Università di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2003/2004

Elaborato Finale

Modelli solari ed eliosismologia

Candidato
Valentina Puccetti

Relatore
Dr. Scilla Degl'Innocenti

Indice

Introduzione

Data la notevole precisione delle osservazioni disponibili, il Sole costituisce un test fondamentale per la teoria dell'evoluzione stellare.

Poiché la materia al di sotto della fotosfera è completamente opaca a qualsiasi tipo di radiazione elettromagnetica, non si può conoscere direttamente l'interno solare tramite l'osservazione, nondimeno esistono metodi alternativi per ottenere informazioni indirette, primo tra tutti l'*Eliosismologia*.

Questa scienza è nata intorno al 1970 con la scoperta di oscillazioni che coinvolgono estese regioni del Sole; si comprese poi che queste oscillazioni sono l'effetto della propagazione di onde acustiche generate internamente da particolari instabilità dinamiche. Dallo studio dell'andamento della velocità del suono nella stella, si possono ottenere notevoli informazioni sulla sua struttura, proprio come nel caso della sismologia sul nostro pianeta. Una tale analisi è possibile grazie ad un particolare metodo, detto "di inversione", che permette di ricavare grandezze fisiche fondamentali all'interno della stella a partire dalla frequenza delle oscillazioni stesse.

Questa tesina è organizzata come segue:

- Descrizione del modello solare standard;
- Teoria delle oscillazioni solari;
- Teoria e risultati del metodo di inversione eliosismologico.

Capitolo 1

I modelli solari standard

Una stella nasce da una nube di materia rarefatta e fredda (con una densità $\rho \simeq 20 \div 30$ atomi$/cm^3 \simeq 10^{-22} g/cm^3$ ed una temperatura $T \simeq 100$K), che a causa di una qualche perturbazione inizia a collassare su se stessa e l'energia che si libera durante il collasso è tale da aumentarne la temperatura: la contrazione procede finchè la stella è sufficientemente calda da raggiungere l'equilibrio tra la pressione del gas e la forza di gravità.

Una stima del tempo in cui l'irraggiamento di una stella può essere sostenuto per mezzo della sola energia gravitazionale è $t_i \simeq (GM^2)/(LR)$, dove GM^2/R, L ed R sono rispettivamente l'energia potenziale gravitazionale, la luminosità ed il raggio attuali della stella. Per il Sole $t_i \simeq 3 \cdot 10^7$ anni, cioè molto inferiore all'età della Terra ($t_\oplus \simeq 4.5 \cdot 10^9$anni), pertanto l'irraggiamento deve essere sostenuto da altri meccanismi, in particolare dalle reazioni nucleari di fusione. Infatti, durante la contrazione, vengono raggiunte al centro della stella le temperature di fusione nucleare: la prima reazione che si innesca è la fusione di idrogeno in elio (poichè la temperatura necessaria all'innesco è la più bassa tra le varie reazioni di fusione e quindi viene raggiunta con una contrazione minore) ed il suo tempo scala è circa 10^{10} anni, cioè dell'ordine di $t_\oplus$.

Con l'innesco della reazione di fusione dell'idrogeno la stella entra nella sequenza principale: maggiore è la massa della stella e maggiore sarà la temperatura centrale necessaria al gas per bilanciare la forza gravitazionale; a temperature centrali crescenti corrispondono luminosità crescenti e tempi di permanenza in tale fase decrescenti (l'idrogeno viene bruciato più rapidamente). Man mano che l'idrogeno viene consumato, diminuisce l'efficienza della reazione e l'energia prodotta non è più sufficiente a contrastare le perdite per irraggiamento; il nucleo allora contrae lievemente fino ad aumentare la temperatura centrale e con essa l'efficienza della fusione di H; poi, quando l'idrogeno nel nucleo è esaurito, la stella innesca la combustione di H in una shell circostante il nucleo di He.

1.1 La struttura del Sole

La fusione dell'idrogeno in elio può avvenire attraverso due differenti catene di reazione: la catena protone-protone, la cui catena principale è

$$p + p \rightarrow d + e^+ + \nu$$

$$d + p \rightarrow^3 He + \gamma$$

$$^3He +^3 He \rightarrow^4 He + 2p$$

ed il ciclo CNO, la cui catena principale è

$$^{12}C + p \rightarrow^{13} N + \gamma$$

$$^{13}N \rightarrow^{13} C + e^+ + \nu$$

$$^{14}N + p \rightarrow^{15} O + \gamma$$

$$^{15}N + p \rightarrow^{12} C +^4 He$$

dove p, d, e^+, ν e γ indicano rispettivamente il protone, il deutone (nucleo del deuterio), il positrone, il neutrino elettronico ed il fotone.

Affinché la fusione possa aver luogo, bisogna che due protoni si trovino ad una distanza reciproca d $\simeq$ 1fm, ma a tale distanza tra di essi agisce il potenziale coulombiano (repulsivo) $V = e^2/r$. L'energia necessaria per superare questa barriera è dell'ordine del MeV, che corrisponde ad una temperatura critica $t_{crit} \simeq 10^{10}$K, molto maggiore della temperatura centrale del Sole ($t_C \simeq 1.5 \cdot 10^7$). In realtà questo non è un problema: nelle stelle, infatti, i processi nucleari avvengono grazie all'effetto tunnel, secondo cui la probabilità W di superare la barriera in condizioni di temperatura inferiore a t_C è diversa da zero; in particolare

$$W \propto exp\left(-\pi \, \frac{Z_1 Z_2 e^2 \sqrt{2\mu}}{\hbar\sqrt{E}}\right) \tag{1.1}$$

dove E e μ, Z_1 e Z_2 sono rispettivamente l'energia nel riferimento del centro di massa, la massa ridotta del sistema dei due nuclei interagenti ed i numeri atomici di questi.

Poichè la barriera coulombiana tra due protoni in presenza di carbonio ed azoto è circa $6 \div 7$ volte maggiore di quella per le reazioni protone-protone, il ciclo CNO è attivo a temperature più alte: l'energia termica delle particelle è maggiore e con essa la probabilità di superare la barriera. In particolare, il ciclo CNO inizia ad essere efficiente per temperature di $\simeq 1.5 \cdot 10^7$ K contro temperature di $\simeq 8 \cdot 10^6$ K per la catena p-p; dato però che la dipendenza dalla temperatura del ciclo CNO ($\propto T^{15}$) è maggiore di quella della catena p-p ($\propto T^4$), all'aumentare della temperatura l'efficienza del ciclo CNO diviene predominante. Il Sole raggiunge la temperatura di innesco del ciclo CNO proprio nelle regioni più centrali e, come si può vedere dalla figura 1.1, allontanandosi dal centro la temperatura scende al di sotto di quel valore, cosicchè la zona in cui è attivo tale ciclo è molto ristretta. Il ciclo CNO è quindi poco favorito all'interno del Sole e la fusione dell'idrogeno avviene per circa il 98% attraverso la catena protone-protone.

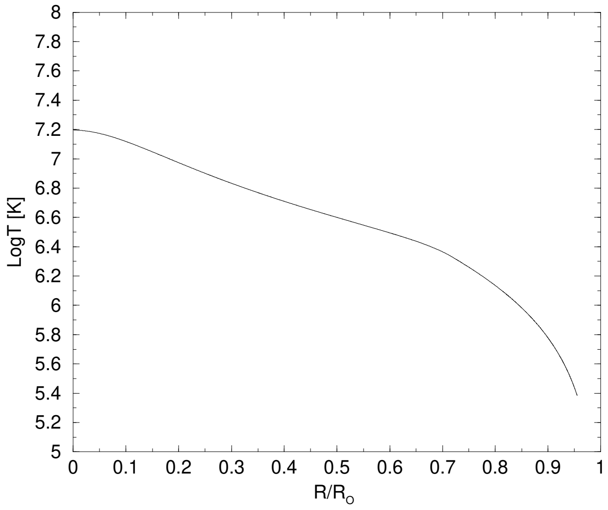

Figura 1.1: Andamento della temperatura all'interno del Sole all'età attuale. Dati della "Pisa Evolutionary Library", al nodo http://astro.df.unipi.it/SAA/.

L'energia liberata durante la fusione dell'H in He è $\Delta E' \simeq 26.7$Mev, la differenza tra le masse a riposo dei 4 protoni coinvolti nella reazione e quella del prodotto, cioè l' ^4He; nel calcolare l'energia disponibile per la struttura dobbiamo tenere conto del fatto che l'energia dei neutrini prodotti viene completamente persa, poichè questi non interagiscono con la materia (scambiando energia con essa) ed escono liberamente dal Sole. Sottraendo da $\Delta E'$ l'energia dei neutrini della catena p-p si ottiene $\Delta E \simeq 26.2$Mev.

Le reazioni di fusione dell'idrogeno liberano quindi circa l'1% della sua energia a riposo (938.2 Mev); l'idrogeno consumato è solo quello che si trova nella parte più interna del nucleo (perchè lì c'è una temperatura sufficiente all'innesco delle reazioni) e possiamo stimare questa quantità con il 10% della massa solare. Nell'ipotesi che tutta l'energia prodotta venga irradiata, una stima del tempo dell'evoluzione nucleare t_N è quindi:

$$t_N = 0.01 \cdot 0.1 \cdot \frac{M_\odot}{L_\odot} \simeq 1.5 \cdot 10^{10}\text{anni}. \tag{1.2}$$

Considerando che il suo ingresso in sequenza principale è avvenuto circa 4.5 miliardi di anni fa, possiamo dire che il Sole è una stella "di mezza età".

Un modello solare calcola l'evoluzione del Sole dalla nascita fino ad oggi e ne descrive la struttura attuale.

Tutti i modelli *standard* si basano sull'ipotesi di simmetria sferica: infatti, gli effetti della rotazione e del campo magnetico del Sole sono così piccoli che può essere trascurata la loro influenza sulla struttura ed evoluzione del Sole, anche se sono importanti per le caratteristiche degli strati atmosferici (valori tipici del campo magnetico esterno del Sole sono fino a 0.4 Tesla, mentre la rotazione nelle zone interne è $\Omega/2\pi \simeq 450$ nHz ed in superfice varia dalla frequenza di $\simeq 450$ nHz all'equatore fino a quella di $\simeq 320$ nHz alla latitudine di 75° -valori tratti da [10]-). Sotto l'ipotesi di simmetria sferica si ha l'equilibrio idrostatico se la forza di gravità è controbilanciata dalla pressione.

La pressione P all'interno di una stella, in generale, è data dalla somma della pressione di radiazione e di gas perfetto:

$$P = P_{rad} + P_g = \frac{1}{3}\, a\, T^4 + \frac{\rho\, k_B}{\mu\, m_P}\, T \tag{1.3}$$

dove $a = 7.5649 \cdot 10^{-15}\, erg \cdot cm^{-3} \cdot K^{-4}$ è la costante di corpo nero, $k_B = 1.38 \cdot 10^{-16}\, ergK^{-1}$ è la costante di Boltzmann, $m_P = 1.6 \cdot 10^{-24}\, g$ è la massa del protone e μ è il peso molecolare medio. Per una miscela di n elementi completamente ionizzati si definisce:

$$\mu = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i\,(Z_i+1)}{A_i}} \simeq \frac{1}{2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z} \tag{1.4}$$

dove X_i, Z_i ed A_i sono rispettivamente l'abbondanza, il numero atomico ed il peso atomico dell'elemento i-esimo, X, Y e Z sono le abbondanze frazionali in massa di idrogeno, elio e dei metalli[1]. L'approssimazione nella 1.4 è dovuta al fatto che in generale gli elementi con $A \leq 60$ tendono ad avere un ugual numero di protoni (Z_i) e di neutroni $(A_i - Z_i)$, cioè $(Z_i + 1)/A_i \simeq Z_i/A_i = 1/2$, mentre quelli con pesi atomici maggiori, sebbene tendano ad avere un maggior numero di neutroni che di protoni, danno un contributo trascurabile a μ.

Consideriamo il rapporto

$$P_{rad}/P_g = \frac{1}{3}\, \frac{a\, T^3\, \mu\, m_P}{\rho\, k_B} \simeq 2.92 \cdot 10^{-23} \frac{T^3\, \mu}{\rho}\ . \tag{1.5}$$

Per il Sole, stimando $\mu \simeq 1$ ed inserendo per T e ρ i valori al centro si ottiene $P_{rad}/P_g = 6.57 \cdot 10^{-4}$. La pressione di radiazione è trascurabile

[1]In generale per indicare la composizione chimica di una stella si definiscono le abbondanze relative in massa, cioè le abbondanze in massa su un grammo di materia: X è la percentuale in massa di idrogeno ed Y quella di elio; la somma delle percentuali in massa degli elementi restanti, che vengono genericamente chiamati metalli, si chiama appunto metallicità ed è indicata con Z. Ovviamente deve sempre valere $X + Y + Z = 1$.

nelle zone interne solari; non è trascurabile invece vicino alla fotosfera, dove $P_{rad}/P_g \simeq 0.6$.

Alle pressioni e temperature tipiche delle zone centrali la materia è completamente ionizzata (ad esclusione degli atomi di ferro), quindi dovremmo considerare anche l'interazione tra le cariche: essa è trascurabile se $V \ll k_B T$, dove V è il potenziale coulombiano. Si può far vedere che, al diminuire della temperatura, l'interazione che si fa sentire per prima è quella ione-ione; allora la condizione precedente diventa

$$k_B T \gg \frac{Z^2 e^2}{d_i} \simeq Z^2 e^2 n_i^{1/3} \simeq Z^2 e^2 \left(\frac{A m_P}{\rho}\right)^{1/3} \tag{1.6}$$

cioè

$$\rho \ll \frac{k_B^3 m_P A T^3}{e^6 Z^6} \tag{1.7}$$

dove d_i è la distanza media ione-ione, che può essere approssimata con $n_i^{1/3}$: n_i è la densità numerica degli ioni, tale che la densità sia $\rho = \mu_i n_i m_P$; nella 1.6 abbiamo approssimato il peso molecolare medio per gli ioni μ_i con il relativo peso atomico A. Se nella 1.7 inseriamo valori relativi all'idrogeno ($Z = 1$, $A = 1$, $T \simeq 10^7 K$ cioè la temperatura di fusione) otteniamo $\rho \ll 10^6\ g/cm^3$, mentre con valori relativi all'elio ($Z = 2$, $A = 4$, $T \simeq 10^8 K$) $\rho \ll 10^8 g/cm^3$. Quindi nel Sole, essendo la densità massima $\rho_C = 150 g/cm^3$ possiamo escludere gli effetti coulombiani.

Gli effetti quantistici di degenerazione sono trascurabili se confrontando la lunghezza d'onda termica di De Broglie per gli elettroni (per i quali gli effetti di degenerazione sono i primi a farsi sentire) con le distanze tra essi, si ha

$$\lambda_e = \hbar/p_e \simeq \hbar/(m_e k_B T)^{1/2} \ll d_e \simeq \left(\frac{\mu_e m_P}{\rho}\right)^{1/3} \tag{1.8}$$

cioè

$$\rho \ll \mu_e m_P \,\frac{(m_e k_B T))^{3/2}}{\hbar^3} \simeq 6.25 \cdot 10^{-11} T^{3/2}\ g/cm^3. \tag{1.9}$$

p_e, μ_e, d_e sono rispettivamente l'impulso, il peso molecolare medio degli elettroni e la distanza media tra questi; nella 1.9 abbiamo approssimato μ_e con il suo valore minimo, che è $\simeq 1$ (essendo μ_e il numero di nucleoni per ogni elettrone, $\mu_e \simeq 1$ nel caso dell'idrogeno). Per $T = T_C = 1.5 \cdot 10^7 K$ si ha che la degenerazione è trascurabile se $\rho \ll 3\ g/cm^3$.

Questa relazione non è soddisfatta nelle regioni centrali del Sole: l'effetto della degenerazione a priori non è trascurabile nel Sole, ma è comunque piccolo (dell'ordine di qualche %), così che possiamo approssimare la pressione nelle regioni interne con quella di gas perfetto.

Dato che la stella è in condizioni di equilibrio gravitazionale con una sorgente centrale di energia, abbiamo che densità (vedere figura 1.2), temperatura (vedere figura 1.1) e pressione decrescono monotonamente dal centro

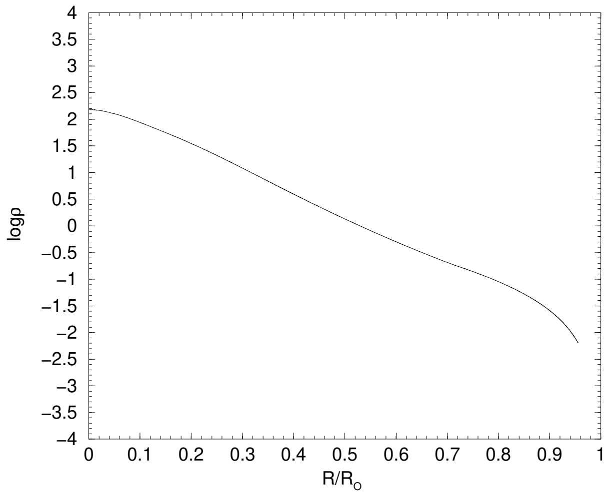

Figura 1.2: Andamento della densità all'interno del Sole all'età attuale. Dati della "Pisa Evolutionary Library".

verso l'esterno; i loro valori centrali sono stimati rispettivamente attorno a $1.5 \cdot 10^7\ K$, $150\ g/cm^3$ e $2.3 \cdot 10^{17}\ dyne/cm^2$. All'interno del Sole c'è quindi un gradiente di temperatura che implica un flusso di calore, cioè di energia dal centro verso l'esterno. Il trasporto di energia nelle regioni interne della stella ($r < 0.7R_\odot$) avviene esclusivamente per mezzo delle interazioni tra la radiazione e la materia:

1. lo scattering elettronico: diffusione dei fotoni da parte degli elettroni liberi;

2. il processo bound-bound (b-b): assorbimento di un fotone da parte di un atomo, il cui elettrone più esterno passa ad un livello energetico superiore. La radiazione assorbita viene poi riemessa in maniera isotropa quando l'atomo si diseccita;

3. il processo bound-free (b-f): assorbimento di un fotone da parte di un atomo, il cui eletrone più esterno viene liberato;

4. il processo free-free (f-f): assorbimento di un fotone da parte di un elettrone libero, ma interagente con un campo esterno.

