

Corso di Laurea in Fisica
AA 2002-2003

Evidenze Osservative della Costante Cosmologica

Candidata: Sara Marcatili
Relatrice: Prof. Rosa Poggiani

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Origine storica della costante cosmologica	3
1.2	Energia del vuoto	6
1.3	Parametri cosmologici	7
1.4	Cinematica	10
2	Formazione di strutture	12
3	Metodi di misura	14
3.1	Lenti gravitazionali	14
3.2	Abbondanza di cluster	15
3.3	Arcs	16
3.4	Distorsione quantità isotrope	17
3.5	Supernovae	17
3.6	Anisotropia CMB	18
3.7	Età dell' universo	21
4	Osservazioni	23
4.1	Supernovae	23
4.2	Analisi delle anisotropie del CMB e delle strutture a larga scala . . .	34
4.3	Analisi combinata dello spettro del CMB e delle supernovae di tipo Ia	38
4.4	Combinazione dei dati del CMB, delle supernovae dell' HST e delle strutture a larga scala	41
4.5	Analisi combinata della distribuzione di galassie a raggi X e delle Supernovae	43
4.6	WMAP	46

Capitolo 1

Introduzione

In questo lavoro, saranno presentati i più recenti dati sperimentali sul valore della costante cosmologica. Dopo una breve introduzione teorica sulle motivazioni per cui è stata introdotta, si passerà a delineare il suo significato fisico di energia del vuoto, ed il legame con gli altri parametri cosmologici. In seguito saranno definite alcune quantità cinematiche utili per la successiva discussione dei test sperimentali e verrà analizzata la loro dipendenza dalle varie combinazioni dei parametri cosmologici. Nel secondo capitolo si analizzerà il processo di propagazione delle perturbazioni che porta alla formazione di strutture nell' universo. Nella discussione del modello teorico sarà messa in evidenza l' influenza di una costante cosmologica diversa da zero nell' accrescersi delle fluttuazioni.

Nel terzo e nel quarto capitolo sarà affrontata una discussione approfondita di alcune delle tecniche oggi in uso per la determinazione del valore di Λ ; si tratterà in particolare dei metodi basati sulle supernovae, sullo studio delle strutture a larga scala e sulla radiazione fossile.

Di questi esperimenti saranno messi alla luce le principali fonti di errore e i limiti. I vari risultati indipendenti saranno poi combinati in modo da restringere l' errore associato a ciascun tipo di misura. Saranno infine discussi i dati più recenti forniti dall' esperimento WMAP sulla radiazione fossile.

1.1 Origine storica della costante cosmologica

Per un universo omogeneo, isotropo e con curvatura costante, la forma più generale di metrica è data da [1]:

$$ds^2 = dt^2 - R(t)^2 (d\chi^2 + r(\chi)^2 [d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2]) \quad (1.1)$$

dove $R(t)$ è un fattore di scala che esprime la contrazione o dilatazione, $d\chi = dr/(1 - kr^2)^{1/2}$, mentre k determina la curvatura dello spazio tempo; per $k = 0$ si ha un universo piatto dove la nozione di distanza tra due punti si riduce a quella Euclidea, per $k = (-1,1)$ si hanno rispettivamente un universo aperto ed un universo chiuso. Nella (1.1), così come in seguito, si assumerà sempre $c = 1$. La coordinata r , detta comovente, è solidale all' espansione dell'universo ed è data da:

$$r(\chi) \equiv \sin n\chi = \begin{cases} \sin \chi & \text{se } k = 1 & \text{chiuso} \\ \chi & \text{se } k = 0 & \text{piatto} \\ \sinh \chi & \text{se } k = -1 & \text{aperto} \end{cases} \quad (1.2)$$

La distanza fisica tra due oggetti è legata alla distanza comovente tramite il fattore di scala cosmico $R(t)$ che descrive l' evoluzione temporale dell' universo:

$$d = R(t)r(\chi) \quad (1.3)$$

L' intera informazione è contenuta in $R(t)$ e k : è infatti una delle idee fondamentali della relatività generale che la materia e l' energia determini la metrica dello spazio-tempo. Questo concetto è matematicamente espresso dalle equazioni di campo di Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.4)$$

dove g_{ij} rappresenta la metrica, R_{ij} ed R sono rispettivamente il tensore di Ricci e la sua traccia e T_{ij} è il tensore di energia-impulso; quest' ultimo è dato da

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (1.5)$$

e per una distribuzione di materia omogenea ed isotropa si riduce agli elementi sulla diagonale $(\rho, -p, -p, -p)$ [4], dove ρ è la densità di energia/materia e p la pressione.

Risolvendo tali equazioni secondo la metrica di Robertson-Walker si ottengono le equazioni di Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \equiv H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2 R_0^2} \quad (1.6)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \quad (1.7)$$

dove H è la costante di Hubble. Nella (1.6) e nella (1.7) è stata introdotta la normalizzazione $a(t) = R(t)/R_0$ dove R_0 rappresenta il fattore di scala odierno (così come tutte le quantità caratterizzate dal pedice "0"), in modo da avere $a = 1$ nel presente.

Rispetto al caso Newtoniano, oltre che dalla densità di energia, il campo dipende da un termine di pressione necessario a spiegare l'azione di particelle relativistiche (radiazione) presenti soprattutto nelle prime fasi dell'evoluzione dell'universo. Queste contrastano la tendenza della materia a collassare su se stessa, ed il termine $(\rho + 3P)$ è quello che effettivamente produce la diminuzione del rate di espansione.

All'inizio del secolo, prima della scoperta da parte di Hubble della recessione delle galassie, sembrava logico cercare una soluzione statica per la (1.6) e la (1.7). Imponendo $\dot{a} = 0$ e $\ddot{a} = 0$, si ottiene:

$$\frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2 R_0^2} = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) = 0 \quad (1.9)$$

per avere una densità di materia positiva la pressione deve perciò essere negativa.

Per eliminare il paradosso, Einstein modificò la (1.4) introducendo la costante cosmologica Λ come sorgente di pressione negativa [3, 1]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.10)$$

Analogamente la (1.6) e la (1.7) assumono la forma:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2 R_0^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.11)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.12)$$

dove appare evidente come il cambiamento del fattore di scala sia determinato da tre componenti: la densità di energia, la curvatura dello spazio-tempo e Λ , che agisce da forza repulsiva.

Con la scoperta dell'espansione dell'universo, venne meno la necessità di una soluzione statica per le equazioni di Friedmann, ed Einstein accantonò la costante cosmologica definendola il suo più grande errore.

Tuttavia, nonostante il motivo originale per cui è stata introdotta sia venuto meno, ci sono buoni motivi per ritenere che Λ sia diversa da zero, in virtù delle recenti osservazioni che saranno discusse nel Capitolo 4.

1.2 Energia del vuoto

La meccanica quantistica permette di dare una interpretazione della costante cosmologica come misura dell'energia del vuoto. Tale teoria infatti, prevede che un sistema nello stato fondamentale abbia una energia non nulla il cui valore dipende dalle caratteristiche del sistema stesso. L'arbitrarietà esistente nella definizione della scala di energia, rende possibile solamente la misura della differenza fra i punti zero di più sistemi.

La dimostrazione sperimentale dell'esistenza dell'energia del vuoto è fornita dall'effetto Casimir [2]: due piastre conduttrici parallele risentono di una forza attrattiva dovuta alle condizioni al contorno che la loro stessa presenza impone al vuoto.

Una opportuna manipolazione delle equazioni di campo di Einstein renderà chiaro il motivo dell' identificazione tra costante cosmologica ed energia del vuoto [3]. Il tensore energia-impulso per il vuoto può essere scritto:

$$T_{\mu\nu}^{vac} = -\rho_{vac}g_{\mu\nu} \quad (1.13)$$

quindi il vuoto si comporta come un fluido perfetto con $p_{vac} = -\rho_{vac}$. Portando al secondo membro della (1.10) il termine proporzionale a Λ e, definendo:

$$\rho_{vac} = \rho_{\Lambda} \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (1.14)$$

si ottiene che l' effetto di un tensore del tipo introdotto equivale a quello di una costante cosmologica.

I tentativi teorici per fissare in modo assoluto il valore dell'energia del vuoto, e quindi della costante cosmologica, sono molteplici e affrontarli in dettaglio esula dagli scopi di questo lavoro.

Un campo quantistico può essere schematizzato come un insieme di oscillatori armonici di frequenza ϖ_i ed energia allo stato fondamentale $E_i = \hbar\varpi_i$. L'energia totale del sistema risulta:

$$E_0 = \sum \frac{1}{2} \hbar \varpi_i \quad (1.15)$$

dove $\varpi^2 = k^2 + m^2/\hbar^2$. La somma può essere calcolata ponendo il sistema in una scatola di volume L^3 (da far tendere all'infinito), e utilizzando la condizione $\lambda=L/n$. Si ottiene:

$$E_0 = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \int \varpi 4\pi k^2 dk \quad (1.16)$$

Si può stimare in maniera approssimata tale integrale, prendendo come estremo d'in-

tegrazione superiore un vettore d'onda $k_{max} \gg \frac{m}{\hbar}$ ed ottenere la seguente espressione per la densità di energia del vuoto:

$$\rho_{vac} \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} (E_0/L^3) = \frac{\hbar k_{max}^4}{32\pi^3} \quad (1.17)$$

Il fatto che tale espressione diverga per k_{max} che tende all'infinito non costituisce un problema: in realtà ci si aspetta che esista un valore massimo dell'energia per il quale le teorie fisiche convenzionali non sono soddisfatte. Se ammettiamo che questo limite sia costituito dall'energia di Planck (10^{18}Gev), cioè dall' energia a riposo massima che può essere contenuta in una regione delle dimensioni della lunghezza di Planck , il valore corrispondente di ρ_{vac} è:

$$\rho_{vac} \sim (10^{18}\text{Gev})^4 \sim 2 \times 10^{110} \text{ergs/cm}^3 \quad (1.18)$$

da confrontare con il valore osservato [3]

$$\rho_{vac}^{obs} \leq (10^{-12}\text{Gev})^4 \sim 2 \times 10^{-10} \text{ergs/cm}^3 \quad (1.19)$$

La discrepanza tra i due risultati è addirittura di 120 ordini di grandezza. Anche ammettendo che il valore di taglio sia più basso non si riesce comunque a giustificare un energia di $10^{-2} \div 10^{-3} \text{eV}$, l'unica che potrebbe riprodurre il risultato osservato per ρ_Λ . E' possibile che il contributo di più campi si sommi fino ad ottenere una costante cosmologica tanto piccola, ma che questi si bilancino con una tale precisione sembra improbabile. Molti teorici sono invece convinti che ρ_Λ sia in realtà nulla per motivi ancora sconosciuti, e che quello che si misura sia l'effetto di qualche perturbazione attorno al valor medio $\Lambda = 0$. Ma al di là delle tante proposte avanzate per ottenere un valore piccolo per la costante cosmologica, rimangono i dati sperimentali, che affermano che l'energia del vuoto esiste e va considerata come parte integrante della cosmologia moderna.

1.3 Parametri cosmologici

Dall' equazione di Friedmann scritta nella forma

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2 R_0^2} \quad (1.20)$$

dove in ρ è compresa anche ρ_Λ , è evidente che esiste un valore critico della densità per il quale l'universo risulta piatto ($k = 0$):

$$\rho_{crit} \equiv \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (1.21)$$

Se si introduce il parametro di densità:

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_{crit}} = \left(\frac{8\pi G}{3H^2} \right) \rho \quad (1.22)$$

ne deriva un legame diretto tra la curvatura dello spazio-tempo e Ω :

$$k = \text{sgn}(\Omega - 1) \quad (1.23)$$

Sfruttando la (1.22), e definendo la densità di energia di curvatura $\rho_k \equiv -(3k/8\pi G R_0^2 a^2)$, la (1.20) può essere riscritta come:

$$H^2 = H_0^2 (\Omega + \Omega_k) \quad (1.24)$$

dove Ω è determinata dalla densità di materia, dalla radiazione e dalla costante cosmologica. Se si esplicitano tutti i termini nella (1.24) e si valuta tale espressione al momento attuale ($H = H_0$), si ottiene:

$$\Omega_m + \Omega_{NR} + \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_k \quad (1.25)$$

dove

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_0 \\ \Omega_\Lambda &= \frac{\Lambda}{3H_0^2} \\ \Omega_k &= -\frac{k}{R_0^2 H_0^2} \end{aligned} \quad (1.26)$$

La densità di energia Ω_m , è inoltre costituita da più componenti, in particolare da Ω_{NR} e Ω_R che rappresentano rispettivamente la densità di materia non relativistica e relativistica.

I parametri cosmologici risultano perciò, strettamente legati l'uno all'altro, è quindi necessario estrarre il valore del parametro desiderato da una combinazione di questi. E' utile riscrivere la (1.24) tenendo conto dei diversi tipi di evoluzioni temporali a cui sono soggetti i parametri cosmologici. Ogni componente si comporta come un fluido con equazione di stato della forma $p_i = w_i \rho_i$ dove w_i è una costante che può assumere i seguenti valori [3]:

	w_i
materia	0
radiazione	1/3
curvatura	-1/3
vuoto	-1

Dalla condizione di espansione adiabatica dell' universo

$$d(\rho a^3) = -p da^3$$

e dalle equazioni di stato per le singole componenti [3], risulta che:

$$\Omega_k(a) = \Omega_k a^{-2} \quad (1.27)$$

$$\Omega_{NR}(a) = \Omega_{NR} a^{-3} \quad (1.28)$$

$$\Omega_R(a) = \Omega_R a^{-4} \quad (1.29)$$

$$\Omega_\Lambda(a) = \text{costante} \quad (1.30)$$

e quindi l'equazione di Friedmann diventa:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{NR}}{a^3} + \frac{\Omega_R}{a^4} + \frac{\Omega_k}{a^2} + \Omega_\Lambda \right) \quad (1.31)$$

da cui si ottiene:

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = H_0 \left(\frac{\Omega_{NR}}{a^3} + \frac{\Omega_R}{a^4} + \frac{\Omega_k}{a^2} + \Omega_\Lambda \right)^{1/2} \equiv H_0 E(z = a^{-1} - 1) \quad (1.32)$$

E' interessante osservare come la costante cosmologica si comporti in maniera diversa dalla materia e dalle altre forme di energia. Mentre la densità di queste decresce con l' espansione dell' universo portando ad una diminuzione dell' attrazione gravitazionale, il lavoro compiuto dal vuoto durante l' espansione adiabatica è pari all' energia necessaria perchè ρ_Λ rimanga costante.

Nel seguito il termine di radiazione verrà trascurato. Le osservazioni mostrano infatti che il suo contributo è notevolmente inferiore a quello della materia ($\Omega_R \sim 5 \times 10^{-5}$) [3].

1.4 Cinematica

Verranno ora introdotte alcune quantità che si riveleranno utili nella discussione delle osservazioni sperimentali.

L'equazione (1.32) può essere usata per determinare l'età dell'universo [4]; trascurando Ω_R per le ragioni suddette e definendo $\Omega_m \equiv \Omega_{NR}$, essa può essere riscritta come:

$$\frac{da}{dt} = H_0 (\Omega_m a^{-1} + \Omega_k + \Omega_\Lambda a^2)^{1/2} \quad (1.33)$$

Dall'equazione di Friedmann in questa forma appare evidente l'importanza del termine Ω_Λ ; infatti, questo termine sarà in futuro quello dominante poichè il valore di a cresce con l'espansione dell'universo. Integrando la (1.33) si ottiene:

$$\int H_0 dt = H_0 \int \frac{dt}{da} da = \int \frac{da}{(\Omega_m a^{-1} + \Omega_k + \Omega_\Lambda a^2)^{1/2}} \quad (1.34)$$

All'aumentare di Λ aumenta l'età dell'universo; una costante cosmologica diversa da zero potrebbe perciò spiegare un valore elevato per H_0 , anche ammettendo $\Omega_k = 0$.

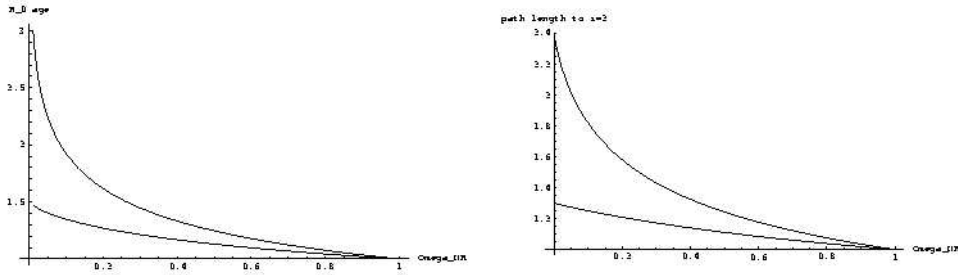


Figura 1.1: Età e path length in funzione di Ω_m [4]. A sinistra, la curva in alto mostra la dipendenza di $H_0 t$ da Ω_m per un universo piatto, mentre la curva in basso mostra la stessa quantità per un universo con $\Omega_m + \Omega_k = 1$ e $\Omega_\Lambda = 0$. A destra è mostrato il path length per $z = 2$ in funzione di Ω_m . La curva superiore si riferisce ad un universo piatto, quella inferiore ad un universo aperto.

