stelle che presentano temperature diverse: a questo fine, notiamo che il reaction rate della reazione ^{14}N(p, γ)^{15}O, a causa del τ più elevato, cresce con T in modo molto più rapido rispetto alla reazione protone-protone che governa la catena pp.

Di conseguenza, ϵ_{CN} diventa, a $T_6 > 17$, addirittura maggiore di ϵ_{pp}: ciò significa che per stelle molto massive (e quindi molto calde) il ciclo CN è la fonte principale di energia.

Cerchiamo di esplicitare la dipendenza dalla temperatura della catena pp1 e del ciclo CNO, al fine di effettuare un confronto preciso.

Ponendo $\rho = 150$ g/cm^3, $X = 0,3$, $X_N = 0,005$ e valutando tutte le costanti si ha per la catena pp1:

$$\epsilon_{pp1} = 2,4 \cdot 10^{13} \frac{\exp\left(-\dfrac{33,7}{T_6^{(1/3)}}\right)}{T_6^{(2/3)}} \quad \mathrm{MeV/(g\ s)} \tag{2.42}$$

mentre per il ciclo CN:

$$\epsilon_{CN} = 1,4 \cdot 10^{33} \frac{\exp\left(-\dfrac{151,9}{T_6^{(1/3)}}\right)}{T_6^{(2/3)}} \quad \mathrm{MeV/(g\ s)} \tag{2.43}$$

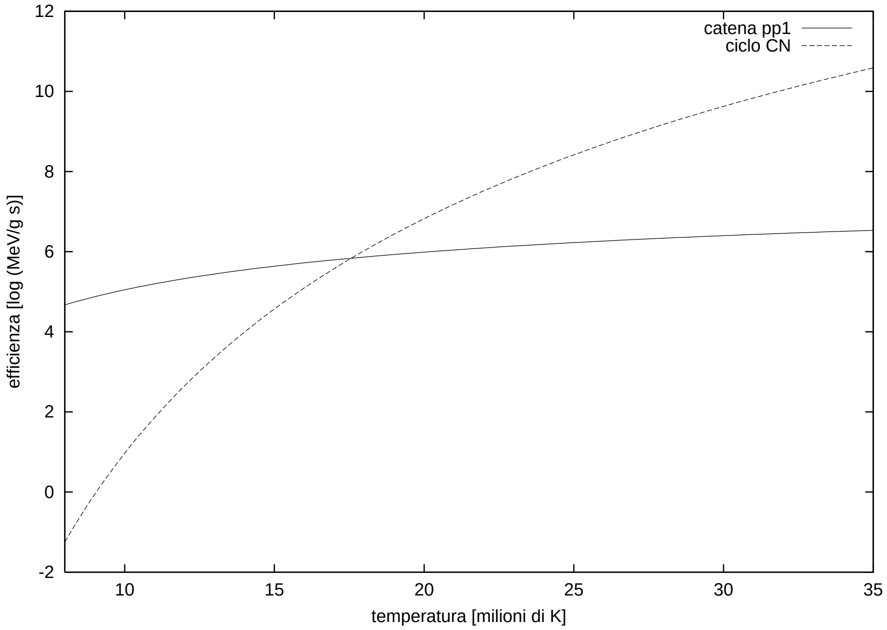

Figura 2.5: Efficienza della catena pp1 e del ciclo CNO al variare della temperatura (vedere testo).

Queste due funzioni sono raffigurate nella figura (2.5), nella quale si osserva chiaramente come la catena pp prevalga in stelle più fredde (meno massive), mentre il ciclo CNO diventi di gran lunga prevalente nelle stelle più massive.

Capitolo 3

Nucleosintesi degli elementi pesanti

3.1 Introduzione

Osserviamo nella figura (3.1) l'abbondanza relativa degli elementi più pesanti dell'elio-4 osservata nell'Universo.

Si nota una grandissima variabilità (diversi ordini di grandezza) nelle abbondanze relative, con picchi piuttosto pronunciati in corrispondenza di carbonio e ossigeno e neon (i cui isotopi più stabili hanno numero di massa pari e distanziato di 4 unità tra di loro). Sono presenti altri picchi, sempre per Z pari, fino al ferro, mentre tutti gli elementi con $Z > 26$ hanno un'abbondanza complessiva inferiore di 3 ordini di grandezza rispetto a quella del solo ferro.

Una delle questioni che maggiormente ha appassionato gli astrofisici tra gli anni '40 e '50 è stata la spiegazione dei fenomeni che hanno portato alla formazione di questi elementi all'interno delle stelle, e la giustificazione delle abbondanze relative attualmente osservate.

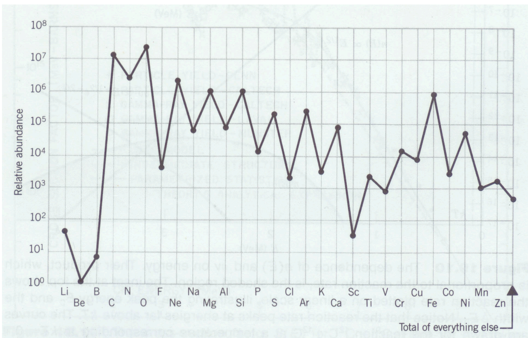

Figura 3.1: Abbondanza relativa degli elementi con $Z > 2$. Tratta da [13]

3.2 Fusione dell'elio

3.2.1 Reazione triple-α: produzione del carbonio-12

Per la maggior parte della propria vita una stella produce energia convertendo idrogeno in elio nel nucleo.