La probabilità di interazione tra radiazione e materia per unità di percorso (cioè l'inverso del cammino libero medio dei fotoni) è data dal prodotto $k\rho$, dove k si chiama opacità e ρ è la densità; l'opacità regola quindi il flusso di energia uscente. Per conoscere quale processo contribuisce maggiormente all'opacità è necessario conoscere il grado di ionizzazione della materia.

Alle temperature tipiche delle zone centrali del Sole la radiazione ha un'energia di circa 10^3 eV; nelle regioni più esterne (tipicamente per $r > 0.7R_\odot$), dove la temperatura scende da T $\simeq 2 \cdot 10^6$ K fino a T $\simeq 6000$ K in fotosfera, l'energia della radiazione scende fino a circa 1 eV. L'energia di ionizzazione per un atomo a cui è rimasto solo un elettrone in orbita è

$$E = \frac{Z^2\,\mu_e\,e^4}{2\hbar^2} \simeq \frac{Z^2\,e^4}{2\hbar^2}\,m_e\,\left[1 - \frac{m_e}{m_N}\right] \tag{1.10}$$

dove $\mu_e = (m_e\,m_N)/(m_e + m_N)$ è il peso molecolare elettronico, che può essere approssimato come nella 1.10 perchè la massa dell'elettrone, m_e, è trascurabile rispetto alla massa del nucleo, m_N.

Per l'idrogeno $E_H = 13.6$ eV, mentre per l'elio $E_{He} = 54.43$ eV; vediamo inoltre per gli elementi che contribuiscono in gran parte (circa il 75%) alla metallicità, cioè il carbonio, l'azoto, il ferro e l'ossigeno: abbiamo rispettivamente $E_C = 484.94$ eV, $E_N = 666.86$ eV, $E_{Fe} = 9200.34$ eV ed $E_O = 871.01$ eV.

Quindi nelle zone centrali idrogeno, elio, carbonio, azoto ed ossigeno sono totalmente ionizzati, il ferro solo parzialmente; in quelle esterne sono tutti parzialmente ionizzati.

L'opacità nelle zone più interne, dove la materia è totalmente ionizzata, è data principalmente da processi di scattering (fa eccezione il ferro, che invece interagisce con la radiazione tramite processi b-b o b-f, contribuendo a circa il 20% dell'opacità); nelle zone più esterne, dove la materia è parzialmente ionizzata, abbiamo invece principalmente processi b-b e b-f.

Il fatto che la materia nelle regioni interne della stella sia totalmente ionizzata fa sì che in tali zone l'indice adiabatico $\Gamma_1 = dlogP/dlog\rho$ sia costante e pari a circa 5/3 (cioè quello per un gas perfetto monoatomico); come si può vedere dalla figura 1.3 nelle regioni più esterne, dove invece la materia è solo parzialmente ionizzata, Γ_1 si discosta da tale valore.

Da $r \simeq 0.7R_\odot$ e per un tratto di circa 130000 Km si estende la zona convettiva esterna del Sole. Anche qui avviene il trasporto dell'energia per mezzo delle interazioni radiazione-materia ed in più si hanno moti su larga scala: i moti convettivi, in cui ciclicamente gli elementi di materia calda delle zone più interne salgono verso l'alto e cedono il calore in eccesso alle zone esterne.

Per determinare le condizioni di innesco della convezione, consideriamo quindi un piccolo spostamento, ad esempio verso l'alto, di un elemento di materia in ambiente radiativo e vediamo se tale spostamento viene eccitato oppure inibito.

L'elemento inizialmente è all'equilibrio di temperatura, pressione e densità con l'ambiente in cui si trova. Supponiamo che questo moto sia abbastanza rapido da non far scambiare calore tra l'elemento e l'esterno, ma sufficientemente lento in modo che questi restino sempre in equilibrio di pressione. Se il gradiente di temperatura ambientale (cioè quello radiativo)

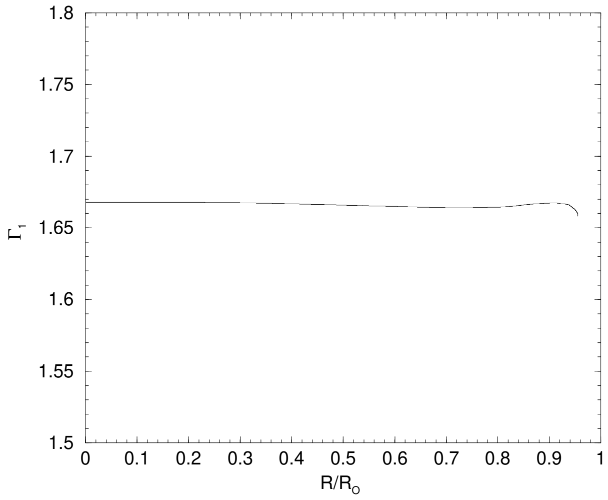

Figura 1.3: Andamento dell'indice adiabatico della materia all'interno del Sole all'età attuale. Notare che i dati disponibili non raggiungono la fotosfera, dove invece Γ_1 varia notevolmente. Dati della "Pisa Evolutionary Library".

è maggiore di quello adiabatico, l'elemento diverrà più caldo e quindi meno denso dell'ambiente: per il principio di Archimede riceverà un'ulteriore spinta verso l'alto ed è così che avrà luogo il moto convettivo.

Quindi la condizione di instabilità per convezione è:

$$\left|\frac{dT}{dr}\right|_{rad} > \left|\frac{dT}{dr}\right|_{ad} \tag{1.11}$$

ma in genere viene espressa così

$$\frac{P}{T}\frac{dT}{dP}_{rad} = \frac{dlogT}{dlogP}_{rad} = \underline{\nabla_{rad} > \nabla_{ad}} = \frac{dlogT}{dlogP}_{ad} \tag{1.12}$$

Nelle regioni in cui si instaura la convezione il trasporto radiativo è comunque presente, ma in questo caso il flusso energetico totale è dato dalla somma dei flussi radiativo e convettivo. In tali regioni si instaura un gradiente di temperatura che in generale non è nè quello radiativo, nè quello convettivo. Tuttavia negli interni stellari si può far vedere che nell'approssimare il gradiente di temperatura ambientale con quello adiabatico si commette un errore accettabile.

Infatti, affinchè la convezione sia utile, deve costituire un meccanismo efficiente di trasporto del calore; il calore ceduto dal singolo elemento di materia dopo aver percorso un tratto l è $Q = C\,\Delta T$, dove C è la capacità termica dell'elemento e ΔT è la differenza di temperatura tra elemento ed ambiente, cioè

$$\Delta T = \int_l \left[\left(\frac{dT}{dP} \right)_{amb} - \left(\frac{dT}{dP} \right)_{ad} \right] dP \, . \tag{1.13}$$

Se la convezione ha luogo nelle zone interne, dove la materia è totalmente ionizzata e la sua capacità termica è molto elevata, basta un ΔT molto piccolo affinchè l'elemento convettivo trasporti una grande quantità di energia.

Nel caso del Sole la convezione avviene nelle regioni più esterne, dove elementi molto abbondanti come l'idrogeno e l'elio sono parzialmente ionizzati: la capacità termica della materia è quindi inferiore, poichè se si cede calore al gas, questo non viene impiegato esclusivamente per aumentarne la temperatura, ma anche per aumentarne il grado di ionizzazione. Affinchè l'elemento trasporti una stessa quantità di calore Q, occorre un ΔT maggiore e quindi non è possibile approssimare il gradiente di temperatura ambientale con quello adiabatico in tali regioni.

Tuttavia, sicuramente varrà che

$$\nabla_{ad} < \nabla_{amb} < \nabla_{rad}. \tag{1.14}$$

A causa della presenza di viscosità e turbolenze, una trattazione precisa della convezione nelle regioni esterne delle stelle non è ancora disponibile e non è quindi possibile ottenere un valore preciso per il gradiente ambientale. La convezione nelle regioni subatmosferiche viene generalmente trattata per mezzo di una teoria approssimata, detta *teoria della Mixing Length*, secondo la quale, un volume di materia percorre adiabaticamente un certa altezza media h, detta appunto mixing length, e poi rilascia il calore accumulato. Generalmente si assume $h = \alpha \, H_P$,dove

$$H_P = -\frac{dr}{dlogP} \tag{1.15}$$

è l'altezza di scala della pressione (altezza per cui la pressione diminuisce di un fattore e). α è un parametro libero (che varia da circa 1 a circa 3) da determinarsi tramite il confronto tra teoria ed osservazioni. L'incertezza su α riflette ovviamente quella sull'efficienza della convezione; variando α, varia il gradiente di temperatura nella zona convettiva e quindi anche il valore che della temperatura superficiale della stella. α viene così calibrato in maniera da riprodurre il colore della stella.

1.2 Come si costruisce un modello solare

Un modello solare si basa sull'ipotesi che la composizione chimica iniziale del Sole (vale a dire quella al suo ingresso in sequenza principale) fosse omogenea: nella fase di presequenza, infatti, ci sono stati grandi moti convettivi in tutta la struttura solare che hanno mescolato la materia.

Poichè la superficie della stella non è coinvolta dalle reazioni nucleari e la teoria evolutiva standard non prevede che ci siano mescolamenti tra le zone esterne e quelle in cui avvengono le reazioni nucleari, si potrebbe pensare che la composizione chimica iniziale della stella coincida con quella di questa zona, che noi possiamo studiare direttamente. Infatti, la radiazione emessa da una stella, caratterizzata da un continuo assimilabile alla distribuzione di corpo nero, si differenzia da quest'ultima per la presenza di righe di assorbimento. L'insieme delle righe di assorbimento, detto spettro, può darci informazioni sulla composizione chimica superficiale della stella, confrontandolo con gli spettri dei vari elementi, ottenuti in laboratorio.

Purtroppo, però, non è possibile misurare l'abbondanza di elio, poiché questo elemento non presenta righe di assorbimento nello spettro solare. Alle temperature tipiche esterne del Sole, la probabilità che questo elemento si trovi in uno stato eccitato (e quindi che abbia assorbito parte della radiazione) è praticamente nulla: secondo la statistica di Boltzmann tale probabilità è

$$P \propto e^{-E/KT} \tag{1.16}$$

dove E è l'energia dello stato eccitato e T la temperatura dell'ambiente in cui si trova l'atomo. L' energia relativa al primo livello eccitato dell'elio è circa 25 eV; l'energia termica negli strati più esterni del Sole è invece circa 0.52 eV ($T \simeq 6 \cdot 10^3 K$), per cui $P \simeq e^{-50} = 1.9 \cdot 10^{-22}$. In questo modo la concentrazione di atomi di elio efficaci all'assorbimento (n_{He}^{eff}) è troppo bassa e la riga non si vede; è ovvio che per livelli più eccitati P e quindi n_{He}^{eff} sono ancora più piccole.

In realtà, anche potendo misurare tutte le abbondanze, da queste non potremmo risalire ai valori esatti delle abbondanze iniziali: infatti, sotto l'azione combinata della diffusione termica e della sedimentazione gravitazionale, l'elio e gli elementi più pesanti scendono verso le zone a temperatura maggiore, mentre l'idrogeno sale verso l'esterno. Questo processo è lento (si calcola che un atomo di elio in superficie impiegherebbe circa 10^3 anni per raggiungere il centro del Sole), ma non si può trascurarne l'effetto nell'intervallo di tempo trascorso dall'ingresso del Sole in sequenza principale ad oggi. Perciò le abbondanze osservate non corrispondono esattamente a quelle dell'Età Zero: per ottenere queste, dobbiamo sovrastimare le prime aggiungendo un termine che tenga conto della diffusione; le dimensioni di tale termine dipenderanno drasticamente dalle ipotesi fatte su questo meccanismo.

Prima della nascita dell'Eliosismologia si avevano a disposizione solo cinque osservabili per caratterizzare il Sole:

1. il raggio, determinato a partire dal diametro apparente e dalla distanza della stella;

2. la luminosità;

3. la massa, che è ricavata dal prodotto MG, dove G è misurato attraverso i moti dei pianeti;

4. l'età, ricavata dalle stime delle età dei meteoriti, combinate con i modelli di formazione del sistema solare[2];

5. l'abbondanza dei metalli nella fotosfera, più precisamente Z/X.

Recenti valori per queste quantità sono: $R_\odot = (6.959 \pm 0.002) \cdot 10^{10}$ cm, $L_\odot = (3.842 \pm 0.015) \cdot 10^{33}$ erg s, $M_\odot = (1.9891 \pm 0.0004) \cdot 10^{33}$ g, $t_\odot = (4.57 \pm 0.001) \cdot 10^9$ anni (valori tratti da [7]), $Z/X = 0.0176 \pm 0.0032$ (da [2]).

Le grandezze che invece non si riescono a misurare direttamente sono l'abbondanza iniziale dei metalli e dell'elio, la prima perchè differisce da quella attuale a causa della diffusione, la seconda anche perchè non possiamo osservare quella attuale.

Per costruire un modello solare l'abbondanza originale di elio e dei metalli vengono prese come parametri liberi in modo da riprodurre (come discuteremo meglio in seguito) la luminosità osservata del Sole e lo Z/X osservato attualmente. Come abbiamo già discusso, anche l'efficienza della convezione esterna è determinata dal parametro libero α, che viene calibrato in modo da riprodurre la temperatura effettiva (o, equivalentemente, il raggio) del Sole.

Una volta scelti gli input fisici utilizzati e l'efficienza dei meccanismi macroscopici (come la diffusione), partendo da una struttura iniziale con composizione chimica omogenea e massa $M = M_\odot$, si fa evolvere la stella attraverso stati di equilibrio per un tempo pari a $t_\odot$, portandola allo stato attuale con $R = R_\odot$ e $L = L_\odot$.

Poichè nelle zone centrali $P \simeq (\rho k_B T)/(\mu m_P)$, dalla 1.4 si deduce che, a parità di P, una variazione di Y e quindi di μ ha effetti al primo ordine sulla temperatura T. Se varia T, varia anche la produzione di energia e quindi la luminosità della stella. Quindi variazioni di Y si ripercuotono principalmente su L; in prima approssimazione possiamo considerare L dipendente solo da Y. In realtà, poichè anche il valore originale di Z/X è incerto, anche la scelta di questa quantità influenzerà (in maniera minore di Y) la luminosità del Sole che otterremo.

A grandi linee si può dire che scegliendo opportunamente Y si riproduce l'esatto valore L e poi, variando α (cioè l'efficienza della convezione esterna e quindi l'estensione della zona convettiva) si fa coincidere R con $R_\odot$. Bisogna inoltre scegliere il valore di Z/X originale in maniera da ottenere, per $t = t_\odot$, lo Z/X osservato. E' ovvio che il confronto teoria-osservazioni effettuato tramite questo metodo con tre parametri e tre osservabili non dava particolari garanzie sulla bontà degli input fisici utilizzati.

[2]Per maggiori dettagli sulla determinazione dell'età del Sole e sulla composizione chimica della fotosfera vedere le appendici

L'Eliosismologia ha aggiunto altre osservabili a quelle già conosciute: infatti, come discuteremo successivamente, tramite i metodi di inversione è stato possibile ricavare l'abbondanza attuale dell'elio in superficie, la posizione della base della zona convettiva (R_b) e l'andamento della velocità del suono all'interno del Sole.

I modelli solari devono così riprodurre anche i valori di queste osservabili indirette; in particolare, l'andamento della velocità del suono ricavata eliosismologicamente costituisce un test stringente in tutta la struttura solare, mentre il numero dei parametri liberi è rimasto invariato. Riuscire a riprodurre le osservabili solari costituisce quindi un buon test per gli input fisici e per l'efficienza dei meccanismi macroscopici utilizzati nei modelli.

Capitolo 2

I modi normali di oscillazione della struttura solare

Dallo spostamento delle righe di assorbimento per effetto Doppler ($\Delta\lambda/\lambda = v/c$, dove v è la velocità della sorgente e c quella della luce) si può ricavare la velocità radiale di una data stella, misurando tale fenomeno sulle righe meglio osservate. Allo stesso modo, uno spostamento periodico delle righe può rivelare moti complessivi della materia superficiale di una stella, come ad esempio le pulsazioni: è proprio così che sono state individuate le oscillazioni globali del Sole (vedi anche la discussione al paragrafo 2.3). Le prime ad essere state scoperte avevano un periodo di circa 5 minuti ed inducevano una variazione del raggio della stella $\Delta R/R \simeq 1/100000 \div 1/1000000$.

Infatti, poiché il Sole è una struttura autogravitante costituita da gas comprimibile, può avere piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio. Esse nascono dalla sovrapposizione di un gran numero di onde stazionarie - essenzialmente di tipo acustico - dette modi normali di oscillazione.