La Figura 1.1, parte sinistra, mostra l'andamento del prodotto $H_0 t$ in funzione di Ω_m per un universo piatto e per uno aperto; si può osservare come per un universo piatto tale prodotto risulti maggiore rispetto al caso di un universo aperto con una costante cosmologica nulla.

La distanza percorsa da un raggio di luce può essere calcolata in modo analogo[4]. Tenendo conto che la luce segue geodetiche nulle ($ds^2 = 0$), dalla metrica di Robertson-Walker si ha che $dt^2 = R_0^2 a^2 d\chi^2 \equiv R_0^2 a^2 dr^2 / (1 - kr^2)$ (per un osservatore all'origine), e quindi:

$$\chi(a) = \int_a^1 \frac{da'}{R_0 a' \dot{a}'} = \int_0^{z=a^{-1}-1} \frac{dz'}{R_0 H_0 E(z')} \quad (1.35)$$

(per la dipendenza dalla curvatura si veda il grafico in figura 1.1). La distanza percorsa è rilevante per le misure di lensing gravitazionale descritte nel seguito.

Il volume comovente osservato guardando indietro ad un certo redshift è:

$$dV = R_0^3 r^2(\chi) d\chi d\Omega \quad (1.36)$$

Un'altra quantità che sarà utile in seguito è la distanza angolare d_A , definita come il rapporto tra le dimensioni proprie di un oggetto e le sue dimensioni angolari apparenti. Nella notazione già usata è data da:

$$d_A = \frac{R_0 r(\chi)}{1+z} = \frac{1}{H_0 \sqrt{|\Omega_k|}} \frac{r(\chi)}{1+z} \quad (1.37)$$

ed è legata alla distanza di luminosità d_L dalla relazione $d_L = (1+z)^2 d_A$.

Capitolo 2

Formazione di strutture

La formazione di strutture nell' universo è dovuta essenzialmente all' azione combinata della forza gravitazionale e della radiazione [1]. Dalla competizione di quest' ultime, nascono delle instabilità causate, per la prima dal gradiente del campo gravitazionale stesso, per la seconda da variazioni nella densità dell' universo. Quando materia e radiazione interagiscono, la materia viene redistribuita in modo analogo a quello che si ha per la radiazione. Se la redistribuzione durante l' era di dominio della radiazione fosse stata completamente isotropa, non ci sarebbe stata formazione di strutture; se ne deduce perciò che alcune disomogeneità si devono esser mantenute in modo da poter essere amplificate in seguito. L' anisotropia della temperatura del CMB (Cosmic Microwave Background) implica che le perturbazioni siano dell'ordine di 10^{-5} [3] alla ricombinazione (vedi Sezione 3.6), e quindi una teoria lineare può descrivere correttamente l' aumentare delle fluttuazioni almeno nella prima fase del loro sviluppo. Le predizioni di una tale teoria potranno poi essere confrontate con l' osservazione di fluttuazioni su larga scala (perchè di minore ampiezza in quanto hanno cominciato a propagarsi da relativamente poco tempo).

Si può schematizzare l' universo come un fluido autogravitante, omogeneo ed isotropo, soggetto a delle instabilità. Definendo il contrasto di densità come $\delta \equiv \rho' / \rho_0$, dove ρ_0 è la densità media di materia e ρ' la fluttuazione, si arriva ad una equazione che descrive l' evoluzione temporale delle perturbazioni della densità per un universo in espansione [1]:

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = 4\pi G\rho_0\delta + \frac{c_s^2}{a^2}\nabla_r^2\delta \quad (2.1)$$

dove $c_s^2 \equiv \partial P / \partial \rho$ è la velocità di propagazione dell'onda di pressione causata dalla disomogeneità della densità, ed il pedice r indica la derivazione rispetto alla coordinata comoviente. Il primo membro della (2.1) mostra come l' espansione dell'universo ritardi la crescita di perturbazioni rispetto al caso di un universo statico; il secondo

membro descrive la competizione tra la forza gravitazionale e quella di pressione. L'evoluzione della quantità δ è perciò caratterizzata da due scale di tempo, di cui una tiene conto della crescita dell' attrazione gravitazionale ($\tau = 1/\sqrt{4\pi G\rho_0}$), e l' altra del propagarsi dell'onda di pressione (t_j). Per $t_j \ll \tau$ le perturbazioni vengono ben presto smorzate dalla radiazione che agisce da forza viscosa; per $t_j \gg \tau$ la gravità è dominante, e l'ultimo termine della (2.1) può essere trascurato:

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = 4\pi G\rho_0\delta \quad (2.2)$$

La soluzione della (2.2) è tale che all'aumentare della densità di materia aumenta l'ampiezza della perturbazione. Per Ω_k fissato, un valore positivo della costante cosmologica comporta un rallentamento nella formazione di strutture agendo, da una parte sulla diminuzione di ρ_0 , dall'altra sulla crescita del termine di smorzamento $2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}$.

La Figura 2.1 [4] mostra l' andamento della δ in funzione del fattore di scala in due casi: per $\Omega_m = 1$ e $\Omega_\Lambda = 0$ (sopra), e per $\Omega_m = 0.3$ e $\Omega_\Lambda = 0.7$ (sotto). Si osserva che le fluttuazioni crescono più lentamente se c' è una costante cosmologica positiva.

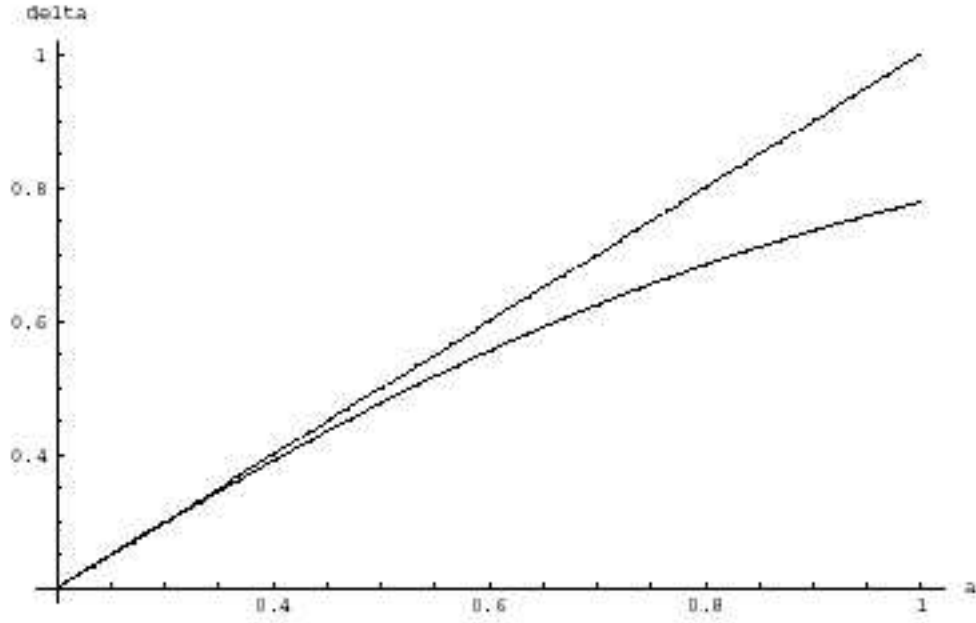


Figura 2.1: Crescita delle perturbazioni in funzione di a per $\Omega_m = 1$ e $\Omega_\Lambda = 0$ (curva in alto), e per $\Omega_m = 0.3$ e $\Omega_\Lambda = 0.7$ [4].

Capitolo 3

Metodi di misura

3.1 Lenti gravitazionali

Si ha lensing gravitazionale quando la luce proveniente da una sorgente lontana attraversa una regione di spazio in cui è presente un oggetto molto massivo come una galassia o un cluster di galassie. A causa del forte campo gravitazionale il cammino della luce viene deviato, e l'osservatore percepisce immagini multiple della stessa sorgente, o una immagine amplificata .

La probabilità che un quasar ad un certo redshift z subisca lensing da parte di un corpo posto lungo il suo cammino ottico, dipende fortemente dai valori dei parametri cosmologici. Soprattutto ad alti z , per diverse densità di materia, si hanno risultati che differiscono anche di un ordine di grandezza, e questo fa pensare alla possibilità di realizzare un test molto sensibile per la determinazione del rapporto fra Ω_Λ e Ω_m [5].

Esistono modelli teorici per calcolare la probabilità di lensing in un universo piatto. Essi assumono che la densità comovente di lenti sia costante, e descrivono le galassie come una popolazione di sfere isoterme [5]. Anche se tali ipotesi potrebbero rappresentare una notevole fonte di errore nell'analisi delle proprietà statistiche associate al lensing, si scopre in realtà che quest' ultime hanno una scarsa dipendenza dalla distribuzione di massa delle lenti. Soprattutto nel caso in cui la costante cosmologica è dominante, il suo effetto è così grande che le incertezze sul modello teorico adottato diventano trascurabili.

La densità di lenti gravitazionali relativa al caso di un universo piatto costituito di sola materia ($\Omega_m = 1$ e $\Omega_\Lambda = 0$) è data da [4]:

$$P_{lens} = \frac{15}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z_s}}\right)^{-3} \int_0^{z_s} dz \frac{(1+z)^2}{E(z)} H_0^2 \left[\frac{d_A(0, z) d_A(z, z_s)}{d_A(0, z_s)} \right]^2 \quad (3.1)$$

dove z_s è il redshift della sorgente, e la distanza angolare $d_A(z_1, z_2)$ tra due redshift z_1, z_2 è definita come:

$$d(z_1 z_2) = \frac{R_0}{(1+z_2)} \int_{z_1}^{z_2} dz \frac{1}{R_0 H_0 E(z)} \quad (3.2)$$

Conoscendo tale densità e la probabilità di lensing, è possibile calcolare il numero di immagini multiple che ci si aspetta di trovare ad un certo z e confrontarlo con i dati osservativi. Poichè la probabilità di lensing aumenta drammaticamente all'avvicinarsi di Ω_Λ all'unità, l'osservazione di uno scarso numero di lenti porterebbe a fissare un limite superiore per la costante cosmologica.

Tuttavia i risultati ricavati con questa tecnica sono soggetti a numerose fonti di errore; oltre a quelli di tipo statistico dovuti allo scarso numero di quasar che subiscono lensing e alla difficoltà nel conteggio delle galassie, ci sono quelli sistematici dovuti ai modelli adottati, e soprattutto all'estinzione del segnale proveniente dai quasar [25].

3.2 Abbondanza di cluster

Nella sezione sulla crescita delle perturbazioni, è stato mostrato come le perturbazioni crescano più velocemente per grandi Ω_m . I cluster di galassie ad alto z sono ancora in una fase della loro evoluzione per cui la crescita di instabilità può essere considerata non lineare solo a partire da tempi recenti. Le osservazioni di questi possono perciò essere direttamente confrontate con le previsioni relative alla formazione di strutture. Secondo il modello teorico, in un universo con un alto valore della costante cosmologica, ci si aspetta formazioni di cluster precedenti, e quindi un maggior numero di essi per redshift alti.

Il metodo consiste nel calcolare con simulazioni la distribuzione di massa attesa ad un certo z mettendola in relazione con lo spettro di temperatura a raggi X corrispondente allo spettro di materia. Si considera ad esempio la densità comovante in funzione del redshift, di cluster con temperatura efficace $k_B T > 6.2 \text{ keV}$ e si analizza la dipendenza dai parametri cosmologici. Come si evince dalla Figura 3.1 [4] per $z > 0.8$ non sono previsti cluster nel modello con $\Omega_m = 1$; la presenza di strutture al di sopra di questo redshift è perciò coerente con una costante cosmologica diversa da zero.

La principale fonte di errore per questo tipo di test è l'incertezza sulla relazione tra massa e temperatura [4] adottata nel confronto tra lo spettro della distribuzione di materia e quello della temperatura.

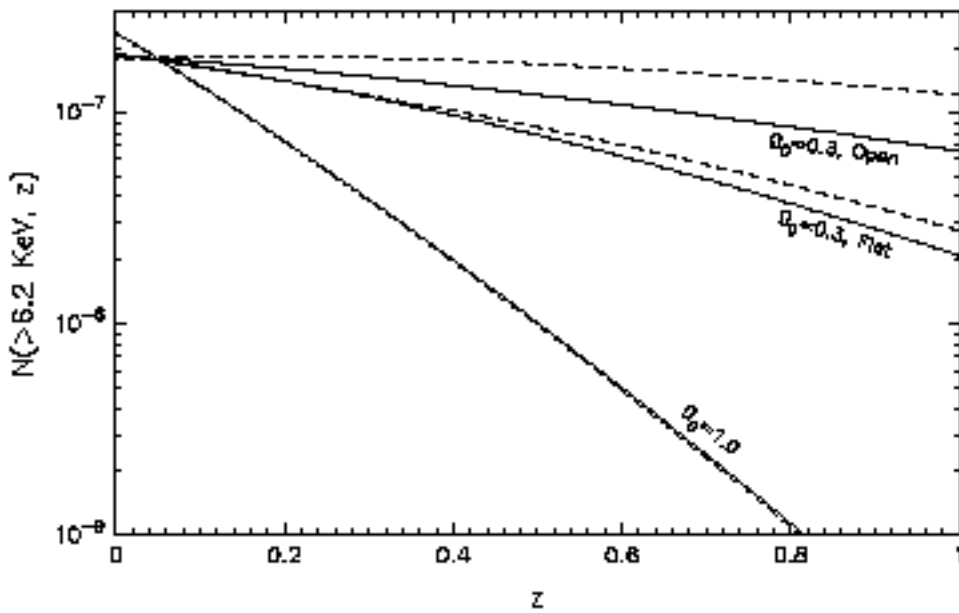


Figura 3.1: Evoluzione attesa per la densità comoviente di cluster con temperatura a raggi-X $KT > 6.2$ keV [4].

3.3 Arcs

Il numero di cluster di galassie presenti ad un certo redshift, influenza il numero di lenti gravitazionali. Questa quantità influisce direttamente sul numero di lenti gravitazionali. Per un universo dominato da Λ , ci si aspetta di trovare un numero maggiore di lenti perchè i cluster si formano prima e sono quindi più numerosi. Inoltre ci si aspetta che i cluster più antichi siano più compatti e quindi lenti più efficienti.

Attraverso delle simulazioni al computer [26] si stabilisce il numero di archi corrispondente a diverse combinazioni dei parametri cosmologici:

$$N_{arcs} \sim \begin{cases} 2400 & \Omega_m = 0.3 & \Omega_\Lambda = 0 \\ 280 & \Omega_m = 0.3 & \Omega_\Lambda = 0.7 \\ 36 & \Omega_m = 1 & \Omega_\Lambda = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Osservazioni compiute sull'intera volta celeste, riportano 1500-2300 archi, un ordine di grandezza in più rispetto a quello previsto per la combinazione $\Omega_m = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$ suggerita da altre osservazioni. Le osservazioni sembrano comunque escludere la possibilità di una costante cosmologica diversa da zero.

3.4 Distorsione quantità isotrope

In un universo isotropo, ci si aspetta che un oggetto anch'esso isotropo, abbia le stesse dimensioni radiale e trasversale. La distanza angolare e quella radiale, hanno una diversa dipendenza da Ω_Λ ; se fossero uguali si avrebbe perciò un vincolo molto forte sui parametri cosmologici.

Uguagliando i due tipi di distanza come definite dalla metrica di Robertson-Walker (1), si ottiene:

$$d\chi = \frac{d\chi}{dz} dz = r(\chi) d\vartheta \quad (3.4)$$

Esplicitando il valore di $d\chi/dz$ ottenuto dalla (1.35), per un oggetto isotropo si ricava:

$$r(\chi) R_0 H_0 E(z) = \frac{dz}{d\vartheta} \quad (3.5)$$

Il primo membro è calcolabile teoricamente, mentre il secondo è misurabile, sono perciò possibili test che confrontando i due risultati determinino la funzione $E(z)$. I primi candidati proposti come oggetti isotropi sono stati i cluster di galassie; un candidato migliore è la funzione di correlazione tra coppie di quasar.

3.5 Supernovae

Le supernovae di tipo Ia (SNe Ia) sono considerate candele standard poichè empiricamente è possibile trovare una relazione tra la magnitudine apparente durante il massimo di luminosità, e la loro magnitudine assoluta; questa relazione, come vedremo, permette di valutare a quale distanza si trovino. Le SNe Ia, luminosissime e poco soggette ad estinzione, sono il tipo di supernova che meglio si adatta al tipo di test che sarà discusso.