La fusione successiva che si attiva nella regione centrale, se la stella è sufficientemente massiva (almeno metà della massa solare), è quella di fusione di elio in C e O; questo processo inizia a diventare efficiente a $T_6 = 100$.

Fu Salpeter a proporre per la prima volta (nei primi anni '50) un modello che spiegasse come nelle stelle si potesse ottenere il carbonio. Visto che la probabilità di una reazione diretta a 3 corpi $\alpha + \alpha + \alpha \rightarrow^{12} \mathrm{C}$ è troppo bassa e non può giustificare la grande abbondanza del carbonio-12 (terzo elemento più diffuso nell'Universo), egli propose un modello a 2 step:

- due nuclei di ^{4}He di fondono in ^{8}Be, instabile (con tempo di decadimento $\sim 10^{-16}$ s).
- prima che il ^{8}Be decada nuovamente nei reagenti della reazione precedente, interagisce con un altro ^{4}He formando così ^{12}C

Queste due reazioni formano la cosiddetta "3α".

Nel 1953 Hoyle mostrò che la 3α potrebbe essere così efficiente da spiegare l'abbondanza di ^{12}C osservata solamente se la seconda reazione presentasse una risonanza nella zona di energia di Gamow. Hoyle notò che per la reazione $^8\mathrm{Be} +^4 \mathrm{He} \rightarrow^{12} \mathrm{C} + \gamma$ il picco di Gamow si situa intorno a 300 keV per $T_6 = 300$. Visto che il Q vale $7,367\,\mathrm{MeV}$, dedusse che – per avere una risonanza a energie dell'ordine di 300 keV – il carbonio-12 deve avere un livello eccitato a circa $7,67\,\mathrm{MeV}$. Adesso sappiamo che la reazione 3α si attiva nel nucleo già a $T_6 \approx 100$, quindi in realtà all'inizio essa risente della "coda" di questa risonanza.

Successivamente, il livello in questione fu trovato dagli sperimentali, e la teoria della "3α" fu confermata. Questo rimane ancora oggi uno degli esempi più importanti di deduzione di proprietà fondamentali della materia da considerazioni puramente astrofisiche.

Abbiamo riportato nella figura (3.2) i livelli eccitati del carbonio-12, e una rappresentazione schematica della reazione tra elio e berillio.

Esaminiamo ora in dettaglio i due passi di questo processo. Come prima cosa, consideriamo la reazione

$$^4\mathrm{He} +^4 \mathrm{He} \leftrightarrow^8 \mathrm{Be} \tag{3.1}$$

Come già detto, la reazione avviene in ambedue i sensi; la direzione energeticamente favorita è quella inversa (decadimento del berillio), ma di poco: il Q è infatti molto piccolo, $92,2\,\mathrm{keV}$. Di conseguenza, quello che succede è che si instaura un equilibrio dinamico: ad ogni dato tempo è presente nel plasma stellare una piccola e costante concentrazione di berillio.

Per calcolare la concentrazione di equilibrio del berillio, seguiamo il ragionamento di [7] e applichiamo il formalismo delle reazioni risonanti (1.74).

Siccome il nucleo composto prodotto dall'unione dei 2 nuclei di elio, il ^{8}Be, ha come canale di decadimento principale la scissione in due α e – con ampiezza molto minore – la reazione con un'altra

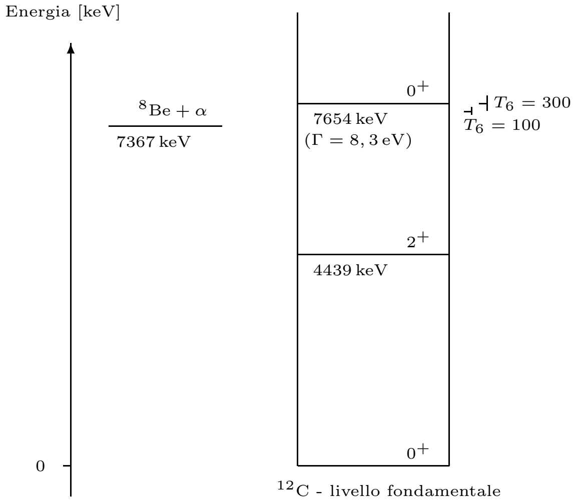

Figura 3.2: sono rappresentati i primi due livelli eccitati del carbonio-12 con rispettivi spin-parità. I reagenti della reazione $^8\mathrm{Be} + \alpha$ sono rappresentati ad altezza Q rispetto al livello fondamentale del carbonio-12. A lato del secondo livello eccitato del carbonio abbiamo messo in evidenza l'intervallo di energie in cui cade il picco di Gamow per la temperatura indicata. Si noti come la risonanza – per $T_6 = 300$ – cada proprio nella zona di energie di interesse astrofisico. Per $T_6 = 100$ il livello si trova al margine della zona di Gamow. Figura adattata da [14].

α, siamo nel caso in cui Γ_1 è molto maggiore di Γ_2. Siccome non vi sono altri canali, si ha per il termine γ definito dalla (1.75):

$$\gamma = \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \approx \Gamma_2 = \frac{\hbar}{\tau_2} \tag{3.2}$$

e quindi la (1.74) si scrive:

$$r_{\alpha\alpha} = \frac{1}{\tau_2} N_\alpha^2 \frac{h^3}{(2\pi m_r kT)^{(3/2)}} \, \omega f_{\alpha\alpha} \, exp\Big(-\frac{E_{\alpha\alpha}}{kT}\Big) \tag{3.3}$$

in questa equazione abbiamo indicato con $f_{\alpha\alpha}$ l'effetto dello schermaggio elettronico tra le due particelle α incidenti, e con $E_{\alpha\alpha}$ l'energia di risonanza.