Un'onda acustica generata all'interno del Sole si propaga fino alla superficie con velocità

$$c_S = (\Gamma_1 \, \frac{p}{\rho})^{1/2} \propto (T/\mu)^{1/2} \ , \tag{2.1}$$

dove p, T, ρ e $\Gamma_1 = dlogP/dlog\rho$ sono rispettivamente la pressione, la temperatura, la densità e l'indice adiabatico della materia; nel terzo termine della 2.1 abbiamo approssimato il gas all'interno del Sole a gas perfetto completamente ionizzato.

Le variazioni della temperatura e della densità dall'interno fino alla superficie provocano rifrazioni e riflessioni dell'onda, che resta intrappolata come in una cavità risonante. Il punto superiore di tale cavità è situato nella fotosfera, dove, a causa delle rapide variazioni della densità della materia in tale regione, l'onda viene riflessa verso l'interno solare.

Poichè la temperatura aumenta con la profondità e c_S è proporzionale a $T^{1/2}$, allora anche la velocità del suono aumenta con la profondità. Nella componente orizzontale del fronte dell'onda riflessa, allora, la parte più profonda è più veloce di quella meno profonda, provocando una deviazione graduale del fronte. L'onda tende a propagarsi più trasversalmente, arrivando ad un punto in cui la propagazione sarà solo orizzontale (vedi figura 2.1 a destra).

In tale punto, detto di inversione, si ha: $c_S = \lambda_h/P$; λ_h e P sono la lunghezza d'onda trasversale ed il periodo dell'oscillazione, che qui viene riflessa di nuovo verso la superficie.

L'onda acustica intrappolata nella cavità interferisce con sè stessa e può generare un'onda stazionaria se l'arco descritto dal fronte all'interno del Sole è un multiplo intero di $\lambda_h/2$; quindi per ogni lunghezza d'onda orizzontale solo certe armoniche danno un tale risultato. I modi così selezionati sono intrappolati tra la superficie solare ed un'immaginaria parete all'interno delimitata dai punti di inversione.

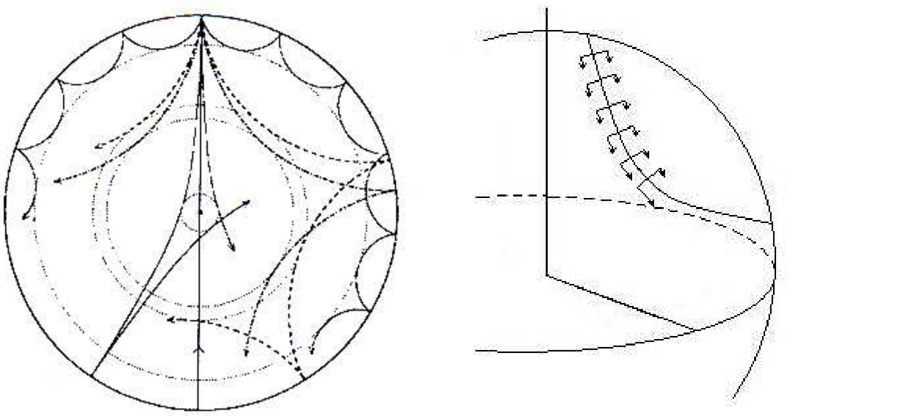

Figura 2.1: A sinistra: andamento di diversi fronti delle onde sonore all'interno del Sole. [Da Christensen-Dalsgaard (2002)] A destra: illustrazione del cambiamento della direzione del fronte d'onda con la profondità.

A seconda dell'armonica che dà origine all'onda stazionaria, lungo l'arco descritto dal fronte d'onda possono esserci dei nodi, punti in cui il mezzo di propagazione non oscilla: il numero dei nodi si indica con l'intero n, ordine radiale dell'armonica. Per ciascun modo si definiscono anche altri due interi, l ed m, riguardanti le caratteristiche dell'onda sulla superficie solare (vedere figure 2.2 e 2.3). Il grado l è il numero delle linee nodali, le quali separano due zone contigue della superficie in opposizione di fase; l'ordine azimutale m è invece il numero di nodi dell'onda lungo i paralleli e può assumere tutti i valori compresi tra $-l$ e $+l$. Teoricamente l può assumere tutti i valori tra 0 ed ∞, quindi ci dovremmo aspettare ∞^2 modi di oscillazione; in realtà, in base ad alcuni meccanismi che spiegherò brevemente più avanti, solo alcuni di essi sono continuamente alimentati ed i rimanenti vengono soppressi. E' stato calcolato che sul Sole ci dovrebbero essere circa 10 milioni di modi eccitati, sebbene quelli effettivamente osservati siano due ordini di grandezza in meno.

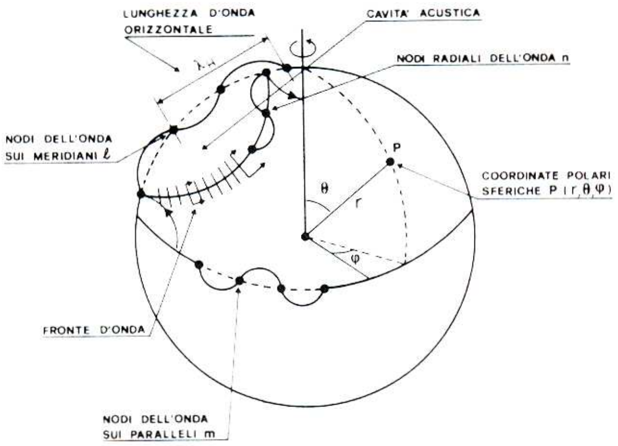

Figura 2.2: Illustrazione dei numeri n, l ed m che caratterizzano ciascun modo normale. Da Paternò (1986).

2.1 Le equazioni di base

Il modello che descrive le oscillazioni eliosismologiche si basa su alcune semplificazioni.

Oscillazioni adiabatiche. Si definisce "tempo scala termico", t_{th}, quel tempo che una stella impiega per riportarsi all'equilibrio termico, dopo che una perturbazione (anche dipendente dal tempo) è stata applicata. t_{th} cresce con lo spessore della zona interessata e raggiunge il suo massimo per l'intera stella: per il Sole $t_{th}^{max} \simeq 3 \cdot 10^7$ anni. Poiché i tempi tipici delle oscillazioni (dai 5 ai 360 minuti) sono molto più piccoli del tempo scala termico, queste possono essere considerate in buona approssimazione adiabatiche;

Effetti della rotazione trascurabili. Il complesso argomento della determinazione della velocità di rotazione della struttura solare esula gli scopi di questa tesina. Accennerò soltanto ai risultati, che giustificano l'approssimazione di effetti della rotazione trascurabili. Il Sole è caratterizzato da una rotazione rigida al di sotto della zona convettiva e da una rotazione variabile con la latitudine (rotazione differenziale) che coinvolge la regione della zona convettiva fino alla superficie. La rotazione del Sole è stata individuata per mezzo dello sdoppiamento

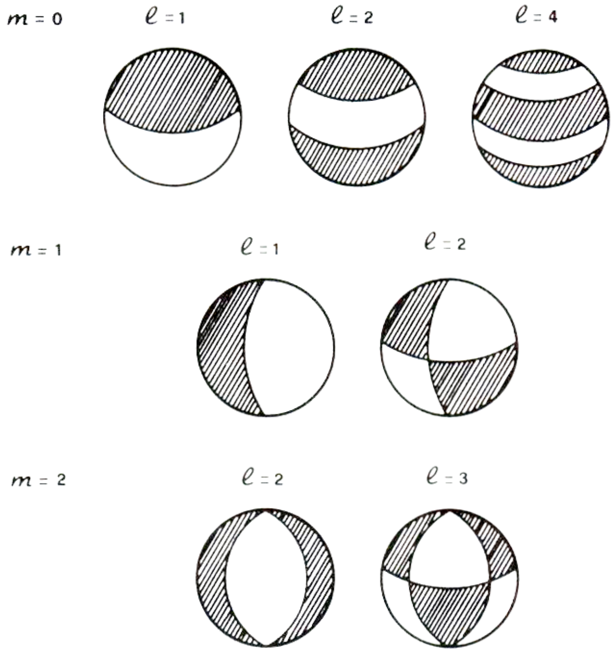

Figura 2.3: Effetti sulla superficie solare di alcuni modi di oscillazione. Si distinguono le zone superficiali che si espandono (quelle bianche) da quelle che contemporaneamente si contraggono (quelle tratteggiate). Dalle osservazioni della superficie solare è possibile individuare l ed m, mentre il numero di nodi radiali n si può ottenere solo tramite la teoria. Da Paternò (1986).

delle frequenze di oscillazione osservate, secondo la legge

$$\omega = \omega_0 \pm |m|\,\Omega \tag{2.2}$$

dove ω_0 è l'autofrequenza in assenza di rotazione e Ω è la velocità angolare della stella, che può essere ricavata per mezzo del metodo di inversione. In generale, una rotazione troppo rapida deforma la stella tramite l'effetto di schiacciamento ai poli e la simmetria della struttura non sarà più sferica; bisognerebbe inoltre tenere conto dell'effetto della forza centrifuga sul bilancio energetico. Per il Sole la velocità angolare non è così grande: dalla figura 2.4 si può vedere che per le zone interne $\Omega/2\pi \simeq 450$ nHz, mentre in superficie passa da $\simeq 450$ nHz all'equatore fino a $\simeq 320$ nHz alla latitudine di 75^o. Quindi si può considerare la stella come una sfera in cui le grandezze fisiche di interesse dipendono solo dalla distanza dal centro.

Perturbazioni lineari. La variazione relativa massima del raggio dovuta alle oscillazioni è $\simeq 1/100000$, così piccola che si può applicare

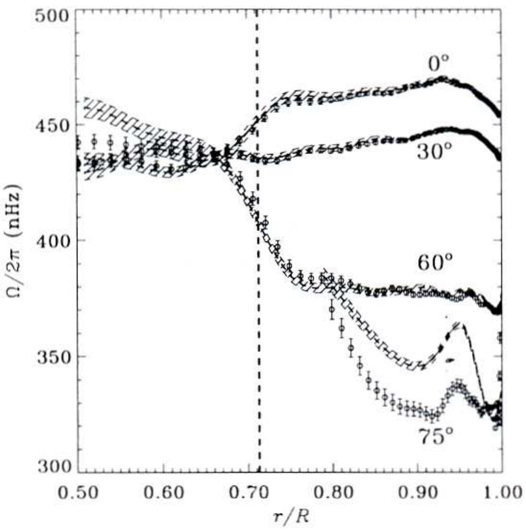

Figura 2.4: Frequenza di rotazione in funzione del raggio alle latitudini indicate; sono riportate le barre di errore. La linea tratteggiata indica la base della zona convettiva. Da Christensen-Dalsgaard (2002).

la teoria delle piccole perturbazioni dall'equilibrio, cioè considerare perturbazioni lineari.

Le equazioni per le oscillazioni si ottengono linearizzando il sistema formato da quattro equazioni: la prima è l'equazione di continuità, che esprime la conservazione della massa

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0\,, \tag{2.3}$$

dove ρ è la densità e, definendo $\vec{\xi}$ lo spostamento di un volume di gas dalla posizione dell'equilibrio, si ha che $\vec{v} = d\vec{\xi}/dt$. La seconda equazione è quella della conservazione del momento per un fluido non viscoso

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} - \vec{\nabla}\Phi\,, \tag{2.4}$$

dove P è la pressione, Φ è il potenziale gravitazionale ed il termine $-\vec{\nabla}\Phi$ indica la forza gravitazionale. La terza equazione è quella di Poisson per il potenziale gravitazionale

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho \tag{2.5}$$

dove G la costante di gravitazione universale; infine abbiamo la condizione di oscillazioni adiabatiche

$$\frac{dlogP}{dlog\rho} = \Gamma_1 \Rightarrow \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \Gamma_1\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}. \tag{2.6}$$

Facendo l'approssimazione di simmetria sferica per la struttura solare, possiamo separare nell'espressione per il vettore spostamento, $\vec{\xi}$, l'andamento spaziale da quello temporale ed esprimere il primo in coordinate sferiche:

$$\vec{\xi} = \left(\xi_r(r),\ \xi_h(r)\frac{\partial}{\partial\theta},\ \frac{\xi_h(r)}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\ Y_l^m(\theta,\phi)\, e^{-i\omega_{nl}t}\,, \tag{2.7}$$

dove abbiamo espresso le frequenze di oscillazione (o autofrequenze) $\omega = \omega_{nl}$, assumendone la non dipendenza da m, cioè trascurando eventuali effetti della rotazione del Sole; ξ_r è lo spostamento radiale, ξ_h quello trasversale; $Y_l^m(\theta,\phi)$ è l'armonica sferica di grado l ed ordine angolare m.

In particolare, per l=0 anche m=0 ed allora $Y_l^m(\theta,\phi)$= costante, cioè l'oscillazione è solo radiale: per questo motivo tali modi sono anche detti radiali.

Sostituendo la 2.7 nelle 2.3 - 2.6 si ottiene un sistema del quarto ordine nelle variabili ξ_r, ξ_h e Φ' (cioè la perturbazione del potenziale gravitazionale Φ):

$$\frac{d\xi_r}{dr} = -\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{\Gamma_1}\frac{dlogP}{dr}\right)\xi_r + \frac{r\omega^2}{c_S^2}\left(\frac{S_l^2}{g} - 1\right)\xi_h - \frac{\Phi'}{c_S^2} \tag{2.8}$$

$$\frac{d\xi_h}{dr} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{N^2}{\omega^2}\right)\xi_r + \left(\frac{N^2}{g} - \frac{1}{r}\right)\xi_h + \frac{N^2}{gr\omega^2}\,\Phi' \tag{2.9}$$

$$\frac{d^2\Phi'}{dr^2} = -\frac{2}{r}\frac{d\Phi'}{dr} - 4\pi G\rho\left(\frac{N^2}{g}\,\xi_r + \frac{r\omega^2}{c_S^2}\,\xi_h\right) + \left(\frac{L^2}{r^2} - \frac{4\pi G\rho}{c_S^2}\right)\Phi' \tag{2.10}$$

dove $\omega = \omega_{nl}$, g è l'accelerazione di gravità

$$g = \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} = \frac{GM(r)}{r^2} \tag{2.11}$$

e c_S è la velocità del suono

$$c_S^2 = \Gamma_1\,\frac{P}{\rho}\,. \tag{2.12}$$

Inoltre

$$N = \sqrt{-g\,A} \tag{2.13}$$

è detta frequenza di Brunt-Väisälä ed è la massima frequenza di un volumetto di materia che oscilla sotto la sola azione della forza di gravità, mantenendo l'equilibrio di pressione con l'esterno. Si può far vedere che $A \propto (\nabla_{rad} - \nabla_{ad})$ e quindi N è un numero reale solo dove il trasporto dell'energia è esclusivamente radiativo. S_l è detta frequenza di Lamb

$$S_l = 2\pi\,\frac{c_S}{\lambda_H} = \sqrt{l(l+1)}\,\frac{c_S}{r} \tag{2.14}$$

ed è tale che r è la profondità massima a cui può arrivare un modo con $\omega = S_l$ e grado l senza subire riflessione.

In genere, per le oscillazioni non radiali si fa anche un'altra approssimazione, detta approssimazione di Cowling, che trascura la perturbazione sul potenziale gravitazionale: infatti, nelle oscillazioni non radiali, il contributo che Φ riceve dallo spostamento di una certa quantità di materia, viene in generale compensato dal movimento opposto di altra materia.

Ponendo quindi $\Phi' = 0$ nelle 2.8 - 2.10 si ottiene un sistema di due equazioni del secondo ordine. Inoltre possiamo fare l'approssimazione che in tutto l'interno stellare g, c_S ed N varino poco rispetto a ρ e P: in tal caso la lunghezza d'onda delle oscillazioni è molto piccola rispetto al raggio solare. Introducendo la variabile

$$\Psi = c_S^2\, \rho^{1/2}\, \nabla \cdot \xi \tag{2.15}$$

il sistema del secondo ordine diviene un'unica equazione:

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} + K^2\Psi = 0 \tag{2.16}$$

cioè l'equazione di un oscillatore armonico, dove $K = \sqrt{{K_r}^2 + {K_h}^2}$ è il numero d'onda dell'oscillazione di frequenza $\omega = \omega_{nl}$ (K_r e K_h sono rispettivamente il numero d'onda radiale e trasversale). K è tale che

$${c_S}^2{K_r}^2 + {S_l}^2(1 - \frac{N^2}{\omega^2}) = \omega^2 - {\omega_C}^2\,. \tag{2.17}$$

La 2.17 è detta relazione di dispersione e ci dà le condizioni di propagazione dell'onda acustica nell'interno solare, di cui S_l, N ed ω_C sono grandezze caratteristiche: ω_C è detta frequenza di taglio

$$\omega_C = c_S\, \frac{\sqrt{1 - 2H'_\rho}}{2H_\rho}\,, \tag{2.18}$$

cioè la minima frequenza a cui si può propagare l'onda senza che venga riflessa a causa della variazione della densità (H_ρ è l'altezza di scala della densità, mentre $H'_\rho = \frac{dH_\rho}{dr}$).