La magnitudine apparente m è legata alla distanza di luminosità d_L e alla magnitudine assoluta M dalla relazione:

$$m - M = 5 \log_{10} \frac{d_L}{Mpc} + 25 \quad (3.6)$$

La relazione tra la distanza ed il redshift, dipende perciò in modo evidente dai parametri cosmologici (Fig. 3.2). Un oggetto a z fissato, apparirà più luminoso in un universo dominato dalla materia, piuttosto che in uno dominato dalla costante cosmologica. Conoscendo la magnitudine assoluta di un campione di stelle, e quindi la loro distanza, è possibile definire il modello cosmologico che meglio si adatta ai dati sperimentali.

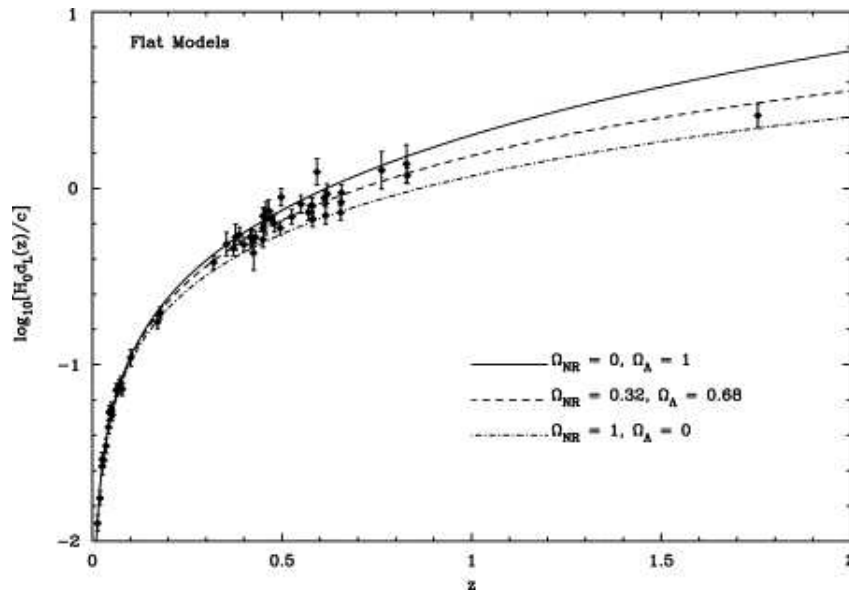


Figura 3.2: Distanze di luminosità in funzione del redshift per diversi modelli con Ω_Λ e Ω_m variabili [7]. È evidente che ad alti z si apprezza meglio la differenza tra i vari modelli cosmologici.

Questo metodo è soggetto ad errori sistematici come effetti di selezione, weak lensing, contaminazione dei campioni, e incertezze nei modelli teorici.

3.6 Anisotropia CMB

La radiazione di fondo di microonde (CMB) fu scoperta quasi per caso nel 1965 da Penzias e Wilson. Subito risultò chiaro che essa proveniva in maniera uniforme da tutte le direzioni, e che aveva una temperatura di circa 2.7 Kelvin. Attualmente questi risultati sono confermati con una precisione sempre crescente, ed il CMB rappresenta il più perfetto corpo nero che si conosca in natura.

L' unica deviazione evidente dalla sua isotropia, è data dal momento di dipolo dovuto al moto del nostro gruppo di galassie rispetto al CMB. Se si misura la sua temperatura, infatti, si scopre che la volta celeste risulta più calda dei 2.7 K misurati in una direzione, e più fredda in quella opposta, con una differenza totale di alcuni mK. Questo fenomeno non rappresenta una caratteristica intrinseca del fondo di microonde, ma è dovuto al fatto che la radiazione subisce blueshift nella direzione in cui ci stiamo muovendo e redshift nell' altra.

Tuttavia, la presenza di strutture nell' universo rende necessaria l' esistenza di anisotropie nello spettro della radiazione di fondo: le variazioni della temperatura

osservate sono dell'ordine di 10^{-5} , e la loro scarsa entità convalida l'ipotesi che abbiano avuto origine da fluttuazioni primordiali ancora nella fase lineare del loro sviluppo.

Per le prime centinaia di migliaia di anni dopo il Big Bang, l'universo è inizialmente costituito da un plasma di fotoni, leptoni e barioni; la materia ionizzata è in continua interazione con la radiazione attraverso processi di scattering di fotoni altamente energetici su elettroni e ioni che impediscono la formazione di materia neutra. Con il procedere dell'espansione dell'universo si ha un abbassamento della temperatura (sino agli attuali 2.7 K), ed una conseguente diminuzione di energia delle particelle; i processi di scattering tra fotoni e ioni non sono più energeticamente favoriti e si fanno più sporadici, permettendo la combinazione di elettroni e protoni (recombination) e la completa separazione di radiazione e materia.

Quando osserviamo le caratteristiche della radiazione di fondo, stiamo in realtà considerando i fotoni scarsamente energetici (microonde) provenienti dalle direzioni determinate dall'ultima interazione significativa della radiazione con la materia. L'orizzonte di questo evento definisce una superficie, detta di "last scattering", che si trova ad un redshift $z \sim 1100$.

La maggior parte delle disomogeneità in temperatura della radiazione di fondo sono state generate sulla superficie di last scattering quando le fluttuazioni primordiali hanno smesso di oscillare ed hanno cominciato a propagarsi. Tali anisotropie sono dovute principalmente a due fenomeni. A causa delle perturbazioni primordiali, si formano delle regioni a maggiore densità che esercitano un'azione attrattiva sul fluido di ioni fino a quando la pressione di radiazione inverte il processo; si ha così la propagazione di un'onda acustica che porta a ipotizzare un andamento oscillatorio delle anisotropie a piccole scale angolari. D'altra parte, i fotoni che finiscono in una buca di potenziale, perdono energia per uscirne e subiscono redshift gravitazionale. Analogamente, quando essi si trovano in regioni a minore densità, subiscono blueshift. Ne risultano perciò punti caldi e punti freddi nella distribuzione della temperatura del CMB.

Per analizzare le anisotropie del fondo di microonde possiamo decomporre le fluttuazioni della temperatura in armoniche sferiche [8]:

$$\frac{\delta T}{T}(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_l^m(\vartheta, \varphi) \quad (3.7)$$

dove la temperatura del corpo nero è della forma:

$$T(\vartheta, \varphi) = T_o \left[1 + \frac{\delta T}{T}(\vartheta, \varphi) \right] \quad (3.8)$$

con $T_0 = 2.728 \pm 0.004 K$ [8]. Lo spettro di potenza corrispondente è dato da $C_l = \langle |a_{lm}|^2 \rangle$, dove la media è intesa su un ensamble di universi descritti da diversi set di parametri cosmologici.

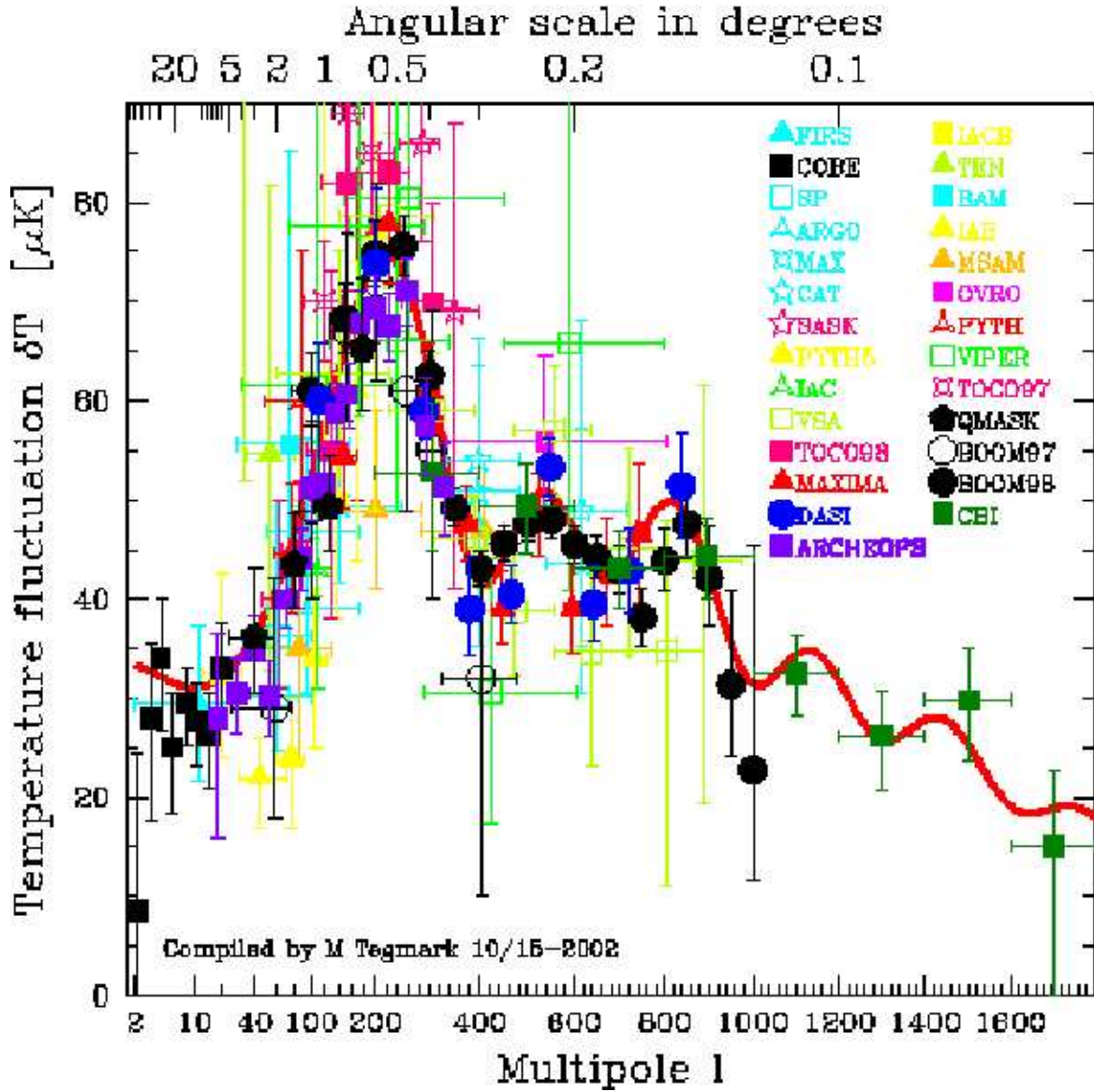


Figura 3.3: Spettro della radiazione fossile ottenuto dai dati del centro Max Tegmark per l' analisi del CMB (2002).

Lo studio di questo spettro rappresenta una notevole fonte di informazioni sulle condizioni dell' universo alle sue origini e sui valori dei parametri cosmologici; le posizioni dei picchi dipendono infatti dal modello cosmologico adottato. Per quanto riguarda il primo picco, ad esempio, si ha:

$$l \sim \vartheta_{picco} \propto \begin{cases} \Omega_m^{1/2} & se \quad \Omega_\Lambda = 0 \\ \Omega_m^{-0.1} & se \quad \Omega_\Lambda + \Omega_m = 1 \end{cases} \quad (3.9)$$

L' angolo sotteso dal picco è abbastanza sensibile alla densità di materia nel caso di $\Omega_\Lambda = 0$, mentre lo è debolmente nel caso di un universo piatto, si può perciò stabilire in modo relativamente semplice la geometria dello spazio-tempo. Questa, infatti dipende in modo diretto dalle fluttuazioni della temperatura; se si assume che i fotoni della radiazione fossile si comportino come un gas adiabatico, la conservazione dell' energia impone [27]:

$$\frac{\delta T}{T} = -\frac{1}{3} \frac{\delta \rho}{\rho} \quad (3.10)$$

e considerando la relazione che intercorre tra campo gravitazionale Φ e densità di materia, si ottiene:

$$\frac{\delta T}{T} = -\frac{1}{3} \frac{\delta \Phi}{\Phi}$$

Tuttavia, poichè la dipendenza non è dai singoli parametri, ma da loro combinazioni, può accadere che diversi insiemi di valori permettano di fittare lo stesso spettro. È perciò necessario confrontare i risultati ottenuti dallo studio del CMB con quelli provenienti da metodi indipendenti.

Particolarmente interessanti sono le osservazioni su piccola scala angolare (grandi valori di l) corrispondenti a redshift più elevati, in quanto contengono informazioni sul contenuto di radiazione e materia nell' universo. Se si tiene conto dello spessore della superficie di last scattering ($\Delta z \sim 80$), dovuto al fatto che la ricombinazione non è un processo istantaneo, i valori tipici per i picchi di oscillazione sono da circa 0.3° a circa 0.5° , ovvero a scale angolari molto difficili da indagare. Le osservazioni più precise, quindi, riguardano per ora solo i primi tre picchi che si trovano a scale angolari dell' ordine di qualche grado.

3.7 Età dell' universo

L' equazione (1.34) permette di esaminare la variazione dell' età dell' universo al variare dei parametri cosmologici. Si può trovare per questa, una soluzione analitica approssimata [7]:

$$H_0 t_0 = \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}} \approx \frac{2}{3}(0.7\Omega_m - 0.3\Omega_\Lambda + 0.3)^{-0.3} \quad (3.11)$$

Fissata la costante di Hubble, un universo aperto risulta più vecchio di un universo piatto con le stesse percentuali di materia ed energia del vuoto. Per un universo piatto, invece, l'età aumenta al crescere della costante cosmologica.

Nella Tabella 2 [6] sono riportate le età di un universo piatto (in Gyr) per diverse combinazioni di Ω_m e Ω_Λ , assumendo $H_0 = 70 \pm 8 Gyr^{-1} = 70 \pm 8 km\ sec^{-1} Mpc^{-1}$:

Ω_m	Ω_Λ	$t_0(\text{Gyr})$
1	0	9.7 ± 1
0.2	0.8	15.3 ± 1.5
0.3	0.7	13.7 ± 1.4
0.35	0.65	12.9 ± 1.3

Dalle osservazioni dei più antichi ammassi globulari si stima un limite inferiore per l'età dell'universo di circa 13.5 ± 1.5 Gyr [7]. Tale risultato è in aperta contraddizione con l'ipotesi di un universo di sola materia, e sembra favorire la combinazione $\Omega_m = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$.

Capitolo 4

Osservazioni

4.1 Supernovae

I primi risultati significativi nella determinazione della costante cosmologica sono stati ottenuti dallo studio di supernovae Ia [9, 13, 14]. Tali osservazioni, usando le supernovae come candele standard, hanno studiato la relazione tra la distanza di luminosità già definita ed il redshift. Manipolando l'equazione (1.37) e sviluppandola al secondo ordine si ottiene:

$$d_L H_0 = z + z^2 \left(\frac{1 - q_0}{2} \right) + \mathcal{O}(z^3) \quad (4.1)$$

dove q_0 è il parametro di decelerazione definito da $q_0 \equiv -\ddot{a}(t_0)a(t_0)/\dot{a}^2(t_0) = \Omega_m(t_0)/2 - \Omega_\Lambda(t_0)$ [9]. Il termine lineare permette di elaborare una tecnica per fissare la costante di Hubble, mentre ad alti redshift, quando il secondo termine domina, è possibile determinare il valore del parametro di decelerazione e quindi di una combinazione lineare di Ω_m e Ω_Λ . Per evitare possibili errori connessi all'incertezza sulla costante di Hubble, la quantità effettivamente misurata è il modulo di distanza, ovvero la differenza tra la magnitudine apparente e la magnitudine assoluta (equazione 3.6), in quanto esso consente di estrapolare dati indipendentemente dal valore di H_0 . Se si considera che l'incertezza sul modulo di distanza è data da $\Delta m = 5 \log_{10} \frac{d_L}{Mpc} + 25$, allora è possibile ricavare il parametro di decelerazione con una precisione di $\Delta q_0 \approx 0.9 \Delta m / z$ [9]. Quindi, anche con una singola osservazione a $z = 0.5$ ed un errore sulla magnitudine di $\sigma = 0.15$ mag, si riesce ad ottenere un errore $\Delta q_0 = 0.27$. Una tale precisione permette di distinguere entro 2σ il caso di un universo piatto ($q_0 = 0.5$) dal caso di un universo vuoto ($q_0 = 0$), anche se, per redshift di 0.5 il termine al terzo ordine in z nella (4.1) non può essere trascurato.

Per stabilire in quali range di redshift si ha una maggiore dipendenza dai parame-

tri cosmologici, è utile esaminare la variazione della differenza del modulo di distanza rispetto al caso di $\Omega = 0$ per diverse combinazioni di Ω_m e Ω_Λ (Figura 4.1).