Ma il rate di reazione è anche uguale a N_8/τ_2, dove N_8 è la concentrazione del berillio e τ_2 la sua vita media, definita dalla (3.2), per cui si ha

$$(N_8)_{eq} = N_\alpha^2 \, f_{\alpha\alpha} \, \frac{h^3}{(2\pi m_r kT)^{(3/2)}} \; exp\Big(-\frac{E_{\alpha\alpha}}{kT}\Big) \tag{3.4}$$

sostituendo i numeri, si ottiene (per $T_8 = 1$) un'abbondanza numerica del berillio-8 inferiore di ben 9 ordini di grandezza rispetto a quella dell'elio-4.

Lo stesso formalismo delle reazioni risonanti può essere utilizzato per calcolare il rate della reazione tra elio e berillio. In questo caso i canali di decadimento per il nucleo composto di carbonio-12 che si trova nello stato eccitato sono:

- decadimento nei reagenti stessi (elio-3 e berillio) con ampiezza Γ_α
- transizione allo stato fondamentale con emissione di 2 fotoni (ampiezza Γ_γ)
- transizione allo stato fondamentale con emissione coppia elettrone-positrone (ampiezza Γ_{pair})

Posto $\Gamma_2 = \Gamma_{rad} = \Gamma_\gamma + \Gamma_{pair}$ e $\Gamma_1 = \Gamma_\alpha$, siamo sempre nella situazione in cui in cui Γ_1 è molto maggiore di Γ_2.

Come prima, possiamo calcolare la concentrazione di equilibrio di nuclei di carbonio eccitati. Sostituendo l'espressione della concentrazione di berillio appena calcolata, otteniamo:

$$(N_{12})_{eq} = N_\alpha^3 \, f_{\alpha\alpha} \, f_{8\alpha} \, \frac{h^6}{(2\pi m_r kT)^3} \, \exp\left(-\frac{E_{\alpha\alpha} + E_{8\alpha}}{kT}\right) \tag{3.5}$$

dove:

- $f_{\alpha\alpha}$ è il fattore correttivo dello schermaggio elettronico della reazione tra elio-4 e elio-4
- $f_{8\alpha}$ è lo stesso fattore correttivo per la reazione tra berillio-8 ed elio-4
- $E_{\alpha\alpha}$ è l'energia della risonanza tra nuclei di elio
- $E_{8\alpha}$ è l'energia della risonanza prevista da Hoyle tra berillio-8 e elio-4.

Per quanto riguarda il rate di reazione, si ripete il ragionamento di prima: siccome il tempo medio di decadimento di un nucleo eccitato di carbonio (tramite emissione γ o produzione di elettrone e positrone) è $\tau_2 = \frac{\hbar}{\Gamma_2}$, basta moltiplicare la concentrazione di carbonio-12 nello stato eccitato per $1/\tau_2$. Si ha dunque:

$$r_{3\alpha} = f_{\alpha\alpha} \, f_{8\alpha} \, \frac{2^3 3^{1,5} \pi^3 \hbar^5 \Gamma_2}{M_\alpha^6 k^3 10^{24}} \, \frac{\rho^3 Y^3}{T_8^3} \, \exp\left(-\frac{E_R}{10^8 k T_8}\right) \tag{3.6}$$

dove $E_R = E_{\alpha\alpha} + E_{8\alpha}$.

Sostituendo i numeri abbiamo ottenuto la seguente formula finale in cui abbiamo esplicitato la dipendenza dalla densità totale, dall'abbondanza di elio e dalla temperatura:

$$r_{3\alpha} = 4,1 \cdot 10^{16} \, f_{\alpha\alpha} \, f_{8\alpha} \, \frac{\rho^3 Y^3}{T_8^3} \, \exp\left(-\frac{43,9}{T_8}\right) \tag{3.7}$$

per eseguire il calcolo, abbiamo utilizzato un valore di Γ_2 pari a $3,7 \cdot 10^{-3}$ eV.

Il rate così ottenuto varia moltissimo con la temperatura: ponendo nella formula un valore fisso per ρ di $10^5\,\mathrm{g/cm^3}$, con $T_8 = 1$ si ottiene un valore $\sim 10^{12}\,\mathrm{cm^{-3}\,s^{-1}}$ mentre con $T_8 = 3$ si ha $\sim 10^{23}\,\mathrm{cm^{-3}\,s^{-1}}$.

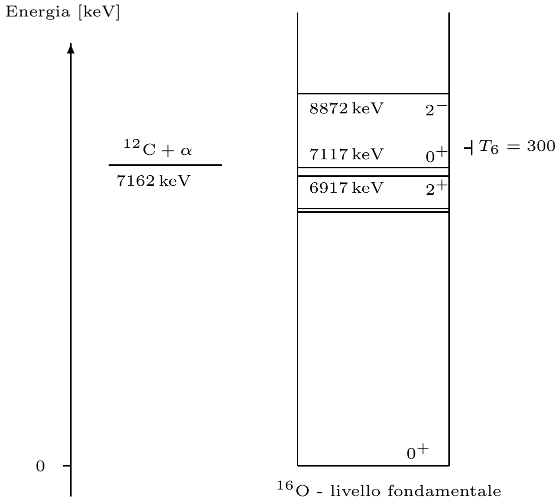

Figura 3.3: schema dei livelli dell'ossigeno-16. Si nota come, nella zona di energia di Gamow – indicata sulla destra – non sono presenti livelli energetici. Esistono invece due livelli con E poco inferiore al Q della reazione $^{12}C(\alpha,\gamma)^{16}O$; le code di queste risonanze influenzano il reaction rate. Adattato da [14].