Affinché l'oscillazione si propaghi deve essere ${K_r}^2 > 0$, allora un modo radiale (l=0 e quindi $S_l = 0$) si propaga solo se ha $\omega > \omega_C|_{r=0} \simeq 1\,\text{mHz}$ e contemporaneamente $\omega < 5\,\text{mHz}$, che è la frequenza massima osservata per le oscillazioni globali. Per un modo non radiale ($l > 0$), l'equazione 2.17 può essere riscritta come segue

$${c_s}^2{K_r}^2 = \omega^2(1 - \frac{{\omega_{l+}}^2}{\omega^2})(1 - \frac{{\omega_{l-}}^2}{\omega^2}) \tag{2.19}$$

dove

$$\omega_{l\pm}^2 = \frac{1}{2}\left(S_l^2 + \omega_C^2\right) \pm \left[\frac{1}{4}\left(S_l^2 + \omega_C^2\right) - N^2 S_l^2\right]^{1/2} \tag{2.20}$$

ω_{l+} e ω_{l-} sono soluzioni della 2.17. Quindi l'onda si propaga se (a) $\omega > \omega_{l+}$ e (b) $\omega < \omega_{l-}$, mentre se $\omega_{l-} < \omega < \omega_{l+}$ le oscillazioni vengono smorzate tanto più rapidamente quanto più grande è l (onde evanescenti). Vediamo ora in che modo ω_{l+} e ω_{l-} sono legate alle frequenze caratteristiche del mezzo: in profondità $\omega_{l-} \simeq N$ e, nel caso di $l > 2$, $\omega_{l+} \simeq S_l$; in superficie $\omega_{l+} \simeq \omega_C$ e $\omega_{l-} \simeq 0$. Quindi il caso (a) corrisponde ad onde limitate da S_l, dette modi p, mentre il caso (b) ad onde limitate da N, dette modi g.

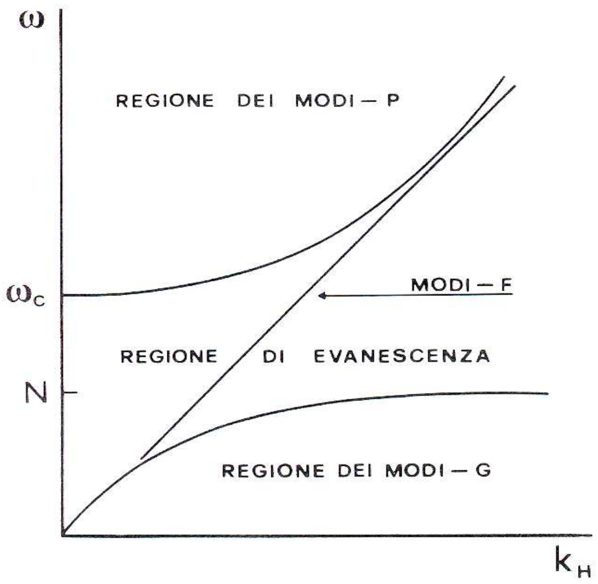

Figura 2.5: Intervalli di frequenze per la propagazione dei modi p, g ed f. Da Paternò (1987).

I modi p sono onde longitudinali, in cui la perturbazione si propaga tramite successive compressioni e rarefazioni del mezzo (onde di pressione); i modi g sono onde trasversali, in cui la gravità fa da forza di richiamo per piccoli moti convettivi: se un volumetto di materia si sposta in una zona di densità minore, per la legge di Archimede riceverà una spinta verso il basso proporzionale alla sua densità, viceversa, la materia spostata durante la salita del volumetto riceverà un'analoga spinta verso l'alto. Quando ciò si ripete ciclicamente, abbiamo un'onda di gravità, o modo g: per la loro natura, queste oscillazioni non hanno simmetria sferica, quindi si definiscono per $l > 0$.

Per $l > 2$, l'andamento di S_l e N in funzione del raggio separa abbastanza nettamente la zona di propagazione dei modi p (alte frequenze) da quella dei modi g (basse frequenze). I primi si propagano se $\omega > \omega_{l+}$ e quindi se $\omega > S_l$ all'interno e $\omega > \omega_C$ in superficie; dalle 2.14 e 2.18 si vede che S_l aumenta con l, mentre ω_C raggiunge il suo massimo sulla superficie, dove H_ρ è piccola. Quindi un modo p si propaga tanto più in profondità quanto più basso è l e raggiunge il centro se ha l=0 (in tal caso valgono le considerazioni fatte in precedenza per un modo radiale). I modi g, invece, sono intrappolati tra il centro e la base della zona convettiva, dove N diventa un numero immaginario puro.

Per l=1 il comportamento dell'oscillazione non è definito univocamente, tanto che questa può propagarsi come modo g nelle zone più interne, essere evanescente nelle regioni intermedie e riapparire come modo p all'esterno.

Oltre ai modi p e g, che si propagano anche in direzione radiale, ci sono delle oscillazioni che hanno solo propagazione orizzontale, i modi f: per essi ${K_r}^2 < 0$ e ${K_h}^2 > 0$ e quindi, per la prima disuguaglianza, si propagano nella regione di evanescenza. Nel Sole queste oscillazioni sono attribuite ad onde di gravità superficiale, con una relazione di dispersione del tipo

$$\omega^2 = g\, K_h \tag{2.21}$$

ed esistono solo per $l \geq 2$.

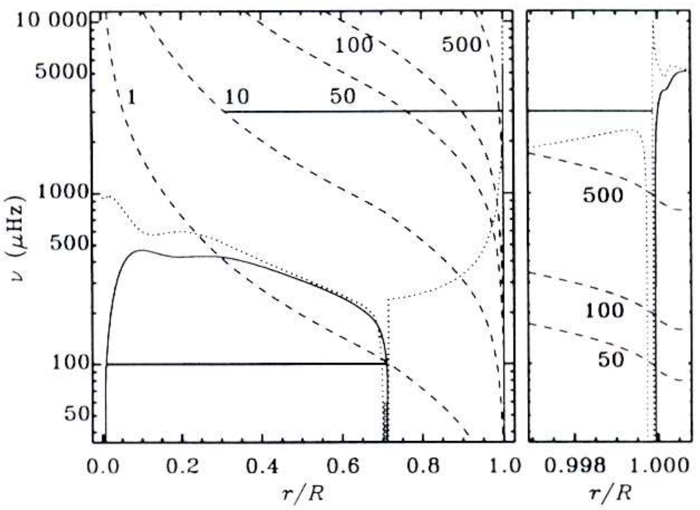

Figura 2.6: Regioni di propagazione di alcuni modi p e g. La curva continua indica l'andamento della frequenza di Brunt-Väisälä N/2π, quella con i puntini indica l'andamento della frequenza di taglio $\omega_C/2\pi$, mentre le curve tratteggiate indicano $S_l/2\pi$ per l = 1, 10, 50, 100, 500. Le curve continue orizzontali segnano le regioni in cui sono intrappolati un modo g di frequenza 100μHz ed un modo p di frequenza 3mHz. Il riquadro a destra è un ingrandimento dell'andamento per $0.998 < r/R < 1$. Da Christensen-Dalsgaard (2002).

2.2 Meccanismi di eccitazione e smorzamento

Un'oscillazione, una volta instauratasi, può incontrare dei meccanismi che la mantengono nel tempo ed altri che le si oppongono: essa "sopravviverà" se i primi prevalgono sui secondi.

Nel Sole, i meccanismi di eccitazione per i modi p agiscono principalmente nella zona convettiva: anche se tali meccanismi non sono stati ancora compresi con precisione, i ricercatori pensano che potrebbe trattarsi di effetti di risonanza per cui i moti convettivi eccitano i modi p di periodo confrontabile con il loro. In generale, nel Sole il tempo impiegato da una massa convettiva per percorrere il cammino medio (o mixing lenght), T_{Hp} , è molto maggiore del periodo P di una qualunque onda di pressione, quindi solo i moti convettivi con periodo $T \simeq P(< T_{Hp})$ possono dare risonanza; nella parte superiore della zona convettiva T_{Hp} è minore e diventa comparabile con i periodi più lunghi dei modi p.

Sempre nella zona convettiva abbiamo anche un meccanismo di smorzamento, strettamente legato a quello di eccitazione: tutte le oscillazioni che hanno periodi non risonanti con quelli dei moti convettivi, finiscono col cedere energia a questi ultimi e così vengono smorzate.

2.3 Alcune tecniche per l'osservazione delle oscillazioni

Accennerò brevemente per completezza alle linee guida delle tecniche di osservazione delle frequenze di oscillazione. Per trattare l'argomento in maniera precisa dovrei scendere più in dettaglio, allontanandomi dagli scopi di questa tesina, che si occupa invece dei modelli solari e dei metodi e risultati eliosismologici.

Le oscillazioni solari hanno due differenti effetti rilevabili tramite l'osservazione: la variazione nell'emissione di energia da parte del Sole, che può essere vista tramite lo spettro integrato su tutte le frequenze, e lo spostamento Doppler delle righe di assorbimento, che si ottiene invece dall'analisi spettroscopica.

Poichè entrambi gli effetti sono prodotti dagli stessi modi di oscillazione, dallo spettro solare o dal flusso di energia si ottiene lo stesso set di autofrequenze. La decisione di scegliere una tecnica osservativa piuttosto che un'altra è allora dettata da particolari limitazioni pratiche, come ad esempio il fatto che la sensibilità degli strumenti ottici a Terra è inferiore a causa delle turbolenze atmosferiche oppure il fatto che l'atmosfera solare può essere soggetta a variazioni di altra natura.

La variazione nell'intensità della radiazione solare dovuta al singolo modo di oscillazione è dell'ordine di una parte su un milione (Christensen-

Dalsgaard (2002)), mentre in generale l'intensità subisce variazioni ben più grandi a causa dell'attività solare.

Per fortuna, però, le variazioni dovute alle oscillazioni hanno grandi coerenze spaziali e temporali, a differenza delle altre fonti di fluttuazione. Integrando perciò sul disco solare e prolungando le osservazioni su tempi di diversi mesi si elimina sia il rumore dovuto all'attività solare, sia quello dovuto a fluttuazioni casuali.

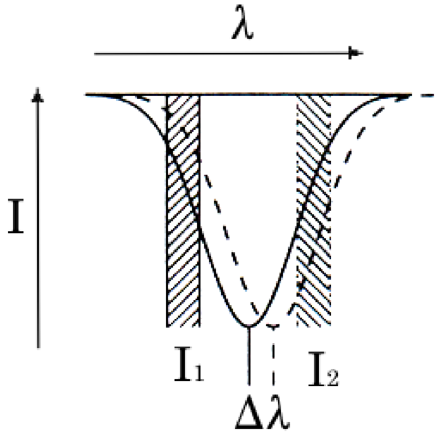

Figura 2.7: Schema dell'oservazione dello spostamento Doppler di una riga di assorbimento. La velocità lungo la linea di vista causa uno spostamento della lunghezza d'onda a cui compare la riga ($\Delta\lambda$). Questo cambia le intensità misurate I_1 ed I_2 misurate. Adattato da Christensen-Dalsgaard (2002).

Eventuali interruzioni nell'acquisizione dei dati introducono però delle frequenze aggiuntive allo spettro di frequenze osservato, che difficilmente possono essere individuate ed eliminate per ottenere il vero set di autofrequenze.

Questo problema viene risolto tramite osservazioni coordinate in differenti punti sul globo terrestre oppure dallo spazio (per eliminare eventuali incertezze nelle misure dovute alle turbolenze dell'atmosfera terrestre), in modo da compensare le interruzioni nell'osservazione durante la notte.

Dalle osservazioni dello spostamento Doppler di una certa riga spettroscopica si ricava la velocità lungo la linea di vista: questo viene fatto misurando l'intensità della radiazione in due bande molto strette agli estremi di una riga di assorbimento ben focalizzata (I_1, I_2). Lo spostamento della superficie solare a causa dell'oscillazione provoca uno spostamento della riga secondo la nota legge $\Delta\lambda/\lambda = v/c$ (λ è la lunghezza d'onda a cui si osserva in genere la riga, $\Delta\lambda$ è lo spostamento di questa dovuto all'oscillazione, v è la velocità lungo la linea di vista e c è quella della luce). Si ha quindi una variazione di I_1 ed I_2. Il rapporto $(I_1 - I_2)/(I_1 + I_2)$ ci dà una stima dello spostamento e quindi della velocità di oscillazione. (vedi figura 2.7).

Tra i vari gruppi osservativi da Terra citiamo BISON (Birmingham Solar Oscillation Network), GONG (Global Oscillation Network Group) e LOWL.

Un grosso contributo è stato dato dal satellite SOHO, lanciato nel 1995 e che dal 1996 ha iniziato a prendere misure. SOHO è costituito da tre strumenti: GOLF (Global Oscillations at Low Frequency), che è focalizzato nella ricerca di modi a bassa frequenza, tra cui i modi g; VIRGO (Variability of IRradiance and Gravity Oscillations), che misura l'energia irradiata, le intensità mediate sul disco per tre diverse lunghezze d'onda e cerca di individuare i modi g; SOI-MDI (Solar Oscillation Investigation - Michelson Doppler Imager), che ricava immagini Doppler della velocità, cioè immagini del disco solare in cui, dopo aver eliminato l'effetto della rotazione della stella, si osserva il moto ascendente o discendente di ciascun punto della superficie. Questo strumento permette uno studio dettagliato delle oscillazioni fino a valori di $l \simeq 1000$.

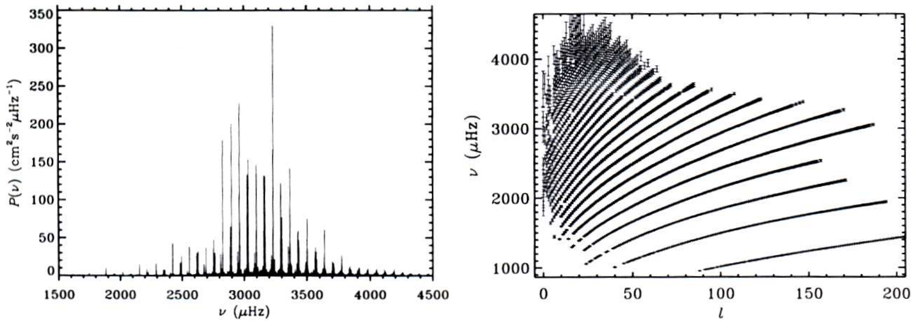

Figura 2.8: A sinistra: spettro in potenza delle oscillazioni solari, ottenuto dalle osservazioni Doppler della luce integrata sul disco. I dati sono stati ottenuti per mezzo di misure prolungate per quattro mesi da sei stazioni di osservazione. A destra: frequenze solari osservate da MDI. Da Christensen-Dalsgaard (2002).

Capitolo 3

Metodo di inversione eliosismologico

3.1 Confronto tra le frequenze osservate e quelle previste da un modello

Dato un modello solare, con dati valori per le variabili fisiche della struttura, Q_{mod}, si può calcolare un set di autofrequenze per le oscillazioni di questa ν_{mod} che in generale sarà diverso dal set di frequenze osservate $\nu_{\odot}$.

Poichè le frequenze osservate hanno un'elevata accuratezza $((1/10^4) \div (1/10^5))$, dall'analisi diretta delle differenze tra i due set si possono ottenere varie informazioni sull'affidabilità del modello che abbiamo scelto. Uno studio molto dettagliato di questo genere è stato condotto da Guenther et al. (1997), utilizzando come set di frequenze osservate quello del Global Oscillation Network Group ed in particolare frequenze per modi con basso grado l. La scelta dei modi p ad l basso è dettata dal fatto che questi hanno punti di inversione più vicini al centro del Sole (al diminuire di l) e quindi riescono a darci buone informazioni su questa zona.

Per le considerazioni di nostro interesse, vediamo alcuni tra i risultati ottenuti dagli autori confrontando le frequenze osservate con quelle previste da modelli che non tengono conto della diffusione, modelli che prevedono la diffusione solo dell'elio e modelli che invece prevedono la diffusione dell'elio e degli elementi più pesanti (vedere tabella 3.1).

In generale nei grafici per $\nu_{mod} - \nu_{\odot}$ in funzione di $\nu_{\odot}$ si nota un aumento della discrepanza all'aumentare della frequenza $\nu_{\odot}$ (figura 3.1): questa è una conseguenza delle incertezze di tutti i modelli solari nella descrizione delle regioni più esterne (zona convettiva, fotosfera ed atmosfera). L'accordo tra i due set di frequenze viene stimato ignorando questo aumento della discrepanza (come se gli inviluppi di linee avessero una larghezza circa costante) e considerando invece quanto le differenze $\nu_{mod} - \nu_{\odot}$ si discostano da zero.

Modelli senza diffusione non riescono ad avere contemporaneamente ac-

Modello	Diffusione	Età	X_{surf}	Z_{surf}	$(Z/X)_{surf}$	R_b
1	no	4.5	0.7237	0.0170	0.0235	0.7320
9	no	4.9	0.6931	0.0230	0.0332	0.7150
12	Y	4.5	0.7075	0.0230	0.0325	0.7110
20	Y, Z	4.5	0.7378	0.0180	0.0244	0.7160

Tabella 3.1: Caratteristiche dei modelli solari standard trattati nella sezione 3.1. Alla voce "Diffusione" abbiamo indicato con "no" i modelli senza diffusione, con "Y" e "Y, Z" i modelli che rispettivamente tengono conto della diffusione solo dell'elio e dell'elio e dei metalli. Con i simboli X_{surf} e Z_{surf} si indicano le abbondanze superficiali rispettivamente dell'idrogeno e dei metalli previste dal particolare modello (in questo studio gli autori hanno preso come valore di riferimento per lo Z/X osservato 0.0024 ± 0.0010, mentre quello aggiornato recentemente è 0.0176 ± 0.0032). Le età sono espresse in miliardi di anni; R_b è espressa in unità di $R_\odot$. Adattato da Guenther et al. (1997).

cordo tra le frequenze e a riprodurre i parametri Z/X in superficie, la base della zona convettiva R_b e l'età del Sole $t_\odot$: ad esempio il modello 1 (figura 3.1, in alto a sinistra) riproduce Z/X e $t_\odot$ entro i rispettivi errori, mentre non riproduce R_b e ci sono grosse discrepanze tra il set ν_{mod} e quello $\nu_\odot$; per il modello 9 (figura 3.1, in alto a destra) abbiamo invece un buon accordo tra i due set ed un valore accettabile per R_b, ma otteniamo valori Z/X e $t_\odot$ non accettabili.