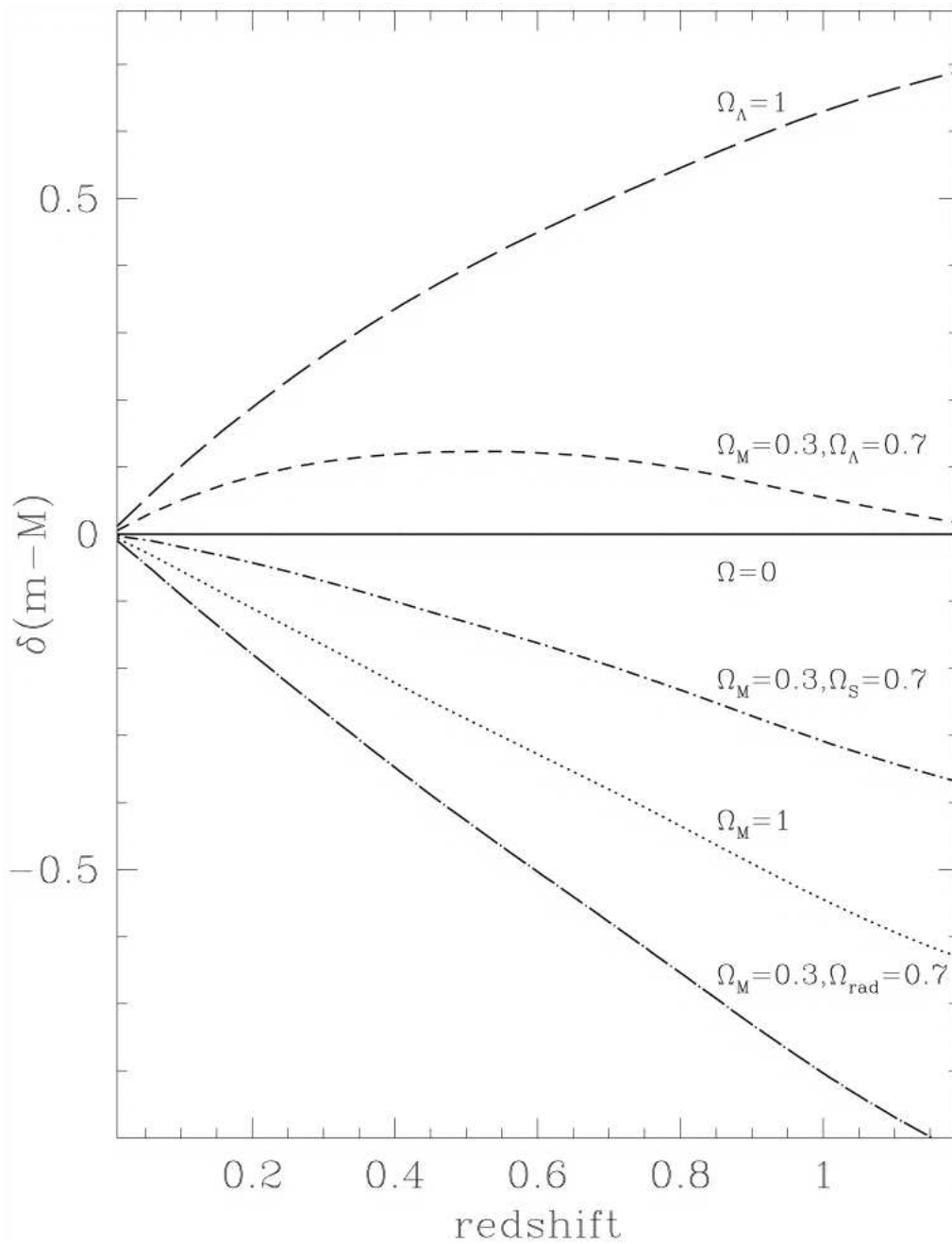


Figura 4.1: Differenze nella relazione (D_L, z) per diversi modelli cosmologici, espresse come differenze dal caso di un universo vuoto con $\Omega = 0$ [9].

Dalla figura 4.1 risulta evidente che le osservazioni eseguite per $z \gtrsim 1$ sono potenzialmente le più significative. Data la difficoltà delle misure e dei modelli teorici, si preferiscono osservazioni nell'intervallo $0.35 < z < 0.55$ dove la sensibilità agli effetti cosmologici è comunque notevole.

Nonostante le supernovae Ia mostrino una forte correlazione tra la magnitudine massima e il rate con cui la loro luminosità si affievolisce [9, 13], la calibrazione delle distanze sfruttando questa caratteristica è soggetta all'incertezza sull'altezza del picco e a diversi errori sistematici [9, 13, 14] dovuti ad estinzione, arrossamento, lensing debole e ad altri fenomeni. Nella valutazione dell'errore con cui si ricavano i parametri cosmologici, è perciò necessario stimare con quale precisione si riescono a determinare le grandezze fisiche in gioco.

Una prima correzione da fare riguarda la diminuzione dell'intensità del segnale a causa della materia interstellare. In generale ci si aspetta che l'estinzione per oggetti vicini sia molto minore che per oggetti lontani, tuttavia sembra che le supernovae ad alto z siano relativamente immuni a questo effetto [9]; poichè solo poche tra quelle osservate presentano uno spettro arrossato, è possibile determinare la loro luminosità con una precisione di circa un decimo di magnitudine. Tuttavia, per ottenere un risultato così accurato, è comunque necessario correggere individualmente gli elementi del campione che presentano arrossamento. Poichè le supernovae di tipo Ia mostrano, al massimo della luminosità, un range di valori abbastanza stretto per l'indice di colore (B-V), è possibile ricavare l'estinzione $E(B-V)$ da un confronto dei fit delle curve di luce osservate nel blu (B) e nel violetto (V). Il valore così ottenuto, però, non è assoluto, ma relativo all'estinzione media del campione, in quanto non viene attuata nessuna calibrazione con set di supernovae con spettri non arrosati. Per migliorare la precisione della correzione si itera il procedimento visto [9].

Anche l'evoluzione non sembra compromettere eccessivamente le misure di distanza ottenute con questa tecnica. Lo studio delle proprietà di supernovae formatesi in galassie a spirale ed ellittiche [11], dove i progenitori hanno età medie piuttosto diverse, dimostra che non esiste una dipendenza ovvia della luminosità dall'età della popolazione stellare in cui risiedono le supernovae. Alla stessa conclusione si arriva attraverso l'analisi delle caratteristiche spettrali delle SNe Ia e attraverso lo studio delle composizioni iniziali e della metallicità delle nane bianche progenitrici [15].

Una fonte di errore più evidente è l'incertezza della magnitudine apparente dovuta allo spostamento della lunghezza d'onda della luce. Per tener conto di questo fenomeno si ricorre a quella che è detta correzione-K [9]: essa è necessaria soprattutto per alti valori del redshift, ed è definita dalla relazione:

$$m_i(z) = m_i(z = 0) + K_i(z) \quad (4.2)$$

dove il pedice i si riferisce al filtro usato per l'osservazione. Per un oggetto con uno spettro $F(\lambda)$ osservato attraverso un filtro di sensibilità $S_i(\lambda)$, la magnitudine a $z = 0$ è data da:

$$m_i(z=0) = -2.5 \log \frac{\int S_i(\lambda) F(\lambda) d\lambda}{\int S_i(\lambda) d\lambda} + \mathfrak{S}_i \quad (4.3)$$

dove \mathfrak{S}_i è il punto zero del filtro, si può dimostrare [10] perciò che la correzione-K è della forma:

$$K_i = 2.5 \log \left\{ (1+z) \frac{\int S_i(\lambda) F(\lambda) d\lambda}{\int F[\lambda/(1+z)] S_i(\lambda) d\lambda} \right\} \quad (4.4)$$

Le correzioni sono complicate ulteriormente dalla dipendenza temporale del loro spettro, si preferisce perciò usare dei filtri che apportano una correzione diretta alla differenza tra la luminosità della supernova con redshift e quella che si avrebbe se fosse osservata in un filtro standard a $z=0$. Perlmutter et al. [13] hanno infatti dimostrato che compiere osservazioni a $z=0.5$ con un filtro R_C , è equivalente a compierle a riposo con un filtro B. La correzione da fare in questo caso deve quindi avere una forma diversa dalla (4.4), che tenga conto dell' errore commesso nel confrontare le magnitudini ottenute con due diversi filtri. Tale correzione è data da [9]:

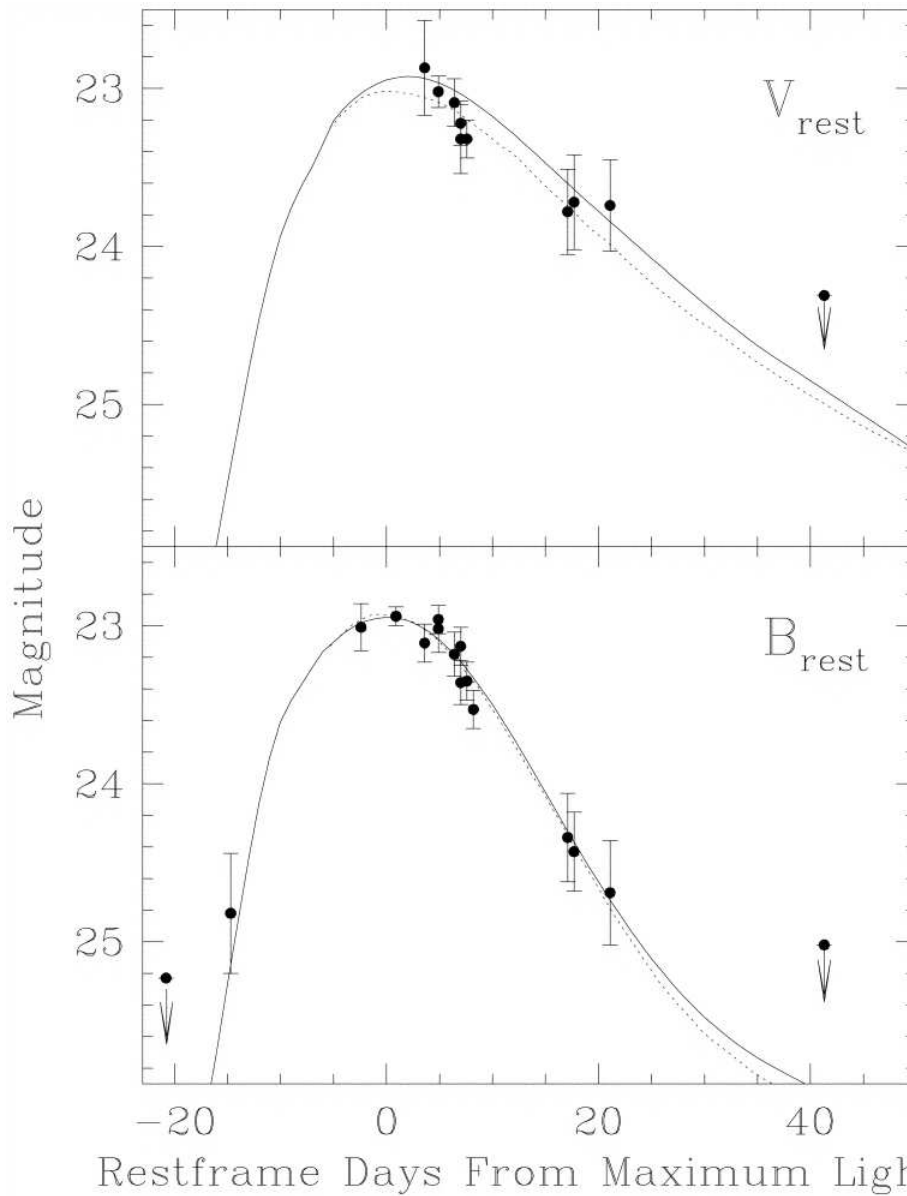
$$K_{ij}(z) = 2.5 \log \left\{ (1+z) \frac{\int F(\lambda) S_i(\lambda) d\lambda}{\int F[\lambda/(1+z)] S_i(\lambda) d\lambda} \right\} + \mathfrak{S}_j - \mathfrak{S}_i \quad (4.5)$$

dove i e j si riferiscono alla coppia di filtri usata. Valutando i dati così ottenuti, si ottengono correzioni-k pressochè costanti e dell' ordine di qualche centesimo di magnitudine.

Anche il lensing gravitazionale debole potrebbe essere causa di incertezza nella magnitudine, e per tenerne conto è stato calcolato [12] l' errore che ne deriverebbe nel peggior caso possibile. Se l' universo fosse costituito da oggetti distribuiti casualmente con masse superiori a $0.01 M_\odot$, per $\Omega_m = 1$ a $z = 0.5$ le supernovae sarebbero rese dal lensing 0.15 mag più deboli; l' errore diminuisce al decrescere di Ω_m [9], mentre in generale diventa trascurabile rispetto agli altri trattati, per $z \gtrsim 1$.

Le osservazioni sono inoltre corrotte da alcuni effetti di selezione tra cui il Malmquist bias [9, 13]. Esso consiste nello spostamento del valor medio di una distribuzione verso elementi intrinsecamente più luminosi, a causa dell' impossibilità tecnica di rivelare oggetti deboli ad alti redshift. Anche dopo una correzione della curva di luce nella zona non osservata, il campione risulta incompleto; le osservazioni infatti, sono ripetute ad intervalli fissi di tempo, e potrebbero non essere rivelate supernovae formatesi durante il periodo di non attività del telescopio, o supernovae il cui picco è al di sotto della soglia di luminosità del rivelatore.

Figura 4.2: Curva di luce di una SN Ia nel V (sopra) e nel B (sotto) [9].



Una tra le prime misure di parametri cosmologici usando supernovae, è stata affrontata nel 1998 da Schmidt et al. [9] dell' High-z Supernova Search Team (HSST), basandosi sulle osservazioni della supernova 1995K, una delle 30 supernove da essi rivelate. Con le correzioni suddette ai dati sperimentali e ipotizzando un universo piatto composto da materia e costante cosmologica, si ottiene $\Omega_m = 0.4^{+0.5}_{-0.4}$ e $\Omega_\Lambda = 0.6^{+0.4}_{-0.5}$; un universo con $\Omega_m = 1$ è quindi escluso con un livello di confidenza maggiore dell' 80%. La Figura 4.3 mostra il livello di precisione raggiungibile con un campione di 40 supernovae misurate con la stessa precisione di SN 1995K.

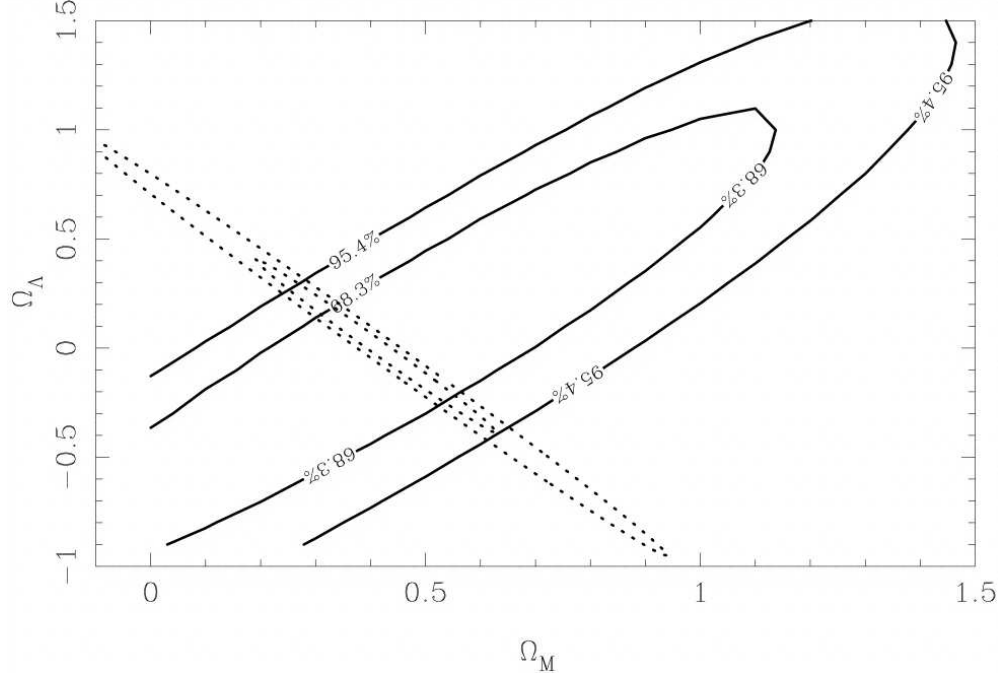


Figura 4.3: Contorni di confidenza al 68.3% ed al 95.4% previsti per la misura contemporanea di Ω_m e Ω_Λ da un campione di trenta SNe Ia a $z = 0.5$ e dieci a $z = 1$ [9]. Le linee tratteggiate riproducono i contorni di incertezza predetti per le osservazioni delle anisotropie della radiazione fossile.

Risultati più raffinati sono stati ottenuti combinando le osservazioni del “Supernova Cosmology Project” (SCP) di 42 supernovae nel range $0.18 < z < 0.83$, e del” High- z Supernovae Search Team” (HSST) di 14 supernovae nel range di $0.16 < z < 0.62$ e 34 SNe vicine[7].