3.2.2 Destino del carbonio prodotto con la 3α

Ora che abbiamo il rate della 3-α, resta da analizzare che cosa accade al carbonio-12 che viene progressivamente accumulato nel nucleo di una stella che si trova nella fase di helium burning.

Visto che il plasma è composto – in questo stadio – quasi interamente di elio, anche per il carbonio-12 la reazione più naturale è la fusione con una particella α:

$$^{12}\mathrm{C} +^{4}\mathrm{He} \rightarrow^{16}\mathrm{O} + \gamma \tag{3.8}$$

Nella figura (3.3) sono rappresentati i livelli del nucleo di ossigeno-16. Osservando la schematizzazione è evidente come in questo caso non siamo in presenza di una reazione risonante, infatti intorno alle energie del picco di Gamow non è presente alcun livello eccitato. Figura tratta da [14].

Ciò nonostante, nella finestra di energia di Gamow contribuiscono le code delle risonanze larghe relative ai livelli più bassi della soglia (in particolare il livello a 7117 keV); questo ed altri fattori rendono molto problematica la estrapolazione del fattore astrofisico e quindi il calcolo del reaction rate, sul cui valore è presente ancora oggi una notevole incertezza.

In un recente lavoro del 2001 [10] sono citati come limite inferiore e superiore per il fattore astrofisico efficace a 300 keV (l'energia di Gamow corrispondente a $T_9 = 0,18$) i valori di 62 e 270 keV barn. Utilizzando questi dati il reaction rate per coppia di particelle varia tra $0,79 \cdot 10^{-39}$ cm^{3}s^{-1} e $3,47 \cdot 10^{-39}$ cm^{3}s^{-1}.

La conseguenza di quesa incertezza è che i modelli di evoluzione stellare attualmente in uso non sono in grado di stimare con precisione le abbondanze relative di carbonio e ossigeno presenti nel nucleo della stella quando termina la fase di helium burning. E' chiaro, infatti, che un rate di reazione maggiore implica una maggior distruzione di carbonio e di conseguenza un nucleo – alla fine della fusione dell'elio – più ricco di ossigeno.

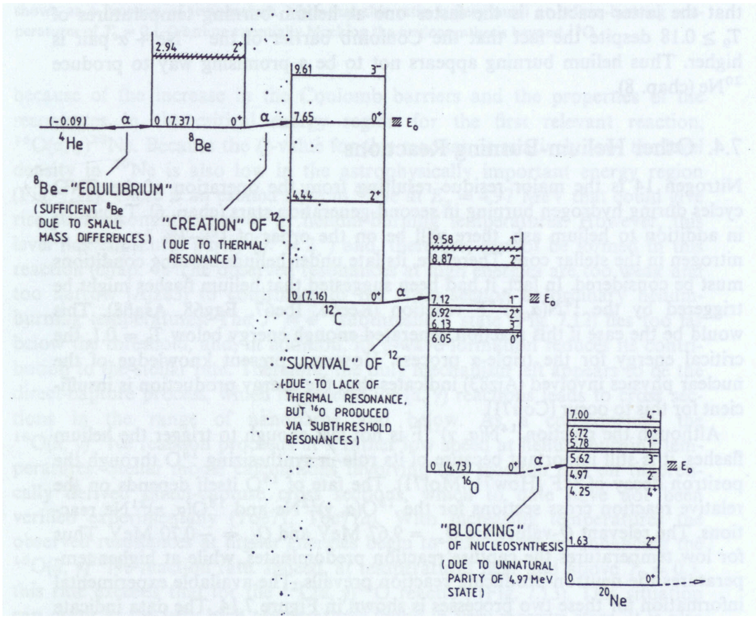

Figura 3.4: Schema riassuntivo della nucleosintesi di carbonio, ossigeno e neon. Tratto da [14].

Nel lavoro di Imbriani e Straniero [10] sono state effettuate due simulazioni, relative alla fase di helium burning, una utilizzando il valore più basso possibile per il reaction rate, e un'altra usando il più alto. La prima simulazione dà come risultato finale un'abbondanza frazionaria in massa $X_{^{12}\mathrm{C}}$ di 0,42 contro una $X_{^{16}\mathrm{O}}$ di 0,55, mentre la seconda dà 0,20 per ^{12}C contro 0,77 per ^{16}O. Da questi dati si evince come la conoscenza imprecisa di questo reaction rate impedisca per il momento di prevedere la composizione chimica dell'interno stellare alla fine della fase che stiamo considerando.

Concludiamo il paragrafo analizzando la possibilità che una frazione di ossigeno venga perduto attraverso la reazione

$$^{16}\mathrm{O} + \alpha \rightarrow ^{20}\mathrm{Ne} + \gamma \tag{3.9}$$

Occorre controllare se questa reazione può avere una risonanza alle energie di interesse: la risposta è negativa, a causa del fatto che l'unico livello presente nella zona di Gamow è caratterizzato da spin-parità 2^- e non può essere raggiunto (visto che i due reagenti hanno entrambi spin-parità 0^+). L'assenza di risonanza e l'elevata barriera coulombiana di questa reazione fanno sì che nella fase di helium burning la nucleosintesi non si spinga oltre l'ossigeno in modo apprezzabile.