La diffusione dell'elio risolve solo parzialmente questo problema: tutti i modelli che tengono conto della diffusione dell'elio e che hanno un buon accordo tra i due set, danno il giusto valore di R_b, ma non riescono a riprodurre Z/X e $t_\odot$ contemporaneamente. Modelli che danno il giusto valore di $t_\odot$ danno uno Z/X maggiore di quello osservato (figura 3.1, in basso a sinistra).

Introduciamo infine la diffusione anche per gli elementi più pesanti: poichè i metalli scendono al di sotto della superficie, il valore di Z/X superficiale è inferiore, mentre quello nelle regioni più interne, che influenza maggiormente le frequenze dei modi p, aumenta di poco. In questo modo abbiamo ancora accordo tra i set di frequenze ed un modello che riproduce R_b e $t_\odot$ darà anche il giusto valore di Z/X (perchè ora è inferiore) (figura 3.1, in basso a destra).

3.2 Caratteristiche dell'inversione

Oltre ad analizzare differenze tra le frequenze osservate $\nu_\odot$ e quelle previste ν_{mod}, possiamo cercare le correzioni q alle quantità del modello solare di

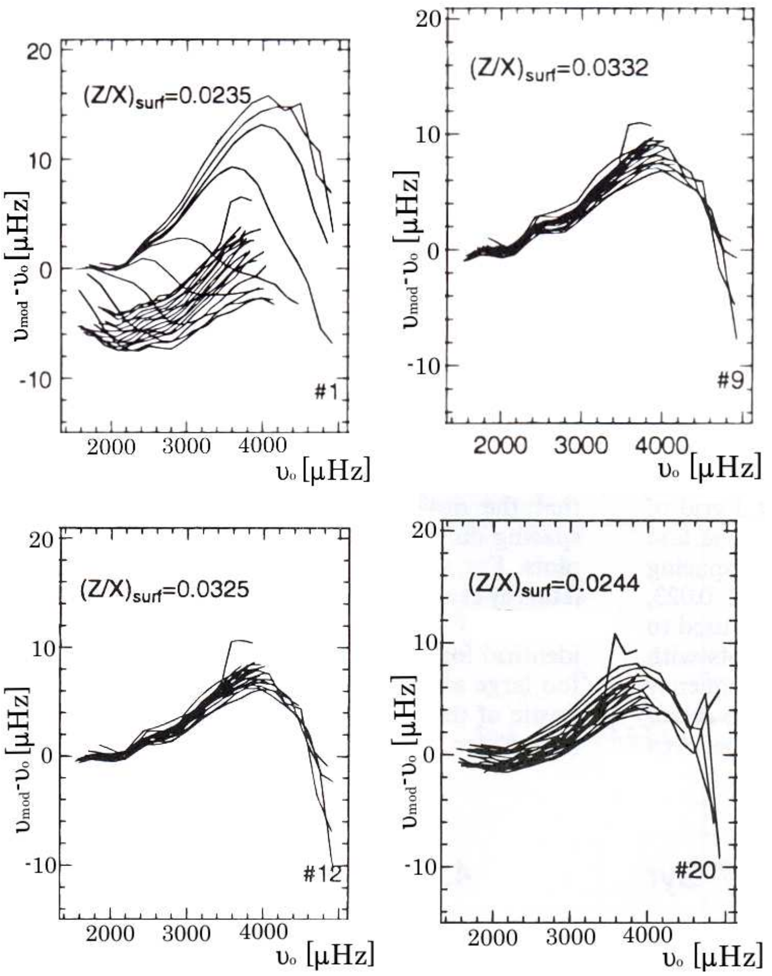

Figura 3.1: Confronto tra le frequenze osservate e quelle previste dai modelli in tabella 3.1 . Per ogni modello è indicato il valore previsto di $(Z/X)_{surf}$. Adattato da Guenther et al.(1997).

partenza, in modo da avere variazioni $\Delta\nu$ alle frequenze teoriche precedentemente ottenute, tali che $\nu_{mod} + \Delta\nu = \nu_{\odot}$. Si definiscono così le variabili effettive all'interno del Sole $Q_{mod} + q = Q_{\odot}$. L'espressione per $\Delta\nu$ in funzione della correzione q si ottiene per mezzo della teoria delle perturbazioni: il modello di partenza viene usato come ordine zero ed i q vengono calcolati assumendo sempre valide le proprietà di regolarità per le variabili Q. Come abbiamo visto nel capitolo precedente, le autofrequenze sono completamente determinate se specifichiamo P, ρ, g e Γ_1 in funzione della distanza dal centro; se però consideriamo valide le equazioni che descrivono la struttura stellare all'equilibrio, abbiamo che di queste grandezze solo due sono del tutto indipendenti. Infatti P, ρ e g sono legate dalle equazioni dell'equilibrio idrostatico, di continuità e di conservazione del momento.

I metodi di inversione si basano proprio sul fatto che le frequenze sono determinate da una precisa coppia di variabili, ad esempio Γ_1 ed una qualsiasi f, funzione di P e ρ o combinazione di queste e delle loro derivate. Ipotizzando che le differenze tra le frequenze osservate e quelle predette da un particolare modello $\Delta\nu = \nu_\odot - \nu_{mod}$ siano abbastanza piccole, si riescono ad esprimere le note $\Delta\nu$ come combinazioni lineari delle invece non note differenze tra le variabili effettive e quelle del modello. La formula che si ottiene è del tipo:

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_j = \int K^j_{f,\Gamma}\,\frac{\Delta f}{f}\,dr \;+\; \int K^j_{\Gamma,f}\,\frac{\Delta\Gamma_1}{\Gamma_1}\,dr \;+\; \frac{F(\nu_j)}{I_j} \tag{3.1}$$

dove $j = (n,l)$ indica il modo. Il termine $F(\nu_j)/I_j$ viene introdotto per bilanciare le grosse incertezze sulla validità del modello vicino alla superficie solare:

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)^{sup}_j = \frac{F(\nu_j)}{\int |\vec{\xi}|^2\,\rho dV} = \frac{F(\nu_j)}{I_j} \tag{3.2}$$

dove $\vec{\xi}$ è lo spostamento di un volume di gas dalla posizione di equilibrio ed I_j, cioè l'integrale dell'energia cinetica del modo di oscillazione, viene detto momento di inerzia per il modo. $K^j_{f,\Gamma}$ e $K^j_{\Gamma,f}$ sono detti kernel e sono funzioni note del raggio che legano le variazioni della frequenza alle variazioni di f e Γ_1 rispettivamente; essi vengono calcolati una volta scelto il modello solare di partenza. Utilizzando l'equazione 3.1 per un set di autofrequenze osservate possiamo ottenere le funzioni f, $F(\nu)$ e $\Delta\Gamma_1$ nell'ipotesi che queste varino piuttosto lentamente.

Introduciamo le ulteriori ipotesi:

1. $\Gamma_1 = \Gamma_1(P, \rho, Y)$;

2. Γ_1 = costante nell'interno radiativo. In questa zona infatti la materia è completamente ionizzata ed il grado di ionizzazione non varia apprezzabilmente al variare della temperatura e della pressione: possiamo allora considerare $\Gamma_1 \simeq 5/3$, cioè quello di un gas perfetto monoatomico;

3. nell'inviluppo convettivo $Y = Y|_{r=R_\odot}$, poichè i mescolamenti dovuti alla convezione creano una composizione chimica omogenea.

Possiamo così sostituire la funzione non nota $\Delta\Gamma_1$ nella zona convettiva con il numero non noto $\Delta Y = \Delta Y|_{r=R_\odot}$:

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_j = \int K^j_{f,Y}\,\frac{\Delta f}{f}\,dr \;+\; J\Delta Y \;+\; \frac{F(\nu_j)}{I_j} \tag{3.3}$$

dove $K^j_{f,Y}$ è il nuovo kernel per f e l'integrale J dipende dalla frequenza, ν, e dal grado l del modo di oscillazione considerato. Dall'inversione otteniamo così l'abbondanza di elio in fotosfera.

Tramite l'inversione si ottiene inoltre generalmente la velocità del suono (al quadrato) $c_S^2 = \Gamma_1 P/\rho$ all'interno del Sole insieme eventualmente alla densità:

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_j = \int K^j_{c_S^2,\rho} \frac{\Delta c_S^2}{c_S^2}\, dr + \int K^j_{\rho,c_S^2} \frac{\Delta\rho}{\rho}\, dr + \frac{F(\nu_j)}{I_j} \tag{3.4}$$

In generale, la condizione che le soluzioni ($\Delta f/f$ ed $F(\nu)$ per la 3.3, o $\Delta c_S^2/c_S^2$, $\Delta\rho/\rho$ ed $F(\nu)$ per la 3.4) siano funzioni che variano lentamente viene rispettata esprimendole sotto forma di funzioni conosciute, i cui coefficienti vengono determinati tramite il metodo dei minimi quadrati (nel caso della 3.3 $\Delta Y = \Delta Y|_{r=R_\odot}$ viene determinato insieme ai coefficienti). Ad esempio, per c_S^2:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\Delta\nu_j}{e_j}\right)^2 + \frac{\lambda}{N} \int \left(\frac{d^2}{dr^2}\, \frac{\Delta c_S^2}{c_S^2}\right)^2 dr\,. \tag{3.5}$$

N è il numero di frequenze usate ed e_j sono gli errori delle frequenze misurate, che in generale si assumono indipendenti e distribuiti su gaussiane con valor medio nullo e varianza σ_j^2. Il termine con l'integrale serve per avere come soluzioni funzioni regolari e λ è un parametro che controlla la regolarizzazione delle funzioni. Questo metodo non è applicabile nella parte più interna del Sole, per $r \leq 0.1 R_\odot$, poiché solo una minima parte delle frequenze osservate è sensibile a variazioni delle grandezze di interesse in questa zona.

Metodi di inversione che invece sono validi in tutto l'interno solare cercano dei valori medi per le variabili di interesse, centrati in determinati punti r_0 e con una data larghezza (possibilmente piccola).

Si ottengono quindi le differenze relative medie, ad esempio, tra la funzione c_S^2 prevista dal modello e quella effettiva del Sole:

$$\left\langle \frac{\Delta c_S^2}{c_S^2}\,(r_0) \right\rangle = \sum_{j=1}^{N} d_j(r_0) \left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_j \tag{3.6}$$

dove $d_j(r_0)$ sono dei coefficienti da determinare. Facendo riferimento all'equazione 3.4, definiamo il "kernel medio" per c_S^2

$$K_{c_S^2}(r_0, r) = \sum_{j=1}^{N} d_j(r_0) K^j_{c_S^2,\rho}(r) \tag{3.7}$$

ed il "termine incrociato" per c_S^2

$$C_{c_S^2}(r_0, r) = \sum_{j=1}^{N} d_j(r_0) K^j_{\rho,c_S^2}(r)\,. \tag{3.8}$$

Lo scopo di questa tecnica è quindi quello di eliminare i contributi del "termine incrociato" e del termine di superficie nella combinazione lineare della 3.6 e ciò si ottiene scegliendo opportunamente i coefficienti $d_j(r_0)$. Il termine $F(\nu_j)/I_j$ nella 3.4 viene infatti eliminato assumendo che $F(\nu)$ sia esprimibile come combinazione di polinomi Ψ_λ di grado λ ed imponendo che i coefficienti $d_j(r_0)$ soddisfino la relazione

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{d_j(r_0)\Psi_\lambda(\nu_j)}{I_j} = 0 \tag{3.9}$$

Il grado massimo dei polinomi Ψ_λ, chiamato Λ, è un parametro dell'inversione che deve essere fissato.

Se riusciamo ad eliminare questi due termini, allora

$$\left\langle \frac{\Delta c_S^2}{c_S^2}(r_0) \right\rangle \simeq \int K_{c_S^2}(r_0, r)\, \frac{\Delta c_S^2}{c_S^2}(r)\, dr\ . \tag{3.10}$$

Il kernel medio è normalizzato ad 1 (cioè $\int K_{c_S^2}(r_0, r)dr = 1$), in modo da ottenere proprio un valore medio di $\Delta c_S^2/c_S^2$ vicino ad $r = r_0$ tramite l'espressione precedente.

Espressioni analoghe si ottengono per $\langle \Delta\rho/\rho \rangle$ in termini del relativo kernel medio, espresso come combinazione lineare dei K_{ρ,c_S^2}, con coefficienti $b_j(r_0)$ che devono sopprimere il "termine incrociato" con $\Delta c_S^2/c_S^2$.

L'errore nel risultato di una tale inversione è calcolato ipotizzando che gli errori nelle frequenze siano scorrelati, così l'errore sul valore medio di $\Delta c_S^2/c_S^2(r_0)$ è

$$\sigma(r_0) = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} d_j(r_0)^2\, \frac{e_j^2}{\nu_j}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} d_j(r_0)^2\, \sigma_j^2} \tag{3.11}$$

Una stima dell'accuratezza dell'inversione è data dalla larghezza dei kernel: più il kernel si avvicina ad una delta e migliore è l'inversione.

I metodi di inversione che danno i valori medi per le funzioni cercate si distinguono in generale per le richieste sull'andamento dei kernel. Il metodo SOLA, ad esempio, determina i coefficienti dell'inversione in modo che i kernel approssimino date funzioni $T(r_0, r)$

$$\int [K(r_0, r) - T(r_0, r)]^2\, dr + \beta \int C(r_0, r)^2 s(r) dr + \frac{\mu}{\bar{\sigma}^2} \sum d_j(r_0)^2 \sigma_j^2 \tag{3.12}$$

dove $s(r)$ è una funzione crescente del raggio che serve ad eliminare il "termine incrociato" in superficie; μ è un parametro che serve a bilanciare le richieste di un buon fit tra $K(r_0, r)$ e $T(r_0, r)$ e di un piccolo errore nella soluzione; β è un parametro che serve invece a bilanciare le richieste di un kernel ben localizzato in r_0 ed un piccolo "termine incrociato"; $\bar{\sigma}^2$ è la varianza media, definita come

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{N} \sigma_j^2}{N} \, . \tag{3.13}$$

Le funzioni $T(r_0, r)$ vengono scelte simili a gaussiane (solo che si annullano per $r = 0$), con il massimo per $r = r_0$ e larghezza $\Delta(r_0) = \Delta_A c_S(r_0)/c_S(r_A)$, dove r_A è una posizione di riferimento che viene scelta prima dell'inversione, $c_S(r)$ è la velocità del suono nel punto r e Δ_A è un parametro dell'inversione. Per eliminare il termine $F(\nu_j)/I_j$ i coefficienti d_j devono soddisfare la 3.9.

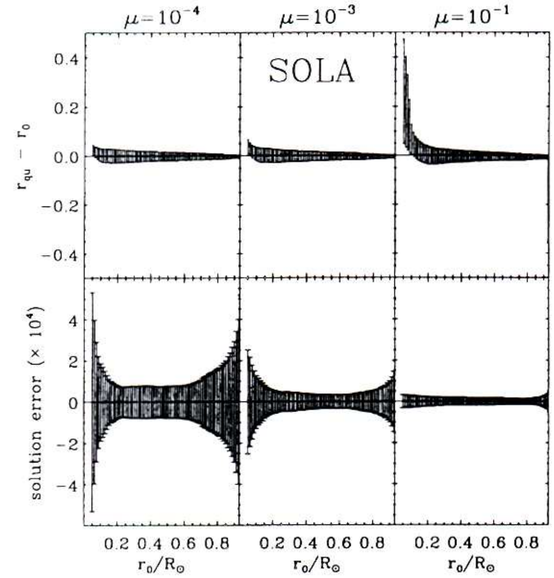

Figura 3.2: Posizione dei punti $r_{qu}^{(1)}$ ed $r_{qu}^{(3)}$ rispetto al punto r_0 (riquadri sopra) ed errore nelle soluzione (riquadri sotto) per diversi valori del parametro μ. Da Rabello-Soares (1999).

3.2.1 La scelta dei parametri di inversione

Rabello-Soares et al. (1999) hanno analizzato con precisione il problema della scelta dei parametri per vari metodi di inversione: riportiamo qui la loro analisi per il metodo SOLA, utilizzato per invertire l'equazione 3.4 . Per tale metodo i parametri sono Λ, μ, β e Δ_A. Per la scelta del set di frequenze e del modello solare (standard) utilizzato vedere [33].

Il parametro Λ è largamente indipendente dalla scelta di μ, β e Δ_A, per questo viene determinato per primo. Λ viene scelto come il grado massimo della combinazione dei polinomi Ψ_λ che dà il miglior fit per la funzione $F(\nu)$.