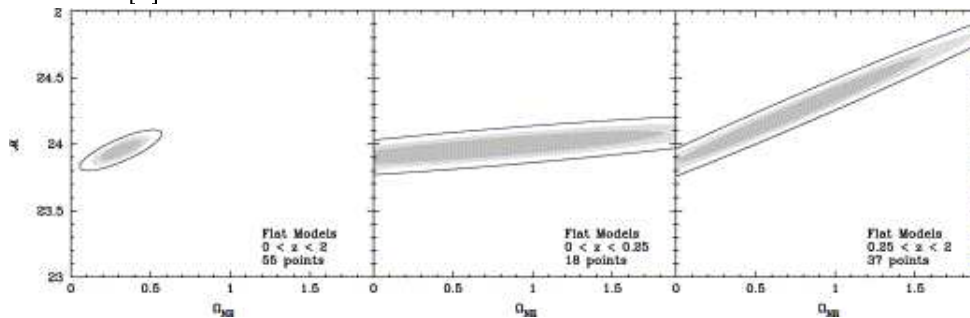


Figura 4.4: Contorni di confidenza al 68%, 90% e 99% per le supernovae Ia nel caso di universo piatto [7]. A destra sono riportati i dati relativi alle supernovae ad alto z , al centro quelli relativi alle supernovae a basso z , mentre a sinistra sono stati combinati entrambi i campioni.

L' insieme di oggetti osservati può essere suddiviso in modo naturale in due classi, una di supernovae a basso redshift ($0 < z \lesssim 0.25$) corrispondenti ad una fase

di accelerazione dell' universo, e l' altra di supernovae ad alto redshift ($0.25 \lesssim z \lesssim 2$) corrispondenti ad una fase di decelerazione. Se si cerca di estrarre informazioni dai due set separatamente non si può escludere il caso $\Omega_\Lambda = 0$, $\Omega_m = 1$, come appare evidente osservando i contorni di confidenza in Figura 4.4.

Dopo aver subito le opportune correzioni riguardanti l' estinzione, l' evoluzione ed altri errori sistematici, i due insiemi sono risultati statisticamente compatibili, permettendo il loro uso combinato nella determinazione di parametri cosmologici. Si può perciò procedere con fit separati per i due set di dati, o tramite una loro analisi globale.

Nel primo caso, l'intersezione dei due risultati [7] definisce una regione di best-fit (Padmanabhan [13]) centrata attorno a $\Omega_m \approx 0.3$ nel caso di $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$, e dimostra l' esistenza di una costante cosmologica diversa da zero con una confidenza del 99% per un universo piatto.

L' altro tipo di approccio è stato intrapreso da Riess et al. [14] nel 1998 e da Perlmutter et al. [13] nel 1999. Riess et al. hanno determinato la distanza di luminosità con due differenti metodi che usano relazioni tra la luminosità e la forma delle curve di luce dello stesso campione di 27 supernovae Ia vicine e 10 supernovae alto z ($0.16 \leq z \leq 0.62$).

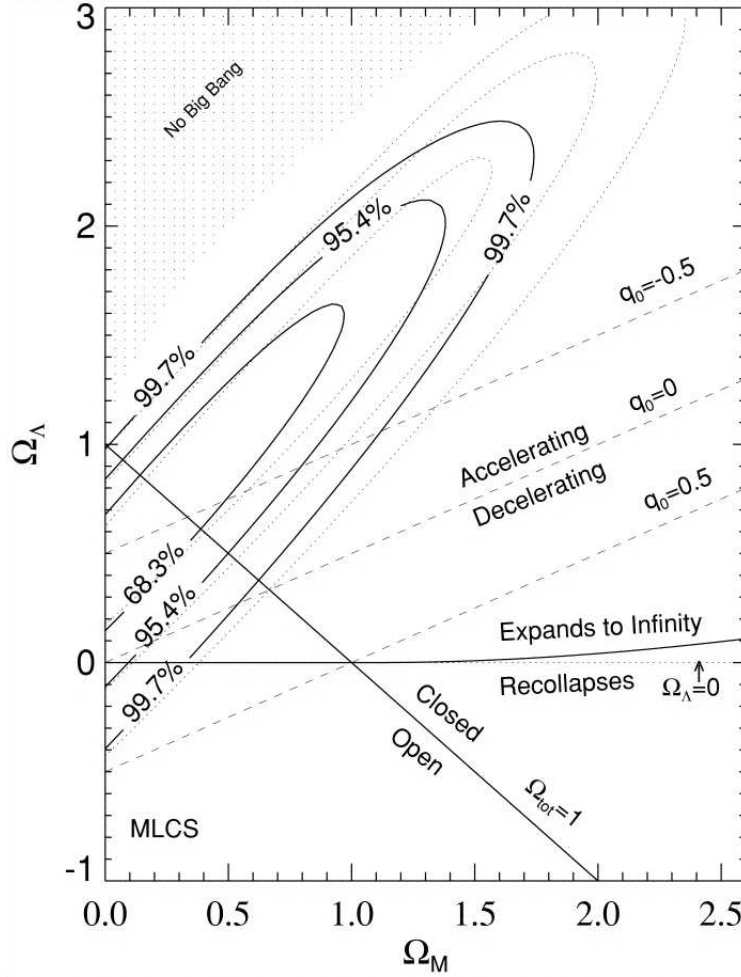
Il metodo "template fitting" [11] è basato sulla costruzione di curve di luce fiduciali da confrontare con quelle sperimentali. Le osservazioni vengono corrette dividendo la scala temporale per $1+z$ per rimuovere l' effetto della dilatazione dei tempi, e sottraendo alla magnitudine il termine della correzione-K. Le curve così ottenute vengono caratterizzate da una serie di parametri che saranno ricavati dalla sovrapposizione di queste con quelle osservate. Sono definiti perciò, il tempo t_0^k e la magnitudine m_0^k del picco per un certo filtro k ($k = B, V, I$) e la perdita di magnitudine Δm_T^k nei primi T giorni dopo il picco nel blu (i valori di T sono in genere 15, 20 e 60). È inoltre significativo il parametro di intersezione t_2^B dato dal tempo corrispondente al punto di incontro della retta di fit della decrescita esponenziale (prima fase di declino) della magnitudine e di quella di fit della fase di declino (seconda fase). A volte nell' infrarosso si osservano due massimi di luminosità dopo il massimo nel blu; è necessario perciò, introdurre due ulteriori coppie di parametri (t_1^I , m_1^I) e (t_2^I , m_2^I) che descrivono la magnitudine dei picchi ed il giorno in cui si presentano.

Il metodo MLCS [16] (Multicolor Light Curve Shape) è un metodo iterativo che consiste nella determinazione contemporanea delle curve di luce e di colore di supernovae nell' ipotesi che queste siano della forma:

$$\mathbf{m}_V = \mathbf{M}_V + \mathbf{R}_V \Delta + \mathbf{Q}_V \Delta^2 + \mu_V \quad (4.6)$$

$$\mathbf{m}_{B-V} = \mathbf{M}_{B-V} + \mathbf{R}_{B-V} \Delta + \mathbf{Q}_{B-V} \Delta^2 + E_{B-V} \quad (4.7)$$

dove Δ è la differenza tra il massimo di luminosità delle supernovae usate come modello fiduciale e quelle osservate, le coppie \mathbf{R}_V , \mathbf{R}_{B-V} e \mathbf{Q}_V , \mathbf{Q}_{B-V} sono vettori di correlazione tra la forma delle curve e rispettivamente Δ e Δ^2 , μ_V è il modulo di distanza apparente e E_{B-V} è l'eccesso di colore. I vettori dei coefficienti \mathbf{R}_V , \mathbf{R}_{B-V} , \mathbf{Q}_V , \mathbf{Q}_{B-V} e le magnitudini fiduciali \mathbf{M}_V , \mathbf{M}_{B-V} sono stimate da un campione di supernovae vicine ben calibrate e sono poi utilizzati per determinare i parametri Δ , μ_B , E_{B-V} e t_{max} per una le supernovae ad alto z . Si parte da una stima iniziale di questi parametri, e tramite un test del minimo χ^2 si trovano delle condizioni sui vettori; successivamente si assumono validi i coefficienti di correlazione così ricavati, e tramite un ulteriore test del χ^2 si ricavano valori più precisi per i parametri suddetti. Si itera il procedimento fino alla convergenza.



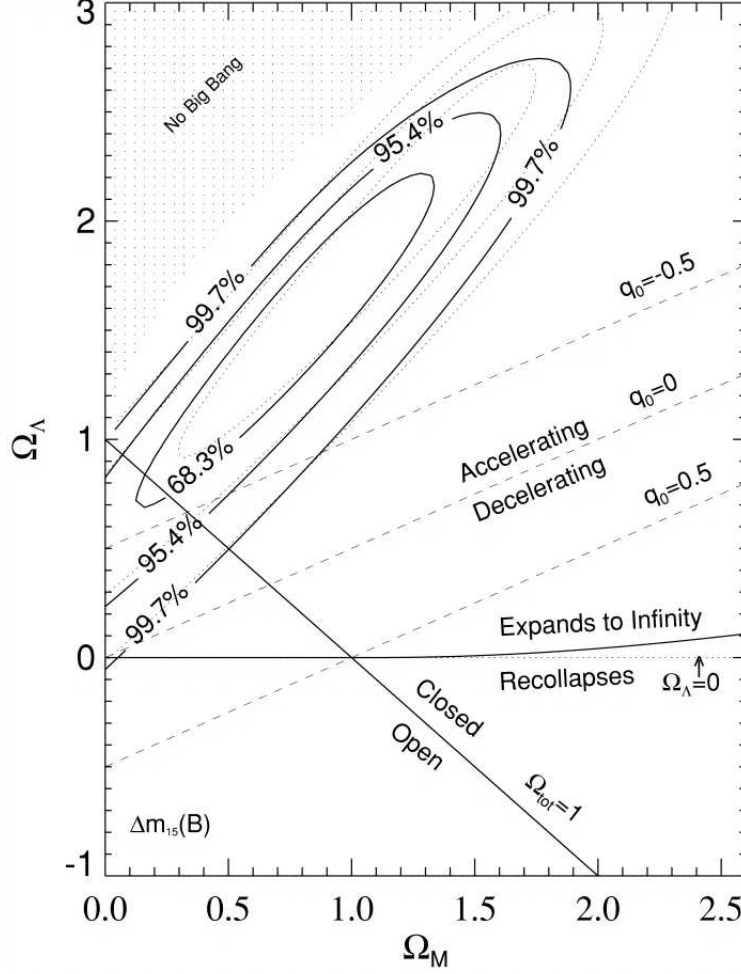


Figura 4.5: Contorni di confidenza $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ per i dati relativi ad un set di SNe Ia, rielaborati tramite il metodo MLCS (sopra) e tramite il metodo “template fitting” (alla pagina precedente) [14]. Le diverse regioni rappresentano specifici scenari cosmologici.

In entrambi i casi, per stabilire i contorni di verosimiglianza entro cui sono validi i fit, è stato usato un approccio probabilistico. Per un set fissato di moduli di distanza μ_0 , la funzione di densità di probabilità per i parametri cosmologici, è data dal teorema di Bayes

$$p(H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda \mid \mu_0) = \frac{p(\mu_0 \mid H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda)p(H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda)}{p(\mu_0)} \quad (4.8)$$

con $p(H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda)$ e $p(\mu_0)$ costanti per ipotesi poichè non ci sono a priori vincoli sui parametri, e quindi $p(H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda \mid \mu_0) \propto p(\mu_0 \mid H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda)$. Fissati i valori di H_0 , Ω_m e Ω_Λ , assumendo che i moduli di distanza siano variabili indipendenti e distribuite normalmente, la funzione di probabilità per μ_0 non è altro che il prodotto di Gaussiane:

$$p(H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda \mid \mu_0) \propto \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right) \quad (4.9)$$

con

$$\chi^2(H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda) = \sum_i \frac{[\mu_{p,i}(z_i; H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda) - \mu_{0,i}]^2}{\sigma_{\mu_{0,i}}^2 + \sigma_v^2} \quad (4.10)$$

dove inserendo σ_v si tiene conto del fatto che l'errore sul modulo di distanza dipende anche dalla dispersione nella distribuzione del redshift. Per ottenere la funzione di massima verosimiglianza bidimensionale nel piano $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$, la (4.9) va normalizzata e marginalizzata rispetto ad H_0 in modo da eliminare la dipendenza dei parametri da questa. La distribuzione di probabilità per Ω_m e Ω_Λ , è quindi della forma

$$p(\Omega_m, \Omega_\Lambda \mid \mu_0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda \mid \mu_0) dH_0 \quad (4.11)$$

I risultati ottenuti dai due fit sono rispettivamente $\Omega_m = 0.24_{-0.24}^{+0.56}$, $\Omega_\Lambda = 0.72_{-0.48}^{+0.72}$ per il MLCS e $\Omega_m = 0.80_{-0.48}^{+0.40}$, $\Omega_\Lambda = 1.56_{-0.70}^{+0.52}$ per il metodo template (Fig 4.5). Entrambi i metodi favoriscono un valore non trascurabile e positivo per la costante cosmologica.

Perlmutter et al. [13], del Supernova Cosmology Project (SCP), hanno analizzato le osservazioni di 42 supernovae con $0.18 < z < 0.83$ insieme ai dati di supernovae con $z < 0.1$ tramite un fit della forma:

$$m_B^{eff} \equiv m_R + \alpha(s - 1) - K_{BR} - A_R \quad (4.12)$$

che cerca di ricostruire il valore effettivo della magnitudine apparente (nel blu) apportando delle correzioni al valore misurato m_R (nel rosso). Le curve di luce delle supernovae osservate devono essere scalate di un fattore $1+z$ per eliminare l'effetto della dilatazione temporale; è come se la scala temporale fosse “stirata” fino a farla combaciare con quella del nostro sistema di riferimento. Il fattore di stretch s quantifica la differenza tra queste due scale temporali. Gli altri due termini tengono conto rispettivamente della correzione-K e dell'estinzione galattica che provoca l'arrossamento.

La (4.12) può essere riscritta come

$$m_B^{eff} = \mathcal{M}_B + 5 \log \mathcal{D}_L(z; \Omega_m, \Omega_\Lambda) \quad (4.13)$$

dove $\mathcal{M}_B \equiv M_B - 5 \log H_0 + 25$ e $\mathcal{D}_L \equiv H_0 d_L$; entrambe le quantità sono calcolate teoricamente o dedotte da un fit, quindi sono indipendenti dalla costante di Hubble.

Dal fit si ricavano contemporaneamente i parametri Ω_m , Ω_Λ , \mathcal{M}_B e α . Per stabilire l'intervallo di confidenza bidimensionale nel piano $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ si integra sui parametri restanti: $\varphi(\Omega_m, \Omega_\Lambda) = \int \int \varphi(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \mathcal{M}_B, \alpha) d\mathcal{M}_B d\alpha$.

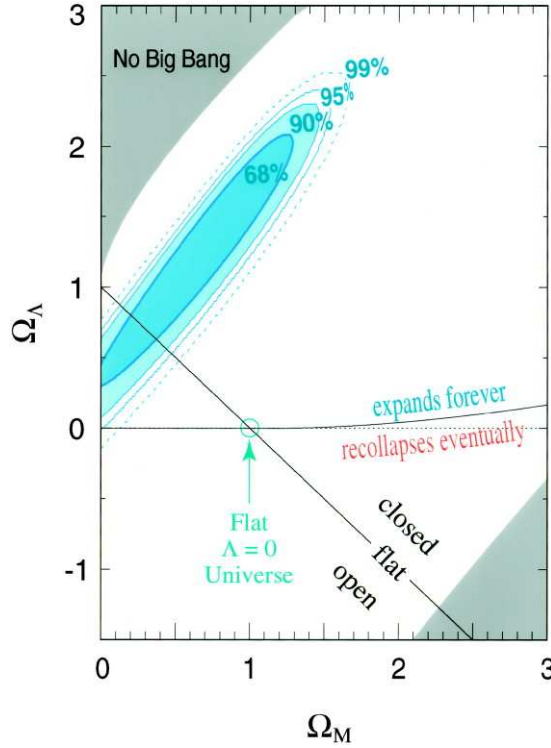


Figura 4.6: Contorni di confidenza per il best fit ottenuto da Perlmutter et al. [13].

La Figura 4.6 mostra che i dati non sono consistenti con l'ipotesi $\Lambda = 0$, e suggerisce che la costante cosmologica contribuisce in modo significativo alla densità di energia dell'universo.

La forma allungata delle ellissi (Fig 4.4) che determinano i contorni di confidenza suggerisce che le osservazioni preferiscono una particolare combinazione dei parametri che nulla ha a che vedere con le caratteristiche intrinseche delle supernovae. Essa è dovuta alla scarsa dipendenza della distanza di luminosità da Ω_Λ e Ω_m , quando la combinazione $q \equiv (0.8\Omega_m - 0.6\Omega_\Lambda)$ è compresa tra -0.3 e -0.1. Si può osservare inoltre che la curva definita da $H_0 d_L(z = 0.63) = \text{costante}$, è pressochè parallela all'andamento delle ellissi. Le osservazioni sono perciò sensibili ad una zona di valori corrispondente alla distanza \mathcal{D}_L per un valore del redshift centrale rispetto a quelli del campione di supernovae.