E' interessante notare che se i livelli di carbonio, ossigeno e neon non presentassero la particolare configurazione che abbiamo descritto, la quale favorisce la reazione di produzione del carbonio e "blocca" la nucleosintesi dopo l'ossigeno, nell'Universo attuale gli elementi fondamentali per la vita così come la conosciamo (C e O) non sarebbero presenti in quantità notevoli. Nella figura (3.4) sono rappresentati i passi esaminati in questo paragrafo, dalla produzione del carbonio al "blocco" della nucleosintesi con il neon.

3.2.3 Altre reazioni nella fase di fusione dell'elio

Le reazioni che abbiamo introdotto fino ad ora sono quelle che contribuiscono maggiormente alla produzione di energia nella fase di helium burning. Abbiamo però altre reazioni, il cui ruolo è determinante per i processi successivi di nucleosintesi.

In particolare, il ^{14}N presente nel plasma stellare in questa fase – la cui abbondanza come abbiamo visto era aumentata nel periodo di fusione dell'idrogeno grazie all'azione del ciclo CNO – può catturare una particella α e produrre ^{18}F, che a sua volta decade β in ^{18}O:

$$^{14}\mathrm{N} + \alpha \rightarrow ^{18}\mathrm{F} + \gamma \tag{3.10}$$

$$^{18}\mathrm{F} \rightarrow ^{18}\mathrm{O} + \mathrm{e}^{+}\nu_{\mathrm{e}} \tag{3.11}$$

Si innesca così una catena di reazioni:

$$^{18}\mathrm{O} + \alpha \rightarrow ^{22}\mathrm{Ne} + \gamma \tag{3.12}$$

$$^{22}\mathrm{Ne} + \alpha \rightarrow ^{25}\mathrm{Mg} + \mathrm{n} \tag{3.13}$$

Il completamento di questa catena (che avviene se prima della fine della fusione dell'elio si raggiungono temperature $\sim 2 \cdot 10^8$ K) implica che ogni ^{14}N presente nel plasma da' origine alla liberazione di un neutrone, attraverso l'ultima reazione considerata. Assumendo una metallicità di 0,02, considerando che $Z_{CNO} \sim \frac{Z}{2}$ e che nella materia completamente processata dal ciclo CNO l'abbondanza di azoto-14 è molto minore di quella di carbonio e ossigeno, si ottiene una produzione di circa $7 \cdot 10^{20}$ neutroni per grammo di materia. Vedremo in seguito l'importanza di questi neutroni nei processi di nucleosintesi degli elementi più pesanti del ferro.

3.3 Dalla fusione del carbonio al ferro

Quando l'elio presente nel nucleo è terminato, la parte interna contrae, e – se la massa della stella è grande abbastanza – le temperature sempre più alte che vengono raggiunte nella regione centrale possono innescare nuove reazioni tra nuclei più pesanti, che prima erano impossibili a causa della barriera coulombiana troppo elevata.

Il nucleo, che dopo l'helium burning è composto principalmente da carbonio e ossigeno, innesca prima di tutto la fusione del ^{12}C con sé stesso, che avviene tramite l'interazione forte e può dar luogo a 3 diversi canali:

$$^{12}\mathrm{C} + ^{12}\mathrm{C} \rightarrow ^{20}\mathrm{Ne} + \alpha \tag{3.14}$$

$$^{12}\mathrm{C} + ^{12}\mathrm{C} \rightarrow ^{23}\mathrm{Na} + \mathrm{p} \tag{3.15}$$

$$^{12}\mathrm{C} + ^{12}\mathrm{C} \rightarrow ^{23}\mathrm{Mg} + \mathrm{n} \tag{3.16}$$

La barriera coulombiana per queste reazioni è di circa 9 MeV, e le temperature alle quali il reaction rate inizia a diventare apprezzabile è circa $T_6 \approx 900$. Alla fine di questa fase, il nucleo è composto principalmente di neon, sodio e magnesio; vi sono anche piccole percentuali di alluminio e silicio, ottenuti tramite la cattura delle particelle α, dei neutroni e dei protoni prodotti con le (3.14 - 3.16).

A questo punto una nuova contrazione del nucleo può innescare la fotodissociazione del neon:

$$^{20}\mathrm{Ne} + \gamma \rightarrow ^{16}\mathrm{O} + \alpha \tag{3.17}$$

Le particelle α così prodotte fondono con il neon non dissociato per formare ^{24}Mg.

Alla fine di questa nuova fase, il nucleo – ora contenente soprattutto neon e magnesio – contrae ulteriormente e si riscalda e può dar origine alle reazioni di fusione dell'ossigeno (che si attiva a $T_9 \sim 2$), attraverso le quali si produce principalmente silicio e zolfo, oltre a piccole quantità di altri elementi come argo, calcio, cloro, potassio. La trattazione quantitativa di queste fasi è molto complessa, anche perché vi sono moltissime reazioni che possono avvenire in competizione tra loro.

Una volta completata la fusione dell'ossigeno, il nucleo consiste principalmente di silicio; a questo punto però non si ripete lo schema che aveva contraddistinto le fasi precedenti (che prevederebbe l'innesco – in seguito a una nuova contrazione del nucleo – della reazione $^{28}\mathrm{Si} +^{28}\mathrm{Si}$). Infatti la fusione del silicio, la cui barriera coulombiana è di quasi 40 MeV, richiede per attivarsi temperature estremamente alte ($T_9 > 3,5$), e prima che esse vengano raggiunte i raggi γ ad elevata energia presenti nel plasma rendono efficiente la fotodissociazione del silicio.