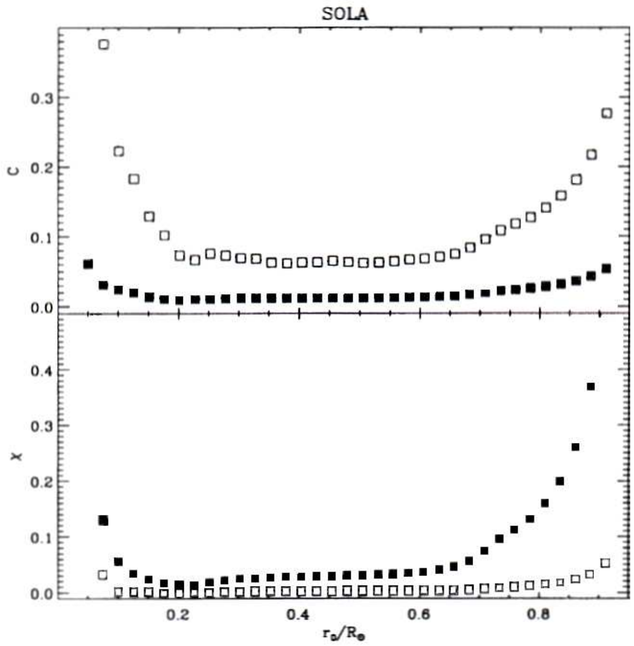

Figura 3.3: Andamento delle funzioni $\chi(r_0)$ (sotto) e $C(r_0)$ (sopra) per due valori differenti del parametro β. I quadretti pieni corrispondono a $\beta = 10$, quelli vuoti a $\beta = 0.1$. Adattato da Rabello-Soares (1999).

Il parametro μ viene scelto invece in maniera da bilanciare l'errore nella soluzione (equazione 3.11) e la risoluzione. Come abbiamo detto in precedenza, la risoluzione del metodo è legata alla larghezza dei kernel, $\Delta_{qu} = r_{qu}^{(1)} - r_{qu}^{(3)}$, definiti in modo che un quarto dell'area di K si trova alla sinistra di $r_{qu}^{(1)}$ ed un quarto alla destra di $r_{qu}^{(3)}$.

In figura 3.2 sono riportati l'errore nella soluzione (riquadri sotto) e la posizione di $r_{qu}^{(1)}$ ed $r_{qu}^{(3)}$ (riquadri sopra) in funzione del punto r_0 in cui determiniamo il valor medio. In generale l'errore aumenta vistosamente se scegliamo r_0 vicino al centro e alla superficie del Sole; il kernel medio, specialmente vicino al centro del Sole, non è più perfettamente centrato in r_0, ma risulta traslato rispetto a questo; si vede anche come una variazione di μ possa ridurre l'errore.

Per quanto riguarda il parametro β, in figura 3.3 abbiamo riportato per due valori molto diversi di β (0.1 e 10) l'andamento delle due funzioni

$$\chi(r_0) = \int [K(r_0, r) - T(r_0, r)]^2 \, dr \, , \tag{3.14}$$

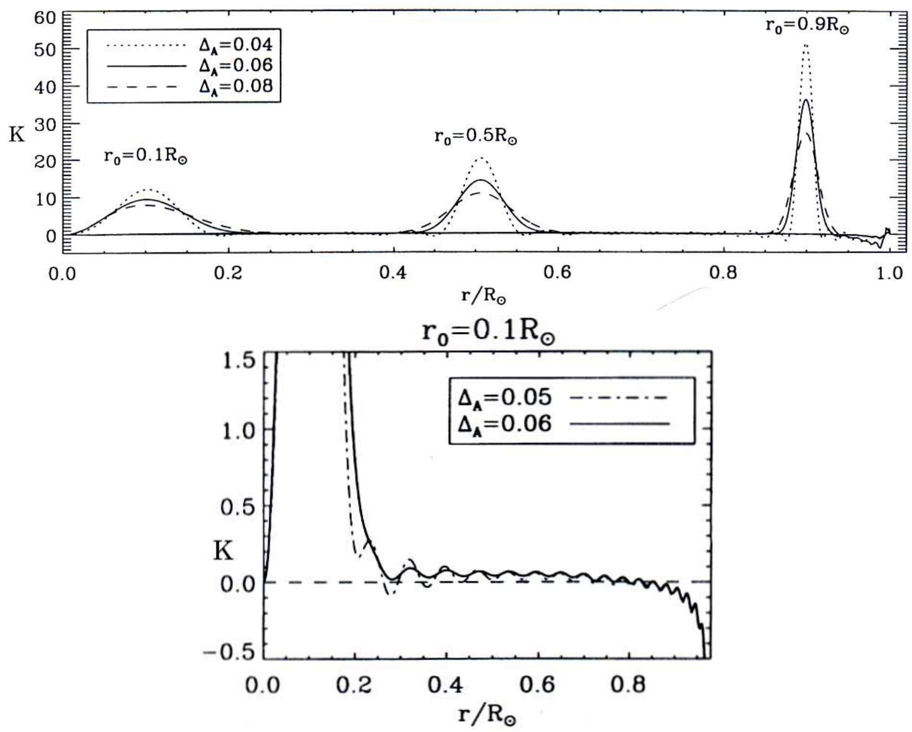

Figura 3.4: Sopra: kernel medi per la velocità del suono in differenti punti r_0 e per diversi valori di Δ_A. Notare che per un dato Δ_A, la larghezza del kernel diminuisce al crescere di r_0: questo perchè la larghezza cambia con la velocità del suono. Sotto: dettaglio dei kernel medi per due valori di Δ_A, in cui si evidenziano i contributi del kernel in posizioni diverse da r_0. Da Rabello-Soares (1999).

$$C(r_0) = \sqrt{\int C^2(r_0, r) dr} \, . \tag{3.15}$$

$\chi(r_0)$ esprime quanto il kernel medio differisce da $T(r_0, r)$, mentre $C(r_0)$ l'effetto totale (cioè integrato) del "termine incrociato": se vogliamo una buona inversione entrambe le funzioni devono essere piccole. Come si vede dalla figura 3.3, un aumento di β riduce l'importanza del "termine incrociato", ma rende peggiore il kernel medio: così, nella scelta di β si cerca un compromesso tra i due effetti.

Infine abbiamo il parametro Δ_A, legato alla larghezza delle funzioni $T(r_0, r)$. Come si vede dalla figura 3.4 in alto, aumentando Δ_A il picco del kernel diventa meno evidente; tuttavia, se Δ_A è troppo piccolo il kernel comincia ad oscillare ed ha contributi diversi da zero lontano da r_0 (figura 3.4 in basso).

3.3 I risultati dell'Eliosismologia

I principali risultati dell'Eliosismologia sono stati la determinazione dell'abbondanza di elio nella zona convettiva esterna, l'andamento della velocità del suono in tutta la struttura solare e la posizione della base della zona convettiva. Inoltre, tramite l'Eliosismologia si è scoperta l'importanza della diffusione dell'elio e dei metalli.

3.3.1 L'abbondanza fotosferica di elio

Come detto all'inizio di questo capitolo, dal metodo di inversione si può ottenere direttamente l'abbondanza fotosferica di elio Y_{ph}. Riportiamo nella tabella 3.2 alcuni valori ottenuti da vari autori tra il 1991 ed il 2002. Come si può vedere, spesso le differenze tra i valori trovati sono maggiori dei rispettivi errori riportati e questa discrepanza è dovuta al fatto che questi ultimi spesso sono stati stimati solo in base all'errore sulle frequenze osservate, mentre tenendo conto anche delle altre fonti di incertezza avremmo avuto errori maggiori (vedere paragrafo 3.4).

Autori	Y_{ph}	
Dappen (1991)	0.268	± 0.010
Vorontsov (1991)	0.250	0.010
Dziembowski (1991)	0.234	0.005
Kosovichev (1992)	0.232	0.006
Cox (1993)	0.240	0.005
Dziembowski (1994)	0.2429	0.0005
Hernandez (1994)	0.242	0.003
Antia (1994)	0.252	0.003
Basu, Antia (1995)	0.249	0.001
Gough (1996)	0.248	0.005
Kosovichev (1997)	0.232	0.006
Basu (1998)	0.248	0.001
Richard et al.(1998)	0.248	0.002
Di Mauro et al.(2002)	0.2539	0.0005

Tabella 3.2: Determinazioni eliosismologiche dell'abbondanza fotosferica di elio: l'errore stimato dagli autori tiene conto in generale solo delle incertezze sulle frequenze osservate.

3.3.2 La diffusione

Grazie all'Eliosismologia si è scoperta l'importanza della diffusione dell'elio e degli elementi più pesanti all'interno del Sole, in particolar modo alla base della zona convettiva (vedere la figura 3.5 a sinistra).

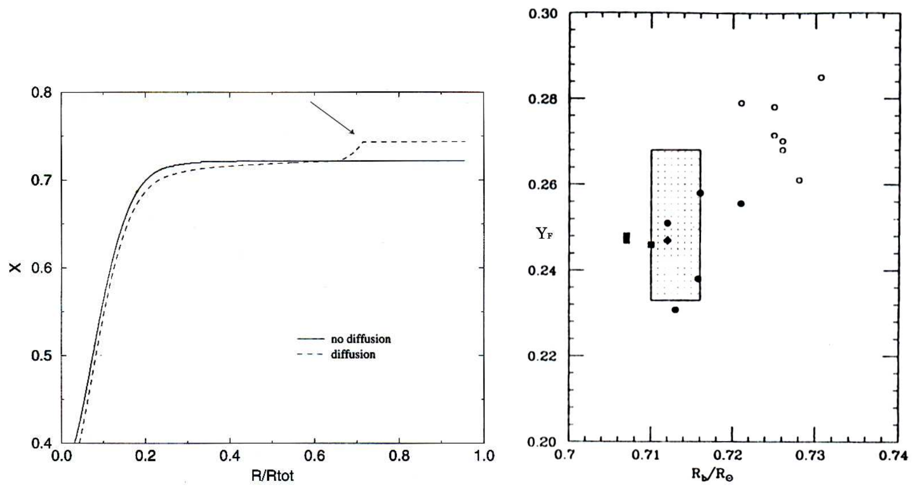

Figura 3.5: A sinistra: profilo dell'abbondanza di idrogeno per un modello solare con diffusione (linea tratteggiata) e senza diffusione. La base della zona convettiva è situata dove indica la freccia. Adattato da Ciacio et al. (1997). A destra: limiti eliosismologici per l'abbondanza fotosferica di elio e la posizione dela base della zona convettiva (rettangolo grande). I cerchi vuoti indicano le previsioni di modelli solari senza diffusione; i quadrati pieni indicano le previsioni di modelli solari con diffusione solo dell'elio; i cerchi pieni indicano le previsioni di modelli solari con diffusione dell'elio e dei metalli. Il rombo indica invece le previsioni del modello solare standard di Castellani et al. (1997). Da Castellani et al. (1997).

La diffusione dell'elio influenza la profondità della zona convettiva: in un modello che tiene conto di tale effetto, l'abbondanza superficiale di elio diminuisce, mentre Z resta circa costante. Si ha quindi un aumento dell'abbondanza di idrogeno e quindi un aumento dell'opacità nelle regioni superficiali (perchè l'idrogeno è più opaco dell'elio). Se l'opacità è maggiore, ∇_{rad} è maggiore e, poichè c'è convezione laddove $\nabla_{rad} > \nabla_{ad}$, la zona convettiva è più profonda.

In figura 3.5 (a destra) è mostrato come i modelli solari senza diffusione non riescano a riprodurre i valori osservati tramite l'Eliosismologia per l'abbondanza superficiale di elio e la profondità della zona convettiva esterna, mentre l'accordo migliora sensibilmente per modelli con diffusione dell'elio e dei metalli.

La diffusione dell'elio si riflette anche sull'andamento della velocità del suono: infatti, aumentando Y, aumenta il peso molecolare medio della materia e poichè la velocità del suono all'interno della stella è $c_S^2 \propto T/\mu$, questo provoca una variazione di c_S.

Rispetto ai modelli che non tengono conto della diffusione, i modelli con diffusione di elio e dei metalli mostrano un buon accordo con i valori eliosismologici della velocità del suono.

3.3.3 L'andamento della velocità del suono e la base della zona convettiva

Nella figura 3.6 è riportato l'andamento della velocità del suono c_S nell'interno solare. Come si può ben vedere si ha un cambiamento di c_S intorno ad $r = 0.7R_\odot$ e questo è dovuto al fatto che il gradiente di temperatura in quella zona passa radiativo ad adiabatico e cioè si passa dalla zona radiativa a quella convettiva. La base della zona convettiva è situata ad $r \simeq 0.711R_\odot$.

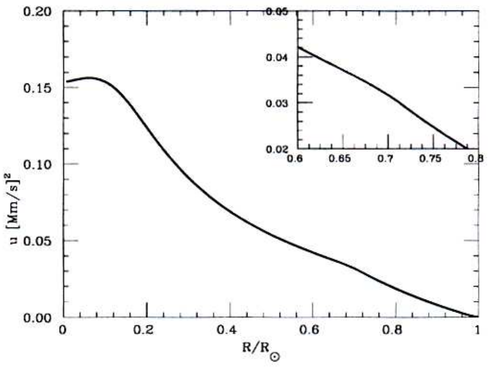

Figura 3.6: Andamento della velocità del suono nell'interno solare. Da Fiorentini et al. (2001).

3.4 Analisi delle incertezze

Le principali fonti di incertezze sui risultati dell'inversione sono:

1. errori nelle frequenze misurate, che per ogni metodo di inversione si propagano nei valori delle grandezze fisiche di interesse $Q_\odot$;

2. incertezze sul modello di partenza ($Q_\odot$ differisce a seconda delle ipotesi fatte sulla struttura del Sole);

3. incertezze sulla procedura di regolarizzazione delle $Q_\odot$: differenti metodi, che in principio sono ugualmente accettabili, possono dare valori differenti delle $Q_\odot$.

Poiché le misure effettuate per determinare le $\nu_\odot$ sono abbastanza precise ($\Delta\nu_\odot/\nu_\odot \leq 10^{-4}$), le 2. e 3. costituiscono le maggiori fonti di incertezza, ma dobbiamo considerare anche tutti i possibili modi in cui le 1., 2. e 3. possono combinarsi tra loro.

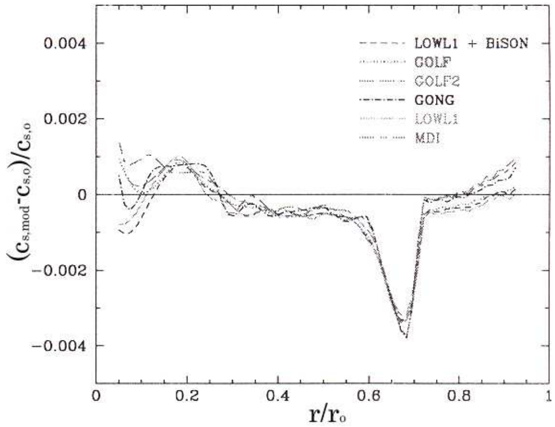

Figura 3.7: Differenze relative tra la velocità del suono stimata partendo dal modello standard BP2000 utilizzando sei differenti set di frequenze osservate. Da Fiorentini et al.(2000).

In figura 3.7 sono riportati gli andamenti di $(c_{S,mod} - c_{S,\odot})/c_{S,\odot}$ per un dato modello solare standard chiamato dagli autori BP2000 (vedere Fiorentini et al. (2000), [19]) al variare del set di frequenze osservate. Notiamo che i differenti set danno risultati consistenti della velocità del suono al livello dello 0.1%.

Degl'Innocenti et al. (1997) hanno analizzato il contributo dato da ciascuna delle sopraelencate cause di incertezza variandone una per volta e tenendo fisse le altre due: le considerazioni che seguono sono tratte dal loro articolo.

Per conoscere quanto influiscono gli errori sulle frequenze, si sceglie un particolare modello solare ed il metodo di inversione; in seguito, si variano le frequenze in maniera casuale, considerando le differenze dalle frequenze osservate distribuite su gaussiane la cui larghezza a metà altezza è l'errore nelle osservazioni. Variando le frequenze si ottengono dei diversi valori per ciascuna grandezza Q ricavata dall'inversione: il range su cui varia Q a causa degli errori sperimentali è quindi

$$(\delta Q)_{exp} = Q_{sup} - Q_{inf} \; . \tag{3.16}$$

Analogamente, per determinare il range dovuto al tipo di modello solare si fissano il metodo di inversione ed il set di frequenze (ciascuna sul valore centrale); nell'inversione si utilizzano modelli solari standard con input fisici diversi all'interno delle loro incertezze e quindi sempre accettabili.

Per determinare le incertezze dovute ai vari metodi di inversione, si variano singolarmente i parametri del metodo variazionale, nel caso specifico λ, r_0 ed eventuali parametri utilizzati per raccordare le soluzioni se ad esempio abbiamo usato due diversi metodi di inversione per $r < 0.1R_\odot$ ed $r > 0.1R_\odot$. Otteniamo così $(\delta Q)_\lambda$, $(\delta Q)_{r_0}$, etc.

Dopo aver trovato i (δQ) per ciascuna causa di incertezze, possiamo cercare di combinarli a formare un unico errore (ΔQ). Nel caso in cui possiamo considerare indipendenti i parametri variati avremo

$$(\Delta Q)_{sta} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\sum_k (\delta Q)_k^2} \tag{3.17}$$

e quindi in parte gli errori si compenseranno; nel caso peggiore, invece, questi si sommeranno linearmente:

$$(\Delta Q)_{lin} = \pm\sum_k |(\delta Q)_k| \,. \tag{3.18}$$

Nel primo caso l'errore viene detto "1σ", nel secondo invece "3σ" perchè è circa il triplo del primo.

Con il metodo spiegato sopra, Degl'Innocenti et al. (1997) hanno studiato la dipendenza delle grandezze ottenute eliosismologicamente dalle varie fonti di incertezza: i loro risultati sono riassunti in tabella 3.3.