Il metodo di misura che impiega supernovae come candele standard è stato molto discusso. Le maggiori critiche sono dovute alla scarsa conoscenza teorica del processo di emissione delle supernovae e agli errori di tipo statistico legati alla loro analisi.

Un esempio significativo è dato dal confronto dei valori di Ω_m ottenuti con un set di 7 supernovae, e con lo stesso set più una supernova ad alto z ; nel primo caso si ha $\Omega_m = 0.94^{+0.34}_{-0.28}$, compatibile con l'unità, nel secondo $\Omega_m = 0.6 \pm 0.2$ [7]. I dati delle supernovae favoriscono inoltre le regioni con $(\Omega_m, \Omega_\Lambda) \sim (0.8, 1.5)$, non compatibili con osservazioni di natura diversa.

Il fatto che questo tipo di esperimenti selezioni una combinazione dei parametri ben precisa, suggerisce la necessità di confrontare i dati ottenuti con altre tecniche sensibili a diverse combinazioni dei parametri cosmologici.

4.2 Analisi delle anisotropie del CMB e delle strutture a larga scala

Le anisotropie del fondo di microonde possono essere analizzate considerando la funzione di autocorrelazione [19] definita da

$$C(\theta) = \left\langle \frac{\delta T}{T}(\alpha) \frac{\delta T}{T}(\alpha + \theta) \right\rangle \quad (4.14)$$

che misura il valor medio del prodotto delle fluttuazioni della temperatura in due direzioni separate da un angolo ϑ . Per piccoli angoli la (4.14) può essere espressa come somma di polinomi di Legendre $P_l(\vartheta)$:

$$C(\vartheta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=2}^{\infty} a_l^2 (2l+1) P_l(\cos \vartheta) \quad (4.15)$$

dove $a_l^2(l)$ rappresenta lo spettro di potenza delle fluttuazioni. Nelle analisi del CMB si cerca la forma di $a_l^2(l)$ che meglio si adatta alle osservazioni. Le ipotesi standard di lavoro sono quella di fluttuazioni iniziali adiabatiche e Gaussiane, in modo da non render necessaria l'introduzione di correlazioni di ordine superiore, e quella di uno spettro di potenza con indice spettrale n . Se si considera sia la componente scalare dovuta alle fluttuazioni della densità, che quella tensoriale generata da fluttuazioni della curvatura dello spazio-tempo, lo spettro del CMB può essere descritto da un set di parametri [19] tra cui la densità di curvatura Ω_k , la densità di costante cosmologica Ω_Λ , la densità di materia Ω_m con componenti Ω_b (materia barionica) e Ω_{CDM} (Cold Dark Matter) ed il parametro di Hubble h ($h \equiv H_0/100$). Varie combinazioni dei parametri citati possono essere ricavate dallo studio delle posizioni dei picchi dello spettro e dalle loro altezze relative; in particolare il rapporto tra le altezze del primo e del secondo picco è sensibile al valore di Ω_b . Tuttavia non è possibile determinare

univocamente i valori dei parametri cosmologici dalla sola analisi della radiazione di fondo a causa di quella che viene detta degenerazione geometrica.

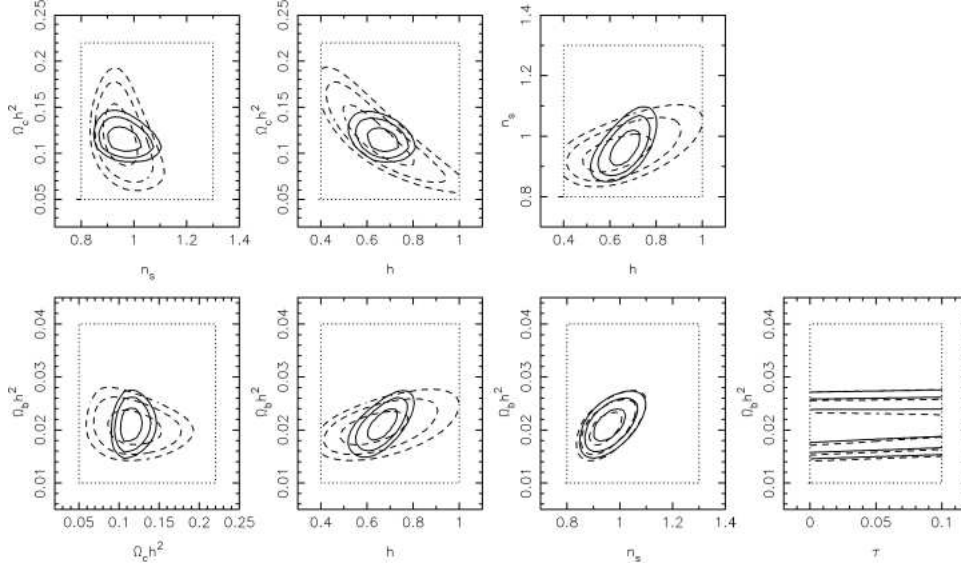


Figura 4.7: Contorni di confidenza bidimensionali per diverse coppie di parametri relativi al CMB (linee tratteggiate) e al CMB combinato al 2dFGRS (linee continue)[20].

Se si considera un modello in cui lo spettro delle perturbazioni iniziali, la densità di materia ($\omega_m \equiv \Omega_m h^2$) e quella di materia barionica ($\omega_b \equiv \Omega_b h^2$) sono tenute fisse, variando invece le densità di costante cosmologica e di curvatura in modo da ottenere una distanza angolare costante dalla superficie di last scattering, si possono ottenere spettri identici per le anisotropie della radiazione di fondo. Assumendo $\Omega_k = 0$, la degenerazione è solo parzialmente eliminata come si può osservare analizzando la forma dei contorni di confidenza nel piano $(\Omega_m - h)$. Solo la densità di materia barionica risulta vincolata dai dati del CMB; se infatti si osservano gli intervalli di confidenza nel piano $(\tau, \Omega_b h^2)$, dove τ è la profondità ottica, si può notare che questi sono paralleli all'asse τ , e individuano un valore centrale $\Omega_b h^2 = 0.0205 \pm 0.0022$ [20] (Fig.4.7). Nel caso precedente, in cui non è stata considerata la componente tensoriale, le osservazioni risultano fortemente sensibili alla combinazione $\Omega_m h^3 = \text{costante}$ (Fig.4.8).

Per comprendere la causa della degenerazione geometrica, è utile prendere in considerazione la dimensione dell'orizzonte attuale (in forma approssimata) [23]:

$$r_H(z=0) \propto \frac{\Omega_m^{0.1}}{\sqrt{\varpi_m}} \quad (4.16)$$

quindi, all'aumentare di Ω_m lasciando ϖ_m fisso, la forma e le altezze relative dei

picchi dello spettro non cambiano, e poichè $l \propto r$, l' unico effetto è quello di uno spostamento dei picchi verso valori di l maggiori. Tuttavia, la dipendenza di l da Ω_m è molto debole, e questo spiega perchè l' assunzione di un universo piatto non è sufficiente a costringere i dati; un cambiamento sostanziale nella densità di materia produce infatti uno spostamento dei picchi talmente piccolo che può essere compensato facilmente da una piccola variazione di ϖ_m . Per eliminare questa degenerazione, che in realtà riguarda una qualsiasi coppia tra i parametri $\Omega_m, \varpi_m, h, \Omega_\Lambda$, è necessario confrontare i dati relativi al CMB con quelli di un esperimento sensibile ad un' altra combinazione degli stessi parametri.

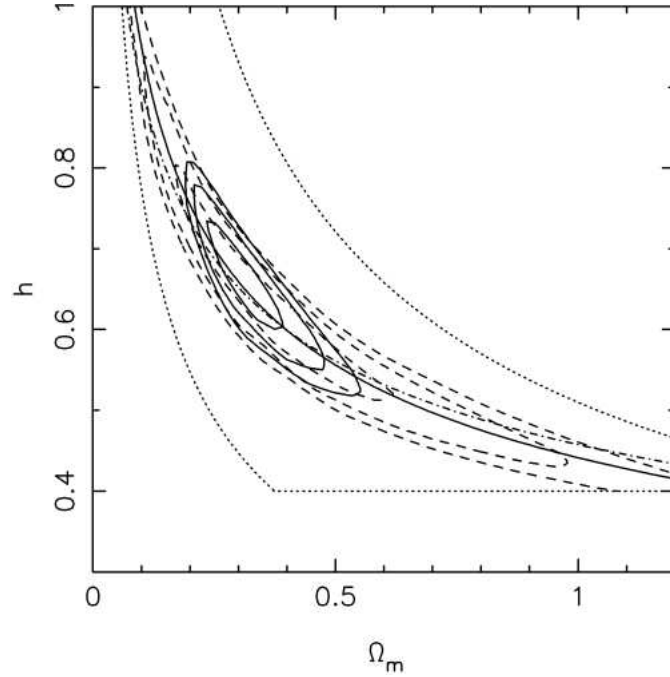


Figura 4.8: Contorni di verosimiglianza nel piano (Ω_m - h) relativi ai dati mostrati in Figura (4.7) considerando solo la componente scalare [20].

Anche le fluttuazioni di densità di materia dovute all' azione contrapposta di attrazione gravitazionale, pressione di radiazione ed espansione dell' universo, possono essere decomposte in armoniche sferiche, ed anche in questo caso le osservazioni sperimentali sono basate sullo studio della funzione di autocorrelazione:

$$\xi(r) = \langle \delta(r_1) \delta(r_1 + r) \rangle \quad (4.17)$$

dove $\delta(r_1)$ e $\delta(r_1 + r)$ sono le ampiezze delle perturbazioni in due punti posti ad una distanza scalare r . Poichè le fluttuazioni nella distribuzione di materia hanno la stessa origine delle fluttuazioni della temperatura, i due spettri possono essere utilizzati

per ricavare vincoli sugli stessi parametri. Ci si aspetta che il confronto dei dati ottenuti da questi due tipi di esperimenti possa eliminare la degenerazione intrinseca all'analisi della radiazione cosmica. Percival et al. [20] in (MNRAS 337) hanno eseguito un'analisi dei dati più recenti di 2dFGRS (Two Degree Field Galaxy Redshift Survey) e del CMB (per il CMB sono stati analizzati i dati di COBE, BOOMERANG, MAXIMA, VSA e CBI [28, 29, 30, 31, 32]); questa ha evidenziato una sensibilità dell' esperimento 2dFGRS alla combinazione $\Omega_m h = \text{costante}$. Nella survey 2DFGRS sono state osservate e catalogate galassie e strutture a larga scala in genere. Assumendo che lo spettro di potenza delle galassie osservate sia proporzionale allo spettro che descrive lo sviluppo lineare delle perturbazioni nella densità di materia, è possibile determinare i parametri cosmologici adattando lo spettro delle fluttuazioni di materia alla curva che descrive la distribuzione di galassie nell' universo.

Combinando i risultati del CMB e delle osservazioni delle strutture a larga scala, e considerando solo le componenti scalari dello spettro, si è ottenuta una densità di materia pari a $\Omega_m = 0.313 \pm 0.055$ [20], guadagnando una cifra significativa rispetto al valore ottenuto dalla sola analisi del CMB. I dati pongono anche un limite all' equazione di stato del vuoto: $w < -0.52$ al 99% (vedi Fig. 4.9).

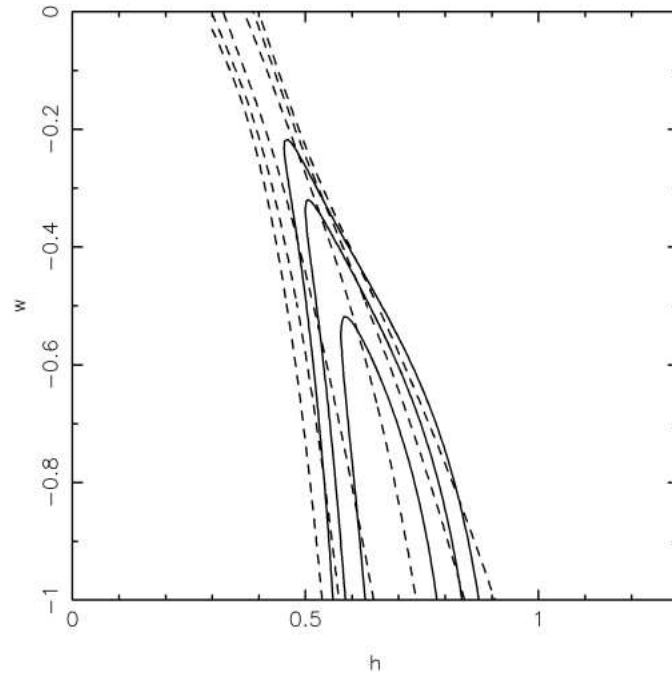


Figura 4.9: Contorni di verosimiglianza per l' equazione di stato della dark energy in funzione del parametro di Hubble [20]. Le linee tratteggiate si riferiscono ai dati del 2dFGRS e del CMB combinati, mentre le linee continue includono anche i dati dell' HST.

Si può inoltre osservare che, considerando o meno la componente tensoriale, i risultati

di questo studio rimangono pressochè invariati. Le tecniche di misura adottate in questi due tipi di esperimento, sono totalmente indipendenti da quelle usate per le supernovae, e costituiscono perciò una forte prova dell' esistenza di una costante cosmologica non nulla.

4.3 Analisi combinata dello spettro del CMB e delle supernovae di tipo Ia

L' esistenza di una costante cosmologica diversa da zero non è il solo modo per interpretare l' abbondanza di dark energy nell' universo. Una proposta alternativa è costituita dall' introduzione di un nuovo tipo di materia detta quintessenza. Questa è associata ad un campo scalare Q che evolve secondo un potenziale $V(Q)$ con equazione di stato data da [17]:

$$w_Q = \frac{\frac{\dot{Q}^2}{2} - V(Q)}{\frac{\dot{Q}^2}{2} + V(Q)} \quad (4.18)$$

La forma più generale di potenziale [17] che riproduca le osservazioni è data da

$$V(Q) = \frac{M^{4+\alpha}}{Q^\alpha} e^{(1/2)(kQ)^\beta} \quad (4.19)$$

dove $k = \sqrt{8\pi G}$ ed M è tale che attualmente si abbia $\rho_Q \equiv \rho_{crit}\Omega_Q$. Per diversi valori di α e β si hanno potenziali diversi e quindi diversi valori di w_Q , in particolare per $\alpha, \beta \neq 0$ e per piccoli valori di β attualmente vale la disuguaglianza $w_Q > -1$. Il fatto che w_Q possa assumere diversi valori influisce in modo diretto sulla nostra interpretazione delle leggi che regolano la dinamica dell' universo, soprattutto sulla determinazione del redshift per cui ha inizio l' accelerazione; al variare di w_Q si hanno perciò diversi andamenti della distanza angolare e di luminosità in funzione di z . Gli esperimenti basati sulle analisi combinate delle supernovae Ia e sull' analisi delle anisotropie della radiazione di fondo, sono sensibili a queste due quantità e rappresentano un possibile test per verificare la presenza di quintessenza nell' universo. La prima classe di esperimenti risulta particolarmente sensibile alla combinazione $\Omega_m - \Omega_\Lambda = 1$, mentre la seconda è sensibile alla combinazione $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$; gli intervalli di confidenza ottenuti nel piano $(\Omega_\Lambda - \Omega_m)$ sono quindi ortogonali rendendo il loro studio combinato particolarmente proficuo. Sfruttando questa proprietà, Corasantini e Copeland [17] hanno confrontato i dati ottenuti da Perlmutter et al. [13] per le Sn Ia, e quelli ottenuti dai progetti DASI e BOOMERANG per il CMB

per ottenere delle costrizioni su α , β , Ω_Q e w_Q con i vincoli $\alpha \in (1,10)$, $\beta \in (1,10)$, $\Omega_Q \in (0,1)$ e $\Omega_k = 1$.

Gli autori hanno analizzato l'andamento della magnitudine apparente e della distanza di luminosità delle supernovae calcolando la (4.13) e la (1.37) per diversi valori di α , β , e Ω_Q . In questo modo hanno ricavato una funzione gaussiana di verosimiglianza $\mathcal{L}(\alpha, \beta, \Omega_Q)$. Quando si considera la funzione unidimensionale per la densità di quintessenza si ottiene un massimo per $\Omega_Q = 1$, considerando invece gli intervalli di confidenza nel piano (α, β) , questi determinano il limite superiore $w_Q < -0.4$ nel caso di $\Omega_Q = 0.6$, compatibile con il risultato di Perlmutter per Ω_Λ . I valori ottenuti sono tutti entro un livello di confidenza di 2σ .

Lo stesso tipo di analisi può essere applicata allo studio delle posizioni l_1 , l_2 , l_3 dei primi tre picchi dello spettro della radiazione di fondo, imponendo i vincoli $\Omega_b h^2 \in (0.018, 0.026)$ e $n \in (0.9, 1.1)$ per la densità di materia barionica e per l'indice spettrale scalare (Fig4.10). Le posizioni dei picchi infatti, sono sensibili alle densità delle varie forme di materia nell'universo; il terzo picco, in particolare, è di notevole interesse in quanto fornisce informazioni solo sulla quantità di materia oscura presente, perchè indipendente dagli altri parametri cosmologici.