Si ha quindi una elevata produzione di particelle leggere (α, n, p) "strappate" al silicio (e agli altri nuclei presenti in minore quantità), che possono reagire a loro volta con i nuclei di ^{28}Si non fotodissociati dando luogo ad elementi ancora più pesanti. Viene così attivata una catena di reazioni che complessivamente prende il nome di "fusione del silicio"; la prima è

$$^{28}\mathrm{Si} + \alpha \leftrightarrow ^{32}\mathrm{S} + \gamma \tag{3.18}$$

cui segue

$$^{32}\mathrm{S} + \alpha \leftrightarrow ^{36}\mathrm{Ar} + \gamma \tag{3.19}$$

e così via. In ogni step il nuovo nucleo che si forma ha un'energia di legame per nucleone maggiore, e quindi viene rilasciata energia. L'abbondanza degli elementi prodotti attraverso questi processi dipende da quanto sono efficienti i processi concomitanti di cattura α e fotodissociazione; risulta che il ^{56}Fe è il nucleo che viene prodotto in quantità maggiore (come si osserva nella figura 3.1).

3.4 Cenni sulla nucleosintesi oltre il ferro

3.4.1 Le evidenze sperimentali

Gli isotopi stabili oltre il "gruppo del ferro" hanno un'energia di legame per nucleone che decresce lentamente con A (figura 1.2); questo andamento fa sì che la fusione tra questi elementi non sia energeticamente favorita. Inoltre, la barriera coulombiana che tende a respingerli raggiunge valori molto elevati, dell'ordine delle decine di MeV e oltre.

A causa di questi fatti, se questi elementi fossero creati con processi simili a quelli descritti nei paragrafi precedenti, la loro abbondanza dovrebbe essere rapidamente decrescente con il numero di massa, fino a diventare praticamente nulla per gli elementi più pesanti.

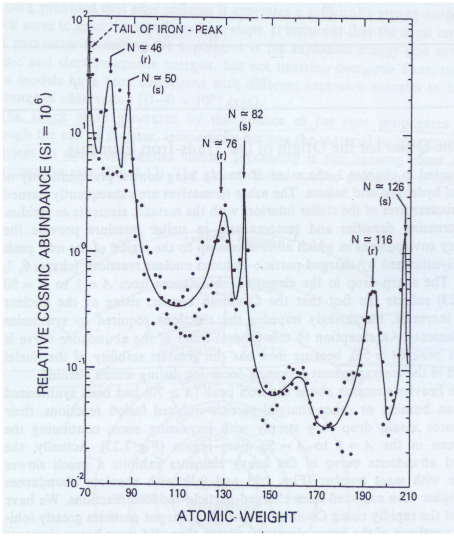

Figura 3.5: Abbondanze dei nuclei stabili con numero di massa maggiore di quello del ferro, formatisi per successive reazioni di cattura neutronica a partire dal ferro-56. Sono evidenti i picchi stretti corrispondenti agli elementi che hanno shell neutronico chiuso, oltre a picchi più larghi centrati su numeri di massa di poche unità inferiori rispetto ai picchi stretti. Immagine tratta da [14].

Invece, la figura (3.5) mostra un andamento ben diverso: le abbondanze sono piccole ma non trascurabili, e presentano picchi molto pronunciati in corrispondenza degli isotopi che hanno gli shell neutronici chiusi (cioè aventi un N – numero di neutroni – "magico"), oltre a picchi più larghi centrati su numeri di massa di poco inferiore rispetto a quelli stretti.

Per spiegare un tale andamento, bisogna che vi sia un altro tipo di reazione in grado di spiegare la formazione degli elementi più massivi del ferro.

Oggi è noto che i processi di *cattura neutronica* giocano un ruolo chiave, a causa di molti fattori:

- a partire dalla fase di fusione dell'elio in shell, nel plasma stellare vi è – come abbiamo già osservato nel paragrafo 3.2.3 – una presenza notevole di neutroni liberi, prodotti da reazioni di tipo (α, n) o (γ, n); anche nella fase di supernova II (la fase finale dell'evoluzione di una stella di massa 10 volte maggiore di quella solare che è arrivata a produrre ^{56}Fe nel nucleo) sono presenti intensi flussi di neutroni.
- gli elementi pesanti hanno tendenza ad "assorbire" neutroni, infatti gli isotopi più stabili, a parità di numero di massa, hanno una lieve predominanza neutronica
- le reazioni di cattura neutronica non sono influenzate dalla repulsione coulombiana, e possono coinvolgere anche elementi con numero atomico molto alto

3.4.2 Descrizione qualitativa dei meccanismi di nucleosintesi

Consideriamo un piano Z - N (Z, il numero atomico, sulle ordinate e N, numero di neutroni, sulle ascisse), e indichiamo su di esso gli isotopi conosciuti; otteniamo – nella regione di interesse – una