Come si può vedere dalla tabella, l'errore su Y_{ph} dipende maggiormente dal modello solare scelto e dal metodo di inversione, quello su R_b principalmente dagli errori dovuti al modello utilizzato. Abbiamo inoltre la grandezza $U = P/\rho$, che è legata la velocità del suono c_S dalla relazione $c_S^2 = \Gamma_1\, U$: tale grandezza risente in gran parte delle incertezze sul modello e sul metodo di inversione. Passiamo ora ad analizzare più in dettaglio il contributo

Q	$Q_\odot$	$\left(\frac{\delta Q}{Q}\right)_{exp}$	$\left(\frac{\delta Q}{Q}\right)_{mod}$	$\left(\frac{\delta Q}{Q}\right)_{\lambda}$	$\left(\frac{\delta Q}{Q}\right)_{sta}$	$\left(\frac{\delta Q}{Q}\right)_{lin}$
Y_{ph}	0.249	2.4	27	6	14	42
$R_b/R_\odot$	0.711	0.1	4	0.03	2	4
U_1		< 1	2	1.3	1.4	5
U_2		< 1	1.6	2.5	2.3	9.4

Tabella 3.3: Effetti delle varie fonti di incertezza su alcune grandezze determinate tramite l'Eliosismologia. La grandezza U è legata alla velocità del suono c_S dalla relazione $c_S^2 = \Gamma_1\, U$; abbiamo indicato con U_1 ed U_2 i valori per la grandezza U rispettivamente nelle regioni $0.2R_\odot < r < 0.65R_\odot$ ed $0.1R_\odot < r < 0.2R_\odot$. Tutte le incertezze ed errori sono espressi in ${}^0/_{00}$. Adattata da Degl'Innocenti et al. (1997).

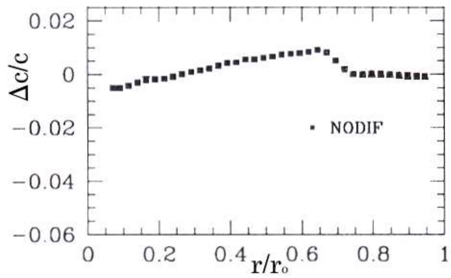

Figura 3.8: Differenze relative tra la velocità del suono all'interno del Sole e quella prevista dal modello NODIF. Adattato da Basu et al. (2000).

delle incertezze sul modello utilizzato agli errori sulla velocità del suono determinata eliosismologicamente.

Basu et al. (2000) hanno studiato come i risultati delle inversioni dipendono dal modello solare di riferimento, confrontando tra loro alcuni modelli differenti.

Il modello di riferimento degli autori è un modello standard, STD, in cui si utilizza la trattazione della mixing lenght per la convezione e si tiene conto della diffusione dell'elio e degli elementi più pesanti (per i dettagli vedere [6]).

Gli autori hanno analizzato vari modelli, che differiscono da STD ciascuno per una caratteristica: ad esempio, in uno viene tenuto conto degli effetti di mescolamento della materia dovuti ad una possibile rotazione non trascurabile, in un altro non si tiene conto della diffusione, in altri viene variato il valore del raggio solare (entro l'errore).

In generale, le differenze tra la velocità del suono all'interno del Sole e quella prevista dal modello considerato sono inferiori allo 0.5%, in sostanziale accordo con i risultati di Degl'Innocenti et al.(1997). Se invece si considera un modello non standard, come ad esempio quello senza diffusione, le differenze aumentano notevolmente (vedere figura 3.8).

In figura 3.9 a sinistra è indicato l'andamento di $(U_{mod} - U_{\odot})/U_{\odot}$, dove il modello utilizzato è BP2000 (vedere Fiorentini et al. (2000)) ed il set di frequenze è quello MDI; sono inoltre rappresentate le incertezze 1σ (più scure) e le 3σ (più chiare).

Come possiamo vedere, la velocità del suono prevista dal modello è in buon accordo con quella ottenuta dall'inversione, con differenze tra queste inferiori a circa 0.25% in tutto l'interno solare; vicino alla base della zona convettiva, però, tali differenze aumentano allo 0.25% (ricordiamo che $\Delta c_S^2/c_S^2 \propto \Delta U/U \rightarrow \Delta c_S/c_S \propto 1/2(\Delta U/U)$).

Tale comportamento si ripete al variare del modello standard scelto: Basu et al. (2000), utilizzando un altro modello solare standard, STD, come

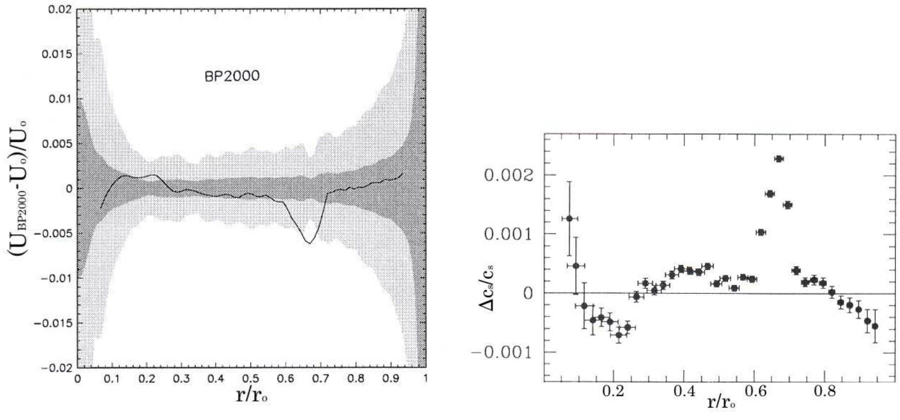

Figura 3.9: A sinistra: confronto tra la grandezza U prevista dal modello BP2000 e quella ottenuta con l'inversione. Sono evidenziati gli errori "1σ" (grigio scuro) e "3σ" (grigio chiaro). Da Fiorentini et al.(2000). A destra: differenza tra la grandezza c_S all'interno del Sole e quella stimata dal modello STD in funzione della distanza dal centro. Le barre verticali indicano gli errori "1σ". Adattato da Basu et al. (2000).

modello di riferimento ed il set di frequenze osservate MDI, hanno ottenuto ancora una volta un profilo per la velocità del suono in buon accordo con quello della velocità del suono all'interno del Sole, con il già citato aumento della discrepanza teoria-osservazioni vicino alla base della zona convettiva (vedere figura 3.9 a destra).

Questo ha fatto pensare ad alcuni autori che i modelli solari standard non descrivano bene il passaggio tra la zona radiativa e quella convettiva: alcuni autori hanno ad esempio ipotizzato la presenza di processi che possono causare un mescolamento extra della materia al bordo inferiore della zona convettiva; dalla figura 3.9 notiamo però che la discrepanza teoria-osservazioni in tale zona, sebbene maggiore che altrove, è comunque molto piccola.

Possiamo inoltre notare in entrambi i grafici di figura 3.9 che le barre degli errori non sono uguali in tutto l'interno solare, ma sono maggiori per $r < 0.2R_\odot$ e per $r > 0.8R_\odot$. Questo è caratteristico di tutte le inversioni per c_S al variare del modello di riferimento ed è dovuto al fatto che in generale i set di frequenze a disposizione non comprendono modi che descrivono bene queste due regioni (cioè modi rispettivamente con $l < 4$ ed $l > 500$).

3.5 Limiti dell'Eliosismologia

Nonostante l'Eliosismologia abbia apportato significativi miglioramenti alla conoscenza della struttura solare, ci sono comunque dei limiti ai risultati ottenibili.

Tramite l'inversione si determina direttamente l'andamento di c_S all'interno del Sole. Secondo quanto detto nel capitolo 1

$$\frac{P}{\rho} \simeq \frac{k_B T}{\mu m_P} \tag{3.19}$$

e quindi, dalla 2.1 si ha che

$$c_S^2 = \Gamma_1 \frac{P}{\rho} \propto \Gamma_1 \frac{T}{\mu} \,. \tag{3.20}$$

E' ovvio che dalla velocità del suono, osservando che l'indice adiabatico della materia interna al Sole è circa costante, otteniamo solo il rapporto tra T e μ (o tra P e ρ) e non le variabili singole. Per ricavare le singole variabili occorre utilizzare altre relazioni, ad esempio, per la densità occorre far uso dell'equazione dell'equilibrio idrostatico: in questo modo, chiaramente, il risultato è più indiretto e meno affidabile.

Basu et al. (2000) hanno ad esempio ricavato l'andamento delle differenze tra la densità all'interno del Sole e quella stimata dal modello STD citato precedentemente ($\Delta\rho/\rho = ((\rho_\odot - \rho_{STD})/\rho_{STD})$), usando come set di frequenze osservate quello MDI.

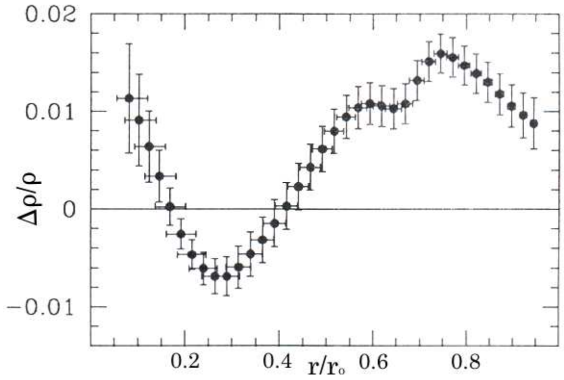

Figura 3.10: Differenze tra la densità all'interno del Sole e quella prevista dal modello STD, ottenute con il set di frequenze MDI. Da Basu et al. (2000).

Come si vede dalla figura 3.10, l'andamento della densità ha un'accuratezza di un ordine di grandezza inferiore rispetto a quello per la velocità del suono (vedere figura 3.9). Questo è dovuto al fatto che le frequenze di oscillazione dei modi p (che di fatto sono le uniche ad essere rilevate) dipendono soprattutto dalla velocità del suono, mentre la densità contribuisce solamente tramite la perturbazione del potenziale gravitazionale, che nella trattazione dei modi normali non radiali viene trascurata (vedere capitolo 2). Per ottenere la densità tramite l'inversione dobbiamo quindi passare attraverso l'equazione dell'equilibrio idrostatico e la determinazione di tale quantità è ovviamente meno diretta e più soggetta ad incertezze.

Inoltre, c'è un altro problema nell'inversione: poichè la densità deve sempre soddisfare l'equazione di continuità 2.3, dobbiamo avere una buona determinazione di ρ in tutto l'interno solare e questo richiede che il set di frequenze sia ben distribuito rispetto al grado l (ricordiamo che per l basso il modo descrive bene le zone centrali del Sole, mentre per l alto quelle superficiali).

Se non abbiamo un set che soddisfa queste richieste, l'inversione diventa più incerta (utilizzando il metodo dei kernel medi, si ottengono dei kernel per ρ molto larghi sia nelle zone più interne che in quelle più esterne).

In pratica, il metodo di inversione è sì molto potente, ma non si può pretendere di usarlo oltre le sue reali possibilità: per determinare una particolare grandezza dobbiamo necessariamente fare delle ipotesi aggiuntive sulla struttura del Sole e questo in genere è fonte di notevoli incertezze perchè il legame tra le grandezze fisiche che descrivono l'interno solare dipende dagli input fisici utilizzati che sono a loro volta affetti da incertezze non trascurabili. Per fare un esempio, se partendo dal nostro modello solare standard aumentiamo l'opacità k (entro i limiti dell'incertezza su tale quantità), avremo un gradiente di temperatura all'interno del Sole maggiore e, come illustrato schematicamente in figura 3.11, la zona dove viene prodotta l'energia sarà minore.

In una stella qualunque, se la produzione di energia è inferiore a quella necessaria a mantenere la stella all'equilibrio, il nucleo contrae leggermente ed aumenta la temperatura centrale T_C in modo da aumentare l'efficienza delle reazioni nucleari e mantenere l'equilibrio tra produzione di energia ed irraggiamento; il risultato finale sarà un lieve aumento della luminosità della stella. Quando costruiamo un modello solare però, la luminosità L è fissata dalle osservazioni, quindi se variamo ad esempio l'opacità e T_C aumenta in maniera che L supera il valore osservato, dobbiamo diminuire l'abbondanza di elio (Y) in modo da ottenere sempre il giusto valore di L e questo farà diminuire la temperatura centrale. Nel Sole, quindi, è più difficile prevedere come sarà cambiata la temperatura centrale a causa di un aumento di k: sicuramente una variazione nell'opacità avrà meno effetto sulla T_C del nostro modello che nel caso di un modello stellare senza particolari limitazioni osservative.

Le stesse conseguenze si avranno se nel nostro modello diminuiamo la sezione d'urto protone-protone S_{pp}, poichè questa è strettamente legata alla produzione di energia nucleare del Sole. La produzione di energia all'interno

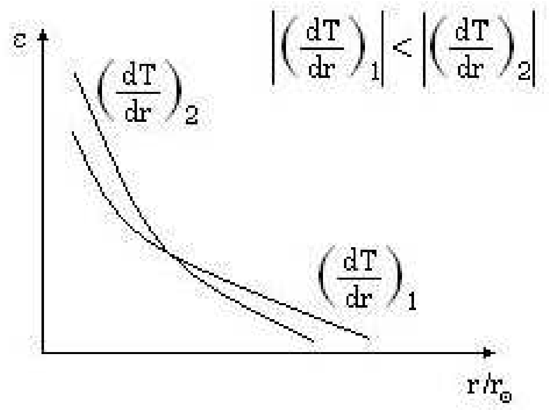

Figura 3.11: Andamento schematico della produzione di energia in funzione della distanza dal centro per due diversi gradienti di temperatura.

del Sole è per circa il 98% dovuta alla catena p-p: se si diminuisce S_{pp}, bisogna di nuovo aumentare la temperatura centrale in modo da riequilibrare la produzione di energia; dobbiamo però evitare, come nel caso precedente, che la luminosità non cambi entro i valori osservati.

Un'altra fonte di incertezza è l'errore osservativo sul rapporto Z/X fotosferico, poichè al variare della metallicità varia anche l'opacità k (quindi avremo di nuovo variazioni del gradiente di temperatura, ecc...).

A causa delle strette correlazioni tra diversi input fisici solari è difficile riuscire a capire tramite l'eliosismologia se un dato input fisico è buono o meno. Tripathy et al. (1998), ad esempio, hanno studiato la sensibilità della struttura solare a variazioni dell'opacità k localizzate in determinate posizioni. Le variazioni di alcune grandezze fisiche che descrivono l'interno solare sono state espresse in funzione di piccole variazioni dell'opacità tramite apposite funzioni, i kernel.

Poichè si è visto che i kernel davano una buona previsione del comportamento della struttura, gli stessi autori hanno poi pensato di studiare come le frequenze di oscillazione risentono delle variazioni di k, e cioè di ricavare i kernel per le frequenze, nell'intento di ottenere tramite l'inversione le giuste correzioni all'opacità utilizzata nei modelli.

Purtroppo però le differenze tra le frequenze osservate e quelle teoriche $(\Delta\nu/\nu)_j$ non dipendono esclusivamente dalle variazioni dell'opacità: ci sono altri input fisici che sono determinati con grande incertezza, come ad esempio Z/X ed S_{pp}, il cui legame con k non è noto a priori.

Pertanto a mio avviso non è possibile stimare a priori il peso che hanno gli errori su queste grandezze e le variazioni dell'opacità nelle differenze tra le frequenze di oscillazione e di conseguenza non possiamo ricavare k.

Appendice A

Misura delle abbondanze chimiche nella fotosfera solare

Elencherò brevemente ed a grandi linee i diversi metodi con cui si ottengono informazioni sulla composizione chimica solare. Tramite la spettroscopia possiamo ottenere la composizione chimica di fotosfera, cromosfera e corona, cioè gli strati più esterni del Sole, che sono gli unici che contribuiscono alla radiazione osservata; per mezzo di tale tecnica possiamo anche determinare la composizione chimica dei sunspot. La raccolta di particelle dallo spazio ci permette di risalire alla composizione chimica del vento solare. Spettri solari ad alta risoluzione e con un grosso rapporto segnale/rumore ottenuti da terra e dallo spazio sono oggi a disposizione per un range di lunghezze d'onda che va dall'ultravioletto al lontano infrarosso.

Un vantaggio nello studio del Sole è che ulteriori dati possono essere acquisiti dalla materia di altri oggetti del sistema solare che si sono formati più o meno quando si è formato il Sole, in modo da rappresentarne la composizione chimica originale. Le maggiori informazioni giungono dalle meteoriti ed in particolare da quelle chiamate condriti carbonacee, poichè queste hanno conservato la composizione originaria degli oggetti da cui provengono (i planetesimi), cioè quella della materia che formava la nebulosa protosolare (ad eccezione degli elementi più volatili).

In tabella A sono riportati i valori delle abbondanze fotosferiche e meteoritiche come trovati da Grevesse & Noels (1995), Grevesse & Sauval (1998); il valore fotosferico per l'ossigeno è invece stato aggiornato da Asplund et al. (2004). Le abbondanze sono espresse in abbondanza numerica in rapporto a quella dell'idrogeno,normalizzato a 10^{12}:

$$A_{el} = log\left(\frac{N_{el}}{N_H}\right) \ + \ 12.0 \tag{A.1}$$

dove N_{el} è l'abbondanza numerica dell'elemento. In generale si trova un buon accordo tra il valore fotosferico di un elemento ed il relativo valore meteorico (ovviamente dove siano presenti entrambi), ad eccezione del litio, per cui è ben noto il problema, ancora irrisolto, di una giustificazione teorica della sua abbondanza fotosferica.

Per alcuni elementi in passato si avevano discrepanze tra i due valori, ma in generale, miglioramenti nello studio dell'atmosfera solare e nella conoscenza delle probabilità di transizione per i vari elementi ha portato ad un sempre più grande accordo tra le abbondanze ricavate dallo spettro e quelle misurate nei meteoriti.