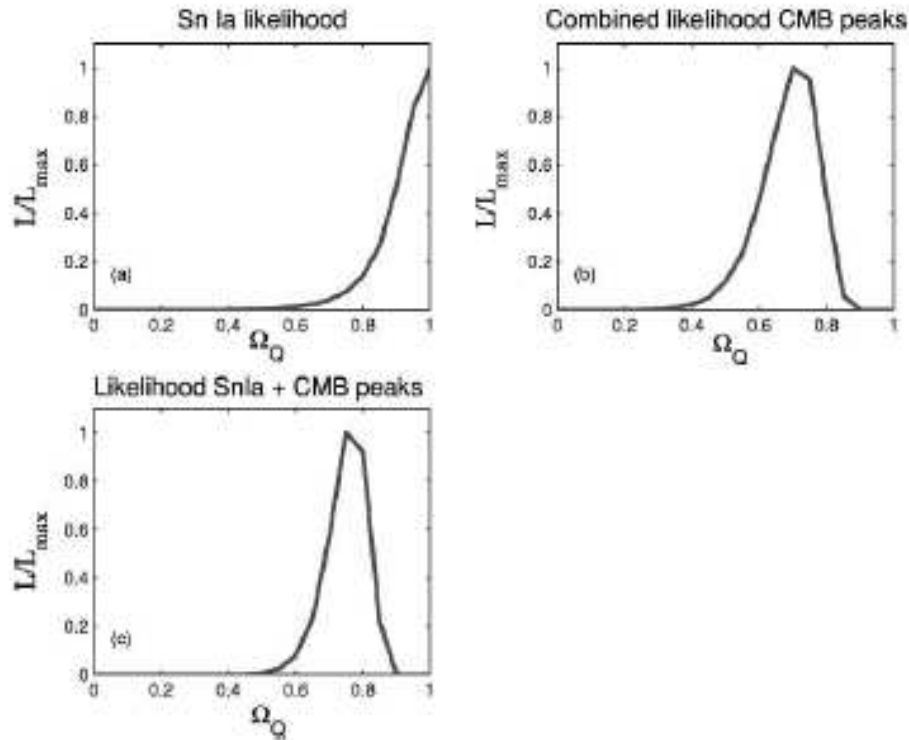


Figura 4.10: Funzioni di massima verosimiglianza relative alla quintessenza per le SNe Ia (in alto a sinistra), per l'analisi complessiva dei picchi del CMB (in alto destra), e per i due set di dati combinati [17].

Assumendo $h = 0.70$ come dedotto dalle osservazioni dell' HST [18] sono stati calcolati gli spettri corrispondenti ai diversi valori di $\Omega_b h^2$ ed n , e poi sono stati confrontati con i risultati ottenuti da DASI e BOOMERANG. In questo caso la posizione dei picchi è determinata entro 1σ .

La funzione di verosimiglianza per Ω_Q presenta un massimo per $\Omega_Q = 0.69^{+0.13}_{-0.10}$, mentre quella per i dati delle SNe Ia e del CMB combinati è centrata attorno al valore $\Omega_Q = 0.75^{+0.09}_{-0.08}$.

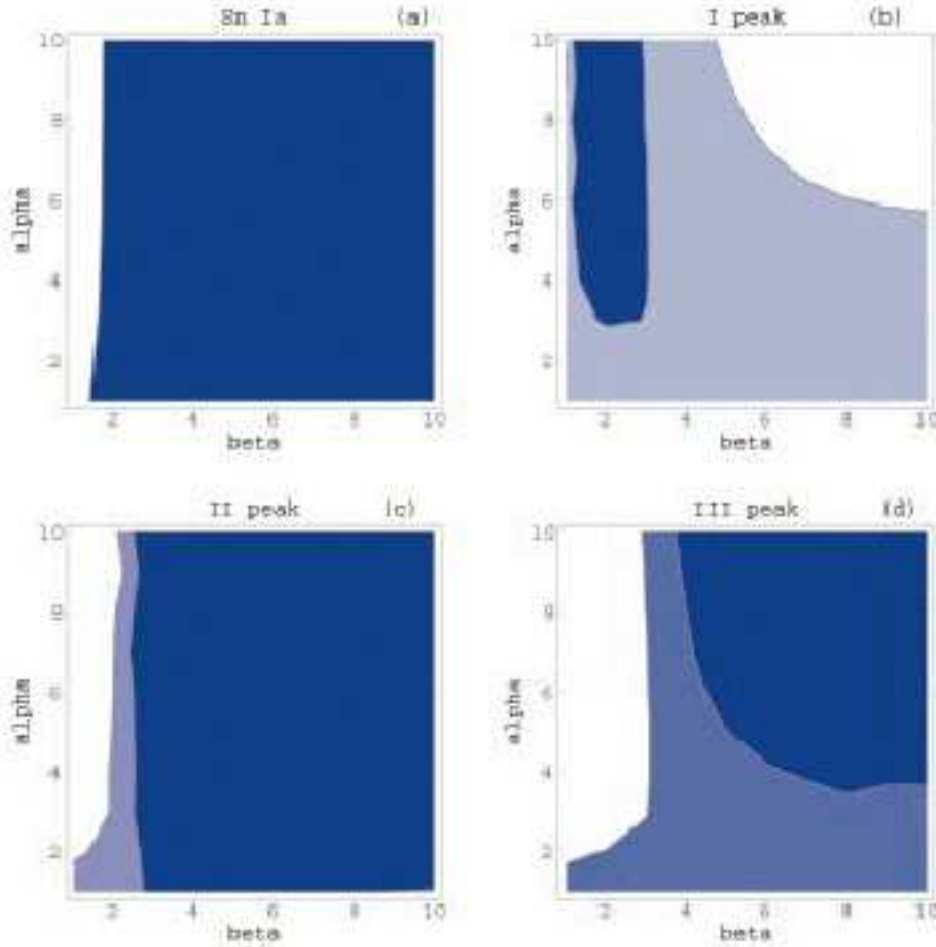


Figura 4.11: Contorni di verosimiglianza al 68% (in blu) ed al 90% (in azzurro) per le SNe Ia e per i tre picchi del CMB separatamente [17].

Sono stati inoltre considerati separatamente gli intervalli di confidenza nel piano $(\alpha-\beta)$ per i tre picchi (Fig. 4.11). Dall' analisi del primo picco si determinano i valori $\alpha = 9$ e $\beta = 2$, i quali corrispondono ad un equazione di stato $w_Q = -0.8$ per $\Omega_Q = 0.7$. Le posizioni del secondo e del terzo picco sono invece compatibili con l' ipotesi di costante cosmologica. Sovrapponendo i contorni di verosimiglianza ottenuti per le supernovae e per i tre picchi e considerando il caso maggiormente

favorito da questo set di dati ($\Omega_Q = 0.75^{+0.09}_{-0.08}$), si ricava per l'equazione di stato la condizione $-1 \leq w_Q \leq 0.93$ valida entro 2σ .

Nonostante i parametri α e β siano stati determinati, rimangono ancora delle incertezze sulla forma del potenziale (56). Un'equazione di stato con $w_Q \sim -1$ risulta compatibile, oltre che con un modello basato sulla costante cosmologica, con diversi tipi di potenziale; la degenerazione esistente nell'interpretazione dello spettro del CMB, è perciò solo parzialmente eliminata dal confronto con le supernovae.

4.4 Combinazione dei dati del CMB, delle supernovae dell' HST e delle strutture a larga scala

Grazie agli esperimenti BOOMERanG, DASI e MAXIMA [28, 30, 31] è stato possibile determinare la posizione dei primi tre picchi dello spettro del fondo di radiazione con sufficiente precisione; essi concordano sulla posizione del primo picco ponendolo a $l \sim 200$, mentre DASI e MAXIMA mostrano rispettivamente la presenza di un secondo picco a $l \sim 540$ e di un terzo a $l \sim 840$.

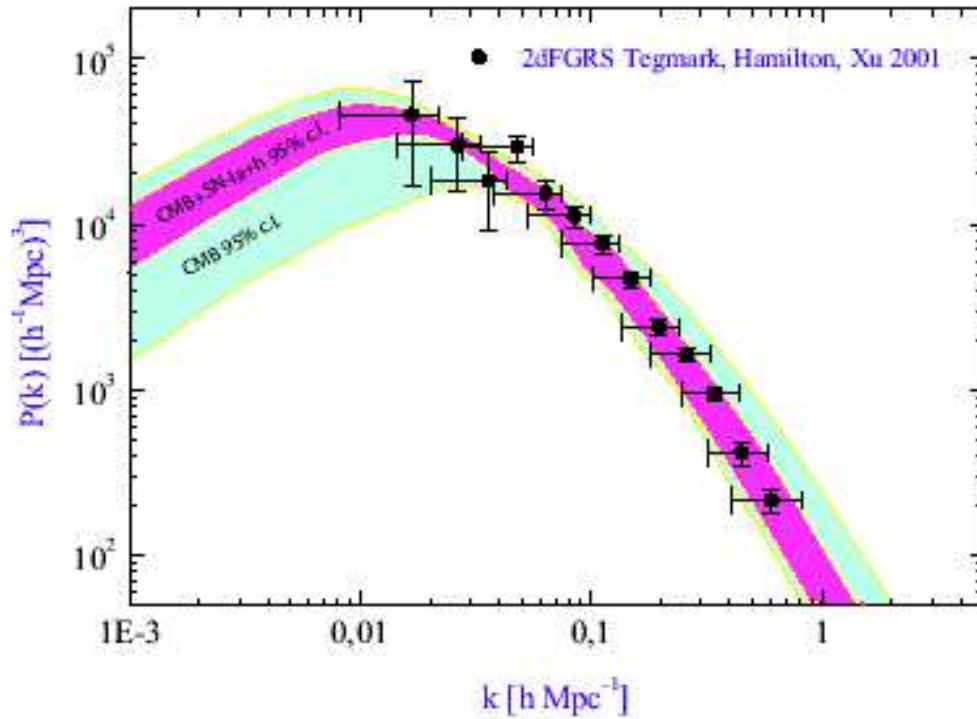


Figura 4.12: Involuppo degli spettri di potenza per il CMB (azzurro) e per SNe Ia e CMB combinati (viola) [21].

Lo studio della posizione dei picchi suggerisce un universo piatto ad un alto livello

di confidenza. I risultati ottenuti dai tre esperimenti sono nell'ordine $\Omega = 1.02 \pm 0.06$, $\Omega = 1.04 \pm 0.06$ e $\Omega = 0.9^{+0.18}_{-0.16}$ [21]. Gli altri parametri cosmologici non possono essere ricavati con la stessa accuratezza dalla sola analisi dello spettro a causa della degenerazione geometrica, e della degenerazione tensoriale. Infatti, se si considera o meno la componente tensoriale, la forma dello spettro appare drasticamente diversa, soprattutto a grandi scale angolari; l'effetto è equivalente ad un rescaling della scala angolare e ad una rinormalizzazione dello spettro. Per eliminare entrambe le degenerazioni Melchiorri [21] ha proposto uno studio combinato dei dati di quattro esperimenti diversi tra loro: CMB, SN Ia, HST e LSS. In particolare per stabilire se i metodi di misura in accordo con i risultati dedotti dall'analisi dello spettro della radiazione di fondo fossero compatibili anche con lo spettro delle fluttuazioni di materia della survey 2dF, egli ha confrontato gli inviluppi dei due spettri (Fig 4.12).

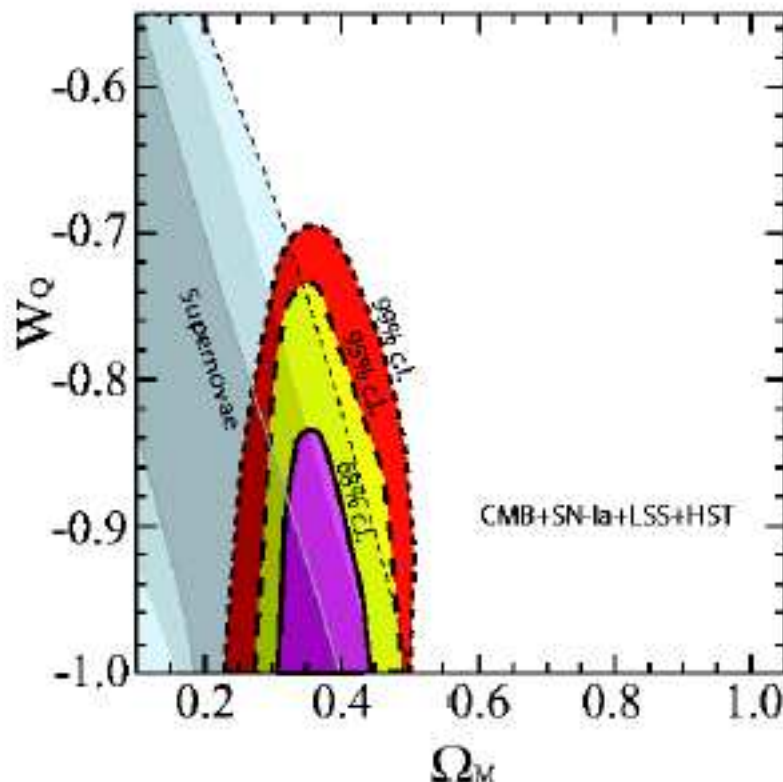


Figura 4.13: Contorni di confidenza nel piano (Ω_m, w_Q) derivati dalla combinazione dei dati relativi alle osservazioni delle supernovae, del CMB, delle strutture a larga scala e dell' Hubble Space Telescope [33].

Si può notare che l'inviluppo relativo al CMB è piuttosto allargato a causa della forte degenerazione, mentre quello relativo al 2dFRGS è completamente contenuto

nel precedente (Fig. 4.12). Se si unisce l'analisi dello spettro del CMB ai risultati delle strutture a larga scala, delle supernovae e dell' Hubble Space Telescope (HST), l'inviluppo del CMB si restringe fino a diventare perfettamente compatibile con quello dello spettro della materia [33].

Melchiorri [21], considerando il valore del parametro di Hubble $h = 0.72 \pm 0.08$ ottenuto dalle osservazioni dell' HST, e sfruttando le informazioni provenienti dalle supernovae e dalle strutture a larga scala, ha ricavato per la costante cosmologica i valori $\Omega_\Lambda = 0.62^{+0.10}_{-0.18}$, $\Omega_\Lambda = 0.55^{+0.09}_{-0.09}$ e $\Omega_\Lambda = 0.73^{+0.10}_{-0.07}$ corrispondenti all' utilizzo dei tre set di dati per il CMB. Dalla sovrapposizione dei contorni di verosimiglianza dei quattro esperimenti nel piano $(\Omega_m - w_Q)$ risulta favorita un' equazione di stato per la dark energy con $w_Q < -0.85$ ad un livello di confidenza dell' 68%, perfettamente in accordo con una costante cosmologica con equazione di stato $w_Q = -1$ (Fig 4.13), escludendo quindi scenari di quintessenza.

4.5 Analisi combinata della distribuzione di galassie a raggi X e delle Supernovae

Per determinare con precisione i valori di Ω_m e di w_x (con x si indica in modo generico la dark energy senza specificarne la natura), P. Schuecker et al. [22] hanno proposto di eliminare la degenerazione dei risultati ottenuti dalle supernovae, combinando questi dati con quelli ottenuti dalle osservazioni a raggi-X di galassie vicine nell' esperimento REFLEX (ROSAT ESO Flux-LIMITED X-ray). Questo consiste nella osservazione dei 452 cluster di galassie più luminosi in una zona delimitata dell' emisfero sud della volta celeste. Sono stati considerati soprattutto oggetti ad un redshift minore di $z = 0.3$.

La completezza di questo esperimento nella catalogazione degli oggetti nella zona di cielo osservata, ha permesso di determinare con grande precisione molte proprietà che caratterizzano la distribuzione di cluster, come la funzione di luminosità, lo spettro e la correlazione spaziale. Sfruttando la relazione tra massa e luminosità a raggi-X, è stato valutato il numero di oggetti attesi ad un certo redshift, e poi confrontato con il corrispondente istogramma basato sui dati sperimentali. La stima della distribuzione di luminosità è stata corretta per evitare che venga sottostimata a causa dell' impossibilità nel rivelare cluster più deboli del valore di soglia dello strumento adottato, e per evitare gli effetti dello spostamento della lunghezza d' onda della luce (correzione-k).

Dal fit dell' istogramma, si ottengono i valori di diversi parametri cosmologici; in particolare questo esperimento risulta fondamentale nella determinazione della den-

sità di materia in quanto propone un risultato sostanzialmente indipendente dalle altre quantità in esame. I contorni di confidenza nel piano ($w_x - \Omega_m$) evidenziano infatti una fascia di valori parallela all'asse w_x ; la funzione di massima verosimiglianza ristretta a questi due parametri presenta un massimo per il valore $\Omega_m = 0.341$ (Fig. 4.14).