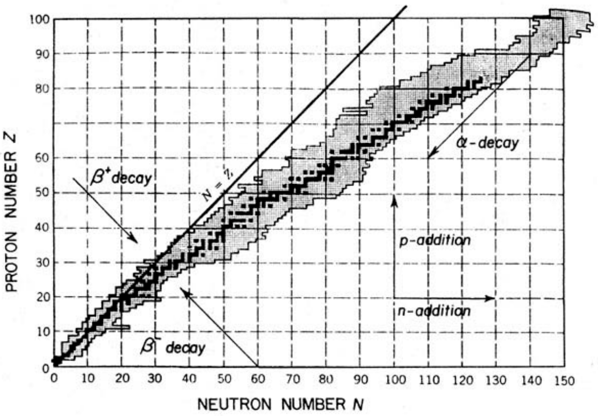

Figura 3.6: Valle di stabilità. In nero sono indicati gli elementi stabili, in grigio quelli instabili. Si nota come gli isotopi stabili sono disposti intorno a una retta nel piano Z - N, e presentano una lieve sovrabbondanza di neutroni che diventa sempre più accentuata all'aumentare del numero di massa.

figura come la (3.6)

La regione dei nuclei stabili è chiamata "valle di stabilità"; essa – come avevamo anticipato – contiene nuclei con una lieve sovrabbondanza di neutroni, che diventa sempre più accentuata all'aumentare del numero di massa. Questa porzione del piano Z-N è chiamata "valle" perché, se facessimo un grafico della massa per nucleone in funzione di N e Z, troveremmo che questa grandezza, nella striscia dei nuclei stabili, prende valori molto più bassi rispetto agli isotopi vicini, che sono instabili per decadimento β. Il punto in cui la "valle" è più profonda è in corrispondenza del ferro-56, l'isotopo con energia di legame per nucleone maggiore (e quindi massa per nucleone minore).

Un processo di cattura neutronica parte da un elemento (A, Z) e lo trasforma in un (A+1, Z); nel piano della figura (3.6) ciò equivale a spostarsi di una casella verso destra. L'elemento così ottenuto può essere stabile o instabile. Se è stabile, può catturare un altro neutrone, spostandosi ancora verso destra nella nostra rappresentazione.

Se invece l'isotopo raggiunto è instabile, la cattura neutronica concorre con il decadimento β che lo porterebbe di nuovo verso la valle di stabilità (movimento in diagonale, perché il numero di massa non cambia, mentre aumenta o diminuisce Z si una unità a seconda se il decadimento è $\beta-$ o $\beta+$).

Le sezioni d'urto per le reazioni di cattura neutronica non presentano l'andamento caratteristico delle reazioni tra particelle cariche (che era dovuto alla probabilità di penetrazione attraverso la barriera coulombiana). Esse hanno invece una caratteristica dipendenza da $1/v$. Di conseguenza, il prodotto σv è costante al variare di v. Il reaction rate per coppia di particelle si può scrivere

$$\langle \sigma v \rangle = \langle \sigma \rangle v_T \tag{3.20}$$

dove v_T è la velocità più probabile (uguale a $\sqrt{(2kT/m_n)}$), e $\langle \sigma \rangle$ è la sezione d'urto mediata sulla distribuzione di Boltzmann.

Il tempo medio di vita di un nucleo rispetto alla cattura neutronica, se N_n è la densità di neutroni presenti nel plasma è quindi:

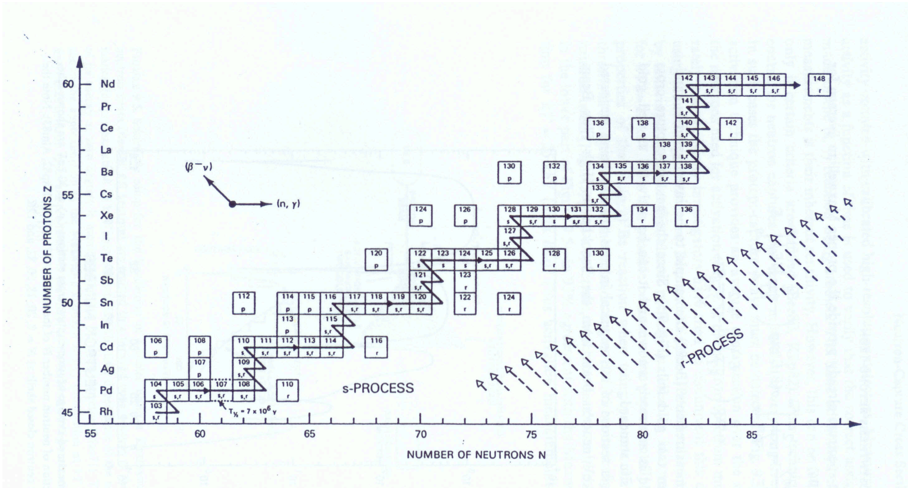

Figura 3.7: Diagramma dei processi slow. Si vede come la catena dei processi-s, non appena viene raggiunto un elemento instabile, si ricongiunge alla valle di stabilità tramite un decadimento β. Tratta da [14].

$$\tau_n = \frac{1}{N_n \langle\sigma\rangle v_T} \tag{3.21}$$

Per stabilire quale reazione prevale nel nostro isotopo instabile, i parametri da confrontare sono τ_n e τ_β, cioè la vita media del nucleo per decadimento beta.

Se siamo nel caso in cui $\tau_n \gg \tau_\beta$ l'isotopo ha una probabilità molto grande di decadere β prima di catturare un altro neutrone. Questa è la situazione di un cosiddetto processo "slow" o processo-s: il flusso neutronico è troppo piccolo per innescare più di una cattura in sequenza e allontanare l'elemento di partenza dal centro della valle di stabilità.

Visto che – per temperature corrispondenti a energie intorno a 30 keV – una tipica sezione d'urto per cattura neutronica può essere di 0,1 b, si ottiene un valore tipico di $\langle\sigma v\rangle$ intorno a 10^{-17} cm^3 s^{-1}. Per quanto riguarda i tempi di decadimento beta, questi possono variare tra alcuni secondi ad alcuni anni. La richiesta $\tau_n \gg \tau_\beta$ implica quindi – svolgendo il semplice calcolo – densità numeriche di neutroni di almeno 10^8 cm^{-3}.

Quando invece $\tau_n \ll \tau_\beta$, possono avvenire più processi di cattura neutronica in successione, fino ad arrivare ad isotopi con un così grande numero di neutroni che il decadimento beta diventa di nuovo prevalente: questi sono i processi rapidi (processi-r). Vi sono alcuni isotopi, ai confini della valle di stabilità, con una notevole sproporzione di neutroni, che possono essere raggiunti solo con i processi-r.

Facendo un calcolo analogo a quello per i processi lenti, troviamo che, per avere un τ_n molto più piccolo del più piccolo τ_β, per esempio 1 millisecondo, occorrono densità neutroniche molto elevate, almeno 10^{20} cm^{-3}. E' dunque la maggiore o minore presenza di neutroni che porta alla formazione di catene di processi-s o processi-r.

Sia i processi-s che i processi-r hanno come punto di partenza un nucleo-seme, che di solito è il ferro-56; a partire da esso, con successioni di catture neutroniche e decadimenti β è possibile formare quasi tutti i nuclei pesanti. Nelle figure (3.7) e (3.8) sono riportati alcuni percorsi nel piano Z-N delle

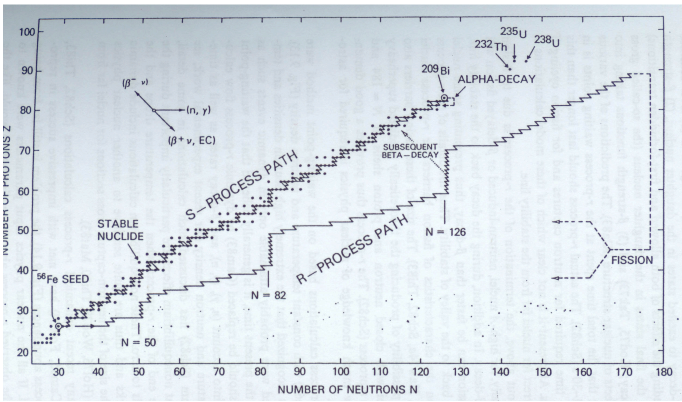

Figura 3.8: Percorsi relativi ai processi-s e ai processi-r. Tratta da [14].

catene di processi lenti e veloci. Nella figura (3.7) è anche possibile osservare come alcuni elementi – contrassegnati con la lettera "p" – non possono essersi formati attraverso i due meccanismi descritti prima: essi hanno origine da reazioni di cattura protonica, la cui sezione d'urto minore rispetto alla cattura neutronica (a causa alla barriera coulombiana) spiega la loro modesta abbondanza.

Il modello che abbiamo accennato permette di comprendere – noi ci limiteremo a una spiegazione qualitativa – il motivo dei picchi che avevamo fatto notare nella figura (3.5).

I nuclei stabili che hanno lo shell neutronico chiuso, infatti, avranno poca tendenza ad assorbire nuovi neutroni, quindi il loro rate di distruzione per cattura neutronica sarà basso ed essi tenderanno ad accumularsi maggiormente nel plasma stellare: questo spiega i picchi-s.

Per quanto riguarda i processi-r, occorre notare che si sviluppano lungo percorsi che si allontanano molto dalla valle di stabilità, procedendo in orizzontale fino ad incontrare un nucleo – instabile – con un N magico e con numero di massa inferiore rispetto a quello corrispondente – stabile – che appare lungo il percorso s. Questi nuclei "magici" decadono poi β risalendo in diagonale verso la valle di stabilità, mantenendo A costante: in questo modo si spiegano i picchi-r, spostati di poche unità rispetto agli s.

Bibliografia

[1] E.D. Adelberger, J.N. Bahcall *et al.*, *Review of Modern Physics* **70**, 1265 (1998)

[2] J.N. Bahcall e M.H. Pisonneault, *Review of modern Physics* **64**, 885 (1992)

[3] H.A. Bethe, *Reviews of Modern Physics* **9**, 69 (1937)

[4] H.A. Bethe e C.L. Critchfield, *Physical Review,* **54**, 248 (1938)

[5] H.A. Bethe, *Physical Review* **55**, 103 e 434 (1939)

[6] V. Castellani, *Astrofisica stellare,* Zanichelli editore (1985), cap. 3 e cap. 4

[7] D.D. Clayton, *Principles of stellar evolution and nucleosynthesis,* University of Chicago press (1983), cap. 5

[8] J.P. Cox e R.T. Giuli, *Principles of stellar structure,* Gordon and Breach (1984), cap. 11 e cap. 17.

[9] K. Huang, *Meccanica Statistica,* Zanichelli editore (1997), cap. 11 e cap. 12

[10] G. Imbriani *et al.*, *Astrophysical Journal* **558**, 903 (2001)

[11] C. Broggini, P. Corvisiero *et al.*, *Nuclear Physics A* **706**, 203 (2002)

[12] C. Broggini, P. Corvisiero *et al.*, *Physical Review C* **57**, 2700 (1998)

[13] K.S. Krane, *Introductory nuclear physics,* Wiley ed. (1988), cap. 19

[14] C.E. Rolfs e W.S. Rodney, *Cauldrons in the Cosmos - nuclear astrophysics,* University fo Chicago Press (1988)