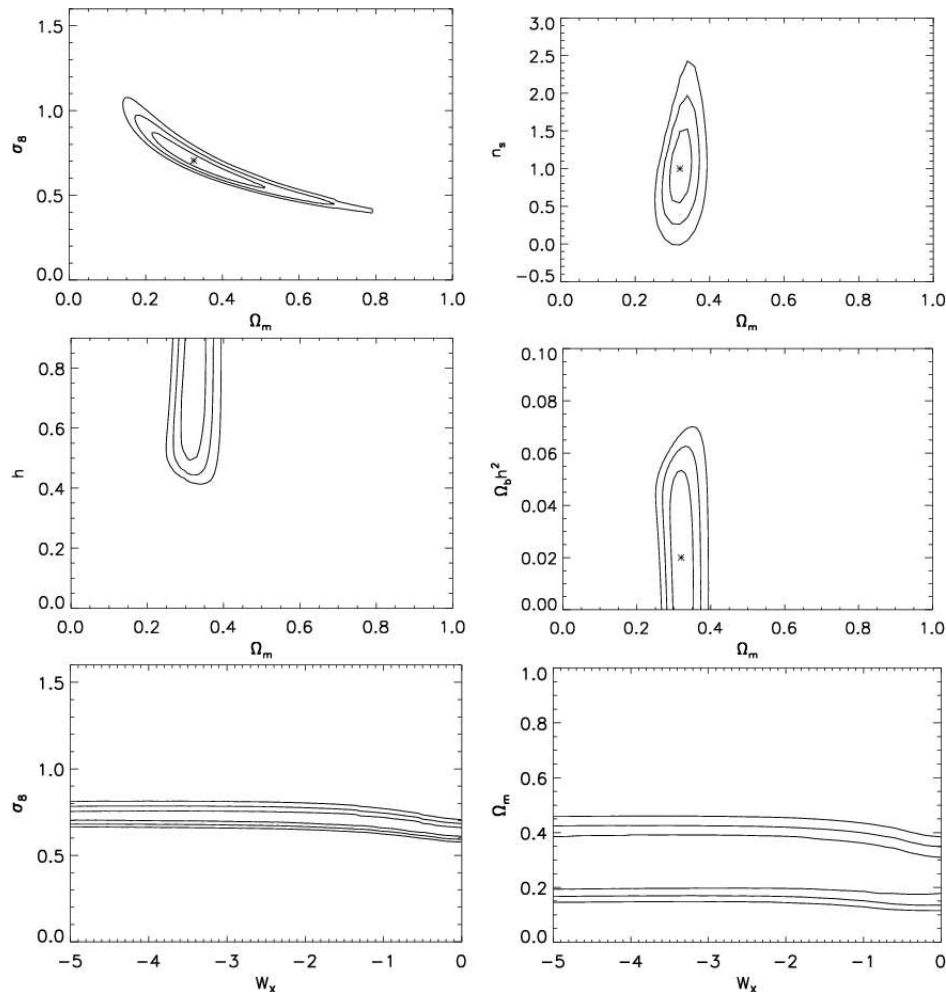


Figura 4.14: Contorni di verosimiglianza per diversi parametri ottenuti da REFLEX. La densità di materia è determinata con grande precisione da queste osservazioni (figura in basso a destra) [22].

Questo risultato mostra l'effettiva indipendenza dei contorni di verosimiglianza di REFLEX e delle supernovae ed evidenzia la possibilità di un confronto proficuo tra i due tipi di esperimento. Sovrapponendo i risultati ottenuti da Riess [14] con i due tipi di fit e da Perlmutter [13], con quelli provenienti dalle osservazioni di cluster, si ottiene una densità di materia pari a $\Omega_m = 0.29^{+0.30}_{-0.21}$, ed una equazione di stato per la dark energy descritta da $w_x = -0.95^{+0.30}_{-0.35}$ (Fig 4.15).

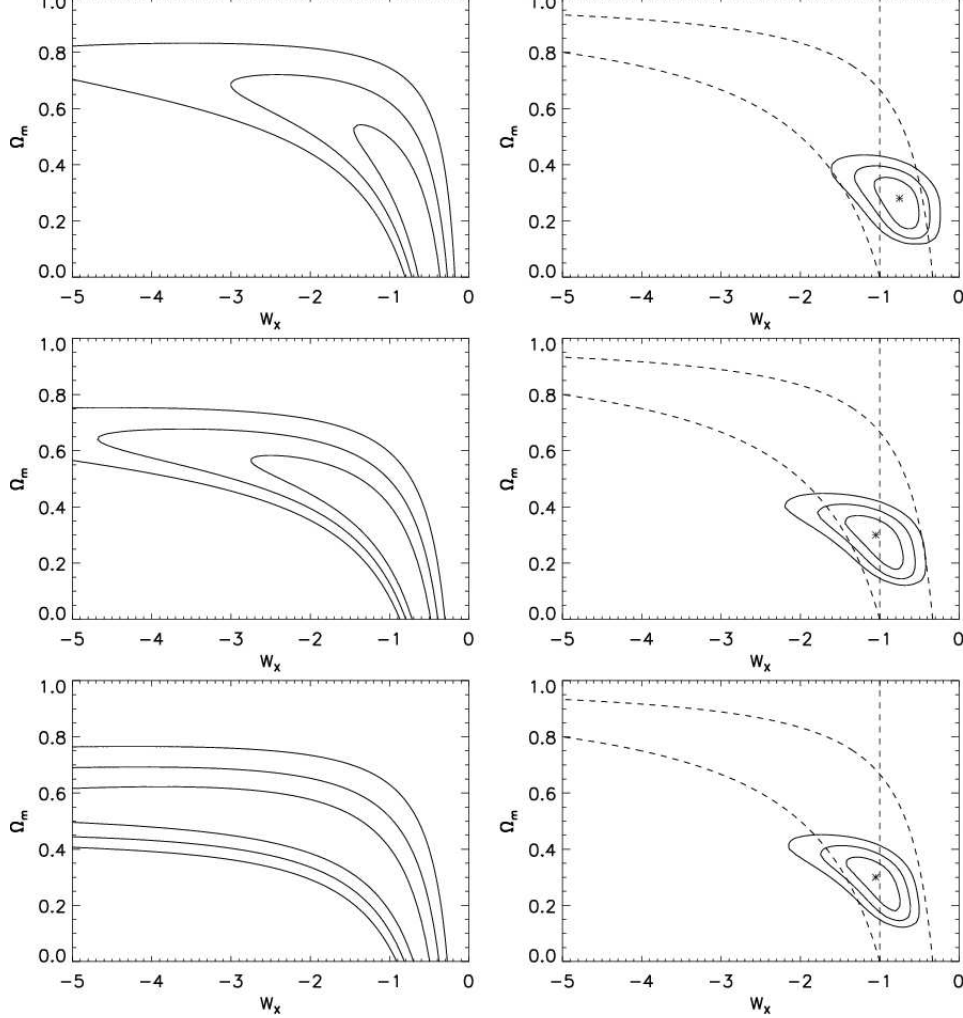


Figura 4.15: Contorni di verosimiglianza entro $1,2,3\sigma$ ottenuti dai soli dati delle supernovae (a sinistra) e dalla combinazione di questi con i dati di REFLEX [22].

I valori sono altamente compatibili con quelli che ci si aspetta per la costante cosmologica, e danno perciò poco adito a possibili modelli di quintessenza. Bisogna comunque osservare che l'analisi presentata potrebbe essere influenzata dalla ristrettezza della zona su cui avviene la catalogazione dei cluster di galassie. Altre incertezze sull'interpretazione dei risultati emergono quando si considera la condizione $\rho + p/c^2 \geq 0$, che sostanzialmente afferma l'impossibilità per l'energia di propagarsi a velocità maggiore di quella della luce. La necessità che questa sia verificata [22] implica che, per la densità di materia trovata, un'eventuale forma di dark energy possa essere descritta da un valore di w_x molto prossimo ad uno quando si considerano osservazioni a $z = 0$. Non è possibile perciò affermare con totale certezza l'esistenza di una costante cosmologica diversa da zero; lo stesso errore commesso

nell' interpretazione della relazione tra massa e distribuzione di luminosità, potrebbe infatti rendere non apprezzabile la differenza tra il caso $w_x = -1$ ed il caso $w_x \gtrsim -1$.

4.6 WMAP

L' accuratezza dei dati del Wilkinson Anisotropy Probe (WMAP) [24] rappresenta una svolta nella determinazione dei parametri cosmologici, questa missione è stata infatti appositamente progettata per diminuire le bande di errore relative ad essi.

I vari parametri sono stati ricavati da un analisi Bayesiana dei dati ammettendo un universo costituito da radiazione, barioni, “Cold Dark Matter” e costante cosmologica. Si è ipotizzato inoltre che le fluttuazioni primordiali fossero adiabatiche. L' analisi mira alla determinazione di sei parametri: il parametro di Hubble h , la densità di materia $w_m = \Omega_m h^2$, la densità barionica $w_b = \Omega_b h^2$, la profondità ottica già definita, l' indice spettrale scalare n_s ed un parametro di normalizzazione A . Il fit dei dati applicato allo spettro di potenza della temperatura restituisce il seguente set di valori:

$$\Omega_b h^2 = 0.024 \pm 0.001$$

$$\Omega_m h^2 = 0.14 \pm 0.002$$

$$h = 0.72 \pm 0.05$$

$$A = 0.9 \pm 0.1$$

$$\tau = 0.166^{+0.076}_{-0.071}$$

$$n_s = 0.99 \pm 0.09$$

I valori così ottenuti risultano compatibili con quelli di altri tipi di esperimenti e con le osservazioni astronomiche dirette, ma aggiungendo altri parametri al fit si ha una degenerazione per cui i dati sono fittati anche da set di parametri cosmologici che non concordano con nessuno dei set visti in precedenza. I dati di WMAP sono stati combinati con quelli ottenuti dalle osservazioni di supernovae, dall' HST e dal2dFGRS separatamente e con tutti e tre gli esperimenti. Da questa ultima analisi si ottiene l' evidenza di un universo piatto con $\Omega_{tot} = 1.02 \pm 0.02$, ed una equazione di stato per la dark energy $w < -0.78$ al 99% di confidenza.

Conclusioni

Negli ultimi anni sono state proposte e affrontate numerose tecniche per la determinazione di Λ e dei parametri cosmologici in genere. I primi risultati sono stati ottenuti tra il 1997 ed il 1998 grazie all'analisi delle curve di luce delle supernovae di tipo Ia da parte di Perlmutter, Riess e Schmidt [9, 13, 14], e ben presto sono stati sviluppati metodi di indagine basati sullo studio di fenomeni del tutto indipendenti. I valori di Ω_m e Ω_Λ ottenuti dalle diverse osservazioni sono tutti compatibili tra loro; questa concordanza, unita all'indipendenza delle osservazioni, costituisce una forte evidenza dell'esistenza di una costante cosmologica maggiore di zero.

Sebbene tutte le tecniche favoriscano un modello cosmologico caratterizzato da $(\Omega_m, \Omega_\Lambda) \sim (0.3, 0.7)$, l'estrapolazione di un valore esatto dei parametri dai dati osservativi è resa più complicata dalla degenerazione a cui sono soggetti i vari esperimenti quando considerati indipendentemente l'uno dall'altro. Ognuno di essi, infatti, risulta sensibile ad una particolare combinazione dei parametri cosmologici; quando si considerano i contorni di verosimiglianza bidimensionali nel piano corrispondente ad una qualsiasi coppia di parametri degeneri, si ottengono per lo più delle ellissi schiacciate. Quello che perciò viene evidenziato non è un punto, dal quale si potrebbe ricavare in maniera univoca una coppia di valori, bensì un luogo di punti che dà adito ad una interpretazione ambigua dei dati sperimentali. In pratica esistono molteplici coppie di valori che si adattano agli stessi risultati sperimentali.

Per eliminare questa degenerazione intrinseca ad ogni tipo di analisi dati, l'unica alternativa valida è rappresentata dal confronto di più esperimenti. Poiché la sensibilità a particolari combinazioni dei parametri varia da tecnica a tecnica, studiando le intersezioni dei contorni di confidenza ottenuti, è possibile restringere le incertezze con cui Ω_m e Ω_Λ sono determinati.

Come visto nel quarto capitolo gli errori relativi all'analisi combinata di più metodi sono notevolmente inferiori a quelli ottenuti da una singola tecnica. Da un confronto con i primi risultati ottenuti da Schmidt et al. nel 1998 [9] si può notare che in questo modo si guadagna una cifra significativa.

Tuttavia, il confronto tra i diversi approcci allo studio della costante cosmologica,

se da un lato permette di ridurre l' errore statistico, dall' altro non fornisce nessuna informazione sulla valutazione dell' errore sistematico quando fenomeni di diversa origine e quindi soggetti a diversi errori di misura, vengono usati per determinare un' unica quantità.

L' esistenza di una energia oscura sembra ormai essere una evidenza osservativa inconfutabile, tuttavia rimangono ancora molti dubbi sulla sua natura. Al di là delle varie teorie proposte per la sua interpretazione, sono in particolare due i motivi che suscitano perplessità nella comunità scientifica. Nel primo capitolo è stato sottolineato il problema della forte discrepanza tra risultato sperimentale e previsione teorica: un valore piccolo come quello osservato, fa pensare che la costante cosmologica potrebbe in realtà essere nulla, ma si osserva che quella ad essa associata è addirittura la densità di energia dominante nell' universo. Quello che è più sorprendente però è il fatto che la densità di materia e di costante cosmologica siano dello stesso ordine di grandezza.

In definitiva, il modello standard che sta emergendo in cosmologia, è quello di un universo piatto dominato dalla costante cosmologica.

Bibliografia

- [1] G. Bothun, Modern Cosmological Observations and Problems, Taylor & Francis, 1998
- [2] L. M. Krauss Scientific American n. 367 (1999)
- [3] M. Carroll, astro-ph/0004075 and Living Rev. Rel. 4 (2001) 1
- [4] J. D. Cohn, astro-ph/9807128 v2 and Astrophysical. J. Suppl. 259 (1998) 213
- [5] E. Turner, 1990 ApJ Lett. 365, L43
- [6] L. M. Krauss astro-ph/0301012 v2 to appear in Proceedings, ESO-CERN-ESA Symposium on Astronomy, Cosmology and Fundamental Physics, March 2002
- [7] T. Padmanabhan (2003)/ Physics Reports 380, 235-320
- [8] Varun Sahni (2000)/Pramana 55, 43-52
- [9] B. Schmidt et al., 1998 ApJ 507, 46-63
- [10] J. B. Oke, & Sandage, A. 1968, ApJ, 154, 21
- [11] Hamuy et al., 1996a, AJ, 112, 2391
- [12] Holz & Wald, astro-ph 9708036
- [13] S. Perlmutter et al., 1999 ApJ 517, 565-586
- [14] A. G. Riess et al., 1998, AJ, 116, 1009-1038
- [15] P. Hoflich, J. C. Wheeler & F. K. Thielemann, 1998, ApJ, 495, 617
- [16] A. G. Riess et al., 1996a, ApJ, 473, 88
- [17] P. S. Corasantini, E. J. Copeland, PhysRev D65,043004
- [18] W. L. Freedman et al., 2001, ApJ, 553, 47

- [19] M. Roos & S. M. Harun-or-Rashid, astro-ph/0209611 (2002) to appear in Research Signpost
- [20] W. J. Percival et al. 2003, MNRAS, 337, 1068, and astro-ph/0206256 v2 (2002)
- [21] A. Melchiorri, 4th Heidelberg International Conference on Dark Matter in Astro and Particle Physics, Cape Town, South Africa (February 2002). Eds. H. Klapdor-Kleingrothaus and R. Viollier and astro-ph/0204262 v1 (2002)
- [22] P. Schuecker et al., Astron. astrophys. 402 (2003) 53-64
- [23] N. Vittorio, J. Silk, 1985, ApJ, 297, L1
- [24] D. N. Spergel et al. astro-ph/0302209 v3 (2003) and ApJ Suppl. 148 (2003) 175
- [25] E. E. Falco et al., 1998, ApJ, 494, 47-59
- [26] M. Bartelmann et al., 1998, A&A 330, 1
- [27] S.Shore, The tapestry of modern Astrophysics, Wiley Interscience, 2002
- [28] M. Tegmark, ApJ, 469 (1996) 437 ,(COBE)
- [29] C. B. Netterfield et al. ApJ, 571 (2002) 604, (Boomerang)
- [30] A. J. Lee et al. ApJ, 551 (2001) L1, (Maxima)
- [31] N. W. Halverson et al., ApJ, 568 (2002) 38, (DASI)
- [32] P. F. Scott et al., astro-ph/ 0205380 (VSA)
- [33] R. Bean e A. Melchiorri, Phys. Rev. D, 65, 041302(R)