Proprio da questo accordo tra i due tipi di abbondanze, si deduce che l'effetto della diffusione termica e della sedimentazione gravitazionale non è osservabile con l'attuale grado di risoluzione.

Ricordiamo inoltre che il valore dell'abbondanza dell'elio, che non è osservabile nè dallo spettro nè dai meteoriti (l'elio è un elemento volatile), è stato ottenuto tramite l'Eliosismologia e cioè dalle inversioni.

Il nuovo valore dell'abbondanza dell'ossigeno (8.66 ± 0.05) è stato ottenuto da Asplund et al. (2004), tramite tecniche spettroscopiche. Gli autori hanno studiato le righe O I ed [O I], i modi di vibrazione e rotazione della molecola OH ed hanno utilizzato un modello più accurato dell'atmosfera solare (per i dettagli vedere [2]). Da questo nuovo valore per l'ossigeno, derivano un'abbondanza fotosferica dei metalli ed un rapporto Z/X inferiori a quelli precedentemente stimati pari rispettivamente a 0.0126 ed a 0.0176.

Elemento	Fotosfera	Meteoriti	Fot.-Met.
01 H	12.00	-	-
02 He	[10.93 ±0.004]	-	-
03 Li	1.10 ±0.10	3.31 ±0.04	-2.21
04 Be	1.40 ±0.09	1.42 ±0.04	+0.02
05 B	(2.55 ±0.30)	2.79 ±0.05	(-0.24)
06 C	8.52 ±0.06	-	-
07 N	7.92 ±0.06	-	-
08 O[a]	8.66 ±0.05	-	-
09 F	[4.56 ±0.3]	4.48 ±0.06	+0.08
10 Ne	[8.08 ±0.06]	-	-
11 Na	6.33 ±0.03	6.32 ±0.02	+0.01
12 Mg	7.58 ±0.05	7.58 ±0.01	0.00
13 Al	6.47 ±0.07	6.49 ±0.01	-0.02
14 Si	7.55 ±0.05	7.56 ±0.01	-0.01
15 P	5.45 ±(0.04)	5.56 ±0.06	-0.11
16 S	7.33 ±0.11	7.20 ±0.06	+0.13
17 Cl	[5.5 ±0.3]	5.28 ±0.06	+0.22

[a]Valore tratto dai recenti risultati da Asplund et al.(2004)

Elemento	Fotosfera	Meteoriti	Fot.-Met.
18 Ar	[6.40 $\pm$0.06]	-	-
19 K	5.12 $\pm$0.13	5.13 $\pm$0.02	-0.01
20 Ca	6.36 $\pm$0.02	6.35 $\pm$0.01	+0.01
21 Sc	3.17 $\pm$0.10	3.10 $\pm$0.01	+0.07
22 Ti	5.02 $\pm$0.06	4.94 $\pm$0.02	+0.08
23 V	4.00 $\pm$0.02	4.02 $\pm$0.02	-0.02
24 Cr	5.67 $\pm$0.03	5.69 $\pm$0.01	-0.02
25 Mn	5.39 $\pm$0.03	5.53 $\pm$0.01	-0.14
26 Fe	7.50 $\pm$0.05	7.50$\pm$0.01	0.00
27 Co	4.92 $\pm$0.04	4.91 $\pm$0.01	+0.01
28 Ni	6.25 $\pm$0.04	6.25 $\pm$0.01	0.00
29 Cu	4.21 $\pm$0.04	4.29 $\pm$0.04	-0.08
30 Zn	4.60 $\pm$0.08	4.67 $\pm$0.04	-0.07
31 Ga	2.88 $\pm$(0.10)	3.13 $\pm$0.02	-0.25
32 Ge	3.41 $\pm$0.14	3.63 $\pm$0.04	-0.22
33 As	-	2.37 $\pm$0.02	-
34 Se	-	3.41 $\pm$0.03	-
35 Br	-	2.63 $\pm$0.04	-
36 Kr	-	3.31 $\pm$0.08	-
37 Rb	2.60 $\pm$(0.15)	2.41 $\pm$0.02	+0.19
38 Sr	2.97 $\pm$0.07	2.92 $\pm$0.02	+0.05
39 Y	2.24 $\pm$0.03	2.23 $\pm$0.02	+0.01
40 Zr	2.60 $\pm$0.02	2.61 $\pm$0.02	-0.01
41 Nb	1.42 $\pm$0.06	1.40 $\pm$0.02	+0.02
42 Mo	1.92 $\pm$0.05	1.97 $\pm$0.02	-0.05
44 Ru	1.84 $\pm$0.07	1.83 $\pm$0.04	+0.01
45 Rh	1.12 $\pm$0.12	1.10 $\pm$0.04	+0.02
46 Pd	1.69 $\pm$0.04	1.70 $\pm$0.04	-0.01
47 Ag	(0.94 $\pm$0.25)	1.24 $\pm$0.04	(-0.30)
48 Cd	1.77 $\pm$0.11	1.76 $\pm$0.04	+0.01
49 In	(1.66 $\pm$0.15)	0.82 $\pm$0.04	+0.84
50 Sn	2.0 $\pm$(0.3)	2.14 $\pm$0.04	-0.14
51 Sb	1.0 $\pm$(0.3)	1.03 $\pm$0.07	-0.03
52 Te	-	2.24 $\pm$0.04	-
53 I	-	1.51 $\pm$0.08	-
54 Xe	-	2.17 $\pm$0.08	-
55 Cs	-	1.13 $\pm$0.02	-
56 Ba	2.13 $\pm$0.05	2.22 $\pm$0.02	-0.09
57 La	1.17 $\pm$0.07	1.22 $\pm$0.02	-0.05

Elemento	Fotosfera	Meteoriti	Fot.-Met.
58 Ce	1.58 ±0.09	1.63 ±0.02	-0.05
59 Pr	0.71 ±0.08	0.80 ±0.02	-0.09
60 Nd	1.50 ±0.06	1.49 ±0.02	+0.01
62 Sm	1.01 ±0.06	0.98 ±0.02	+0.03
63 Eu	0.51 ±0.08	0.55 ±0.02	-0.04
64 Gd	1.12 ±0.04	1.09 ±0.02	+0.03
65 Tb	(-0.1 ±0.3)	0.35 ±0.02	(-0.45)
66 Dy	1.14 ±0.08	1.17 ±0.02	-0.03
67 Ho	(0.26 ±0.16)	0.51 ±0.02	(-0.25)
68 Er	0.93 ±0.06	0.97 ±0.02	-0.04
69 Tm	(0.00 ±0.15)	0.15 ±0.02	(-0.15)
70 Yb	1.08 ±(0.15)	0.96 ±0.02	+0.12
71 Lu	0.06 ±0.10	0.13 ±0.02	-0.07
72 Hf	0.88 ±(0.08)	0.75 ± 0.02	+0.13
73 Ta	-	-0.13 ±0.02	-
74 W	(1.11 ±0.15)	0.69 ±0.03	(+0.42)
75 Re	-	0.28 ±0.03	-
76 Os	1.45 ±0.10	1.39 ±0.02	+0.06
77 Ir	1.35 ±(0.10)	1.37 ±0.02	-0.02
78 Pt	1.8 ±0.3	1.69 ±0.04	+0.11
79 Au	(1.01 ±0.15)	0.85 ±0.04	(+0.16)
80 Hg	-	1.13 ±0.08	-
81 Tl	(0.9 ±0.2)	0.83 ±0.04	(+0.07)
82 Pb	1.95 ±0.08	2.06 ±0.04	-0.11
83 Bi	-	0.71 ±0.04	-
90 Th	-	0.09 ±0.02	-
92 U	(<-0.47)	-0.50 ±0.04	-

Tabella A.1: Abbondanze fotosferiche e meteoritiche. I valori sono dati nella scala logaritmica $A_{el} = \log(N_{el}/N_H) + 12.0$. I valori tra parentesi quadre non sono ottenuti dalla fotosfera, ma dalle osservazioni dei sunspots, della corona solare e delle particelle del vento solare. I valori tra parentesi tonde sono meno accurati. Dati tratti da Grevesse & Noels (1995), Grevesse & Sauval (1998), Asplund et al. (2004).

Appendice B

Stima dell'età del Sole

Un limite inferiore per l'età del Sole è data dall'età di corpi planetari del sistema solare quali i meteoriti, poichè non può essersi formato dopo di questi. La nebulosa protosolare, dalla quale si sono formati il Sole ed i meteoriti, conteneva elementi come l'alluminio che chiaramente dovevano provenire da una sorgente stellare esterna, che li aveva sintetizzati e successivamente espulsi (supernova). Un limite superiore per l'età del Sole è quindi dato dall'introduzione di tali elementi nella nebulosa (il Sole non può essersi formato prima di tale introduzione).

L'età dei meteoriti è stata misurata con molta precisione osservando il numero di nuclei radioattivi primari presenti oggi e l'aumento nel numero dei rispettivi nuclei secondari; in particolare, si sfruttano i decadimenti $^{238}U \rightarrow^{206} Pb$ e $^{235}U \rightarrow^{207} Pb$. In generale, il numero di atomi ad esempio di ^{206}Pb misurato oggi sarà dato dalla somma del numero iniziale (cioè al momento della formazione dei meteoriti) e di quello risultante dai processi di decadimento. Sicuramente varrà che:

$$^{206}Pb(t_1)\ +\ ^{238}U(t_1) =^{206} Pb(t_0)\ +\ ^{238}U(t_0)$$

$$^{207}Pb(t_1)\ +\ ^{235}U(t_1) =^{207} Pb(t_0)\ +\ ^{235}U(t_0)$$

dove con il simbolo dell'elemento si indica l'abbondanza numerica di questo, t_1 è l'istante in cui si misurano le abbondanze e t_0 è quello in cui si sono formati i meteoriti; è ovvio che $^{206}Pb(t_0)$ e $^{207}Pb(t_0)$ sono grandezze che non conosciamo.

Per risolvere questo problema si sfrutta la presenza nei meteoriti di un isotopo stabile del piombo che non è generato da decadimenti, il ^{204}Pb: la sua abbondanza attuale coincide allora con quella all'istante t_0, cioè $^{204}Pb(t_1) =^{204} Pb(t_0)$. In tal caso avremo:

$$\frac{^{206}Pb(t_1)\ +\ ^{238}U(t_1)}{^{204}Pb(t_1)} = \frac{^{206}Pb(t_0)\ +\ ^{238}U(t_0)}{^{204}Pb(t_0)}\ , \qquad \text{(B.1)}$$

che può essere riscritta nel seguente modo

$$\frac{^{206}Pb^*}{^{204}Pb(t_1)} = \frac{^{206}Pb(t_1)}{^{204}Pb(t_1)} - \frac{^{206}Pb(t_0)}{^{204}Pb(t_0)} = \frac{^{238}U(t_1)}{^{204}Pb(t_1)} \left[e^{\lambda_{238}t} - 1\right] . \tag{B.2}$$

Nella B.2 abbiamo indicato con $t = t_1 - t_0$ l'età dei meteoriti e con $^{206}Pb^*$ il numero di nuclei generati dal decadimento; un'analoga relazione si ottiene per il $^{207}Pb^*$:

$$\frac{^{207}Pb^*}{^{204}Pb(t_1)} = \frac{^{207}Pb(t_1)}{^{204}Pb(t_1)} - \frac{^{207}Pb(t_0)}{^{204}Pb(t_0)} = \frac{^{235}U(t_1)}{^{204}Pb(t_1)} \left[e^{\lambda_{235}t} - 1\right] . \tag{B.3}$$

Nella B.2 ci sono quindi due incognite: l'età dei meteoriti, t, ed il rapporto $^{206}Pb(t_0)/^{204}Pb(t_0)$. Quest'ultimo viene ricavato in base ad alcune considerazioni: poichè i meteoriti si sono formati dallo stesso tipo di materia e nello stesso istante, essi hanno la stessa età e lo stesso rapporto isotopico iniziale $^{206}Pb(t_0)/^{204}Pb(t_0)$, sebbene diverse abbondanze iniziali di ^{238}U. In tal caso, diversi meteoriti avranno diversi valori attuali dei rapporti $^{206}Pb(t_1)/^{204}Pb(t_1)$ e $^{238}U(t_1)/^{204}Pb(t_1)$, corrispondenti ad identici valori di t e $^{206}Pb(t_0)/^{204}Pb(t_0)$. Facendo quindi un grafico di $y =^{206} Pb(t_1)/^{204}Pb(t_1)$ in funzione di $x =^{238} U(t_1)/^{204}Pb(t_1)$ otteniamo una retta con pendenza $m = e^{\lambda_{235}t} - 1$ ed intercetta $b =^{206} Pb(t_0)/^{204}Pb(t_0)$. Un analogo ragionamento si può fare per determinare $^{207}Pb(t_0)/^{204}Pb(t_0)$.

Dal rapporto tra le due equazioni B.2 e B.3 otteniamo l'età dei meteoriti: infatti il rapporto attuale $^{235}U/^{238}U$ nei corpi del sistema solare è noto con precisione ed è una costante pari a circa 0.0072, mentre il rapporto $^{207}Pb^*/^{206}Pb^*$ si ricava misurando i rapporti isotopici attuali e stimando quelli iniziali come sopra. L'età dei meteoriti risulta essere $t_m = (4.565 \pm 0.005) \cdot 10^9$ anni.

Resta da stimare quanto tempo può essere trascorso tra la formazione del Sole e quella dei meteoriti.

La nebulosa protosolare conteneva sia l'isotopo stabile dell'alluminio, ^{27}Al, sia quello instabile, ^{26}Al, che decade nel ^{26}Mg con una vita media di $7 \cdot 10^5$ anni. Dalla vita media dell' ^{26}Al ricaviamo quanto ne dovrebbe essere decaduto nell'intervallo di tempo t_m, cioè dalla formazione dei meteoriti all'età attuale. Misurando l'attuale rapporto $R_{Al} =^{26} Al/^{27}\mathrm{Al}$ nei meteoriti si è così risaliti al valore di R_{Al} quando si sono formati, che è circa $5 \cdot 10^{-5}$.

Anche nell'ipotesi in cui il rapporto iniziale, quando l'alluminio è stato introdotto nella nebulosa, fosse stato $R_{Al} \simeq 1$, l'intervallo di tempo tra tale introduzione e la formazione dei meteoriti non può superare $t' \simeq 11 \cdot 10^6$ anni.

Quindi una stima superiore dell'età del Sole è $(4.565 + 3 \times 0.005 + 0.011) \cdot 10^9$ anni, una inferiore è $(4.565 - 3 \times 0.005) \cdot 10^9$ anni (dove l'errore sull'età dei meteoriti è stato portato a "3σ" per essere certi di trovare un limite superiore). L'età del Sole non è sicuramente maggiore di $t_\odot = (4.57 \pm 0.001) \cdot 10^9$ anni (derivazione tratta da [3]).

Bibliografia

[1] H.M. Antia, S. Basu, The Astrophysical Journal (1994), 426, 801

[2] M. Asplund, N. Grevesse, A.J. Sauval, C. Allende Prieto, D. Kiselman, Astronomy and Astrophysics (2004), 417, 751

[3] J.N. Bahcall, M.H. Pinsonneault, G.J. Wasserburg, Rev. Mod. Phys. (1995), 67, 781

[4] S. Basu, MNRAS (1998), 298, 719

[5] S. Basu, H.M. Antia, MNRAS (1995), 276, 1402

[6] S. Basu, M.H. Pinsonneault, J.N. Bahcall, The Astrophysical Journal (2000), 529, 1084

[7] A.I. Boothroyd, I.-J. Sackmann, The Astrophysical Journal (2002), 583, 1004

[8] V.Castellani, *Astrofisica stellare. I fondamenti fisici dell'interpretazione evolutiva di stelle e galassie.* Zanichelli, 1985.

[9] V.Castellani, S. Degl'Innocenti, G. Fiorentini, M. Lissa, B. Ricci, Physics Reports (1997), 281 (5&6), 309

[10] J. Christensen-Dalsgaard, Rev. Mod. Phys. (2002), 74, 1073

[11] F. Ciacio, S. Degl'innocenti, B. Ricci, Astron. Astrophys. Suppl. Ser. (1997), 123, 449

[12] W. Dappen, D.O. Gough, A.G. Kosovichev, M.J. Thompson, Challenges to the theories of the structure of moderate-mass stars, D.O. Gough, J. Toomre, eds. (Springer, Heidelberg, 1991)

[13] S. Degl'Innocenti, W.A. Dziembowski, G. Fiorentini, B. Ricci, Astroparticle Phisics (1997), 7, 77

[14] M.P. Di Mauro, J. Christensen-Dalsgaard, M.C. Rabello-Soares, S. Basu, Astronomy and Astrophysics (2002), 384, 666

[15] W.A. Dziembowski, A.A. Pamyatnykh, R. Sienkiewicz, MNRAS (1991), 249, 602

[16] W.A. Dziembowski, Bull. Astron. Soc: India (1996), 4, 2

[17] W.A. Dziembowski, A.A. Pamyatnykh, R. Sienkiewicz, MNRAS (1990), 244, 542

[18] W.A. Dziembowski, P.R. Goode, A.A. Pamyatnykh, R. Sienkiewicz, The Astrophysical Journal (1994), 432, 417

[19] G. Fiorentini, B. Ricci, F.L. Villante, Nucl. Phys. Proc. Suppl. (2001), 95, 116

[20] D.O: Gough et al., Science (1996), 272, 1296

[21] L. Gratton *Introduzione all'astrofisica. Stelle e galassie, vol.1*

Zanichelli, 1982

[22] N. Grevesse, A.J. Sauval, Space Science Review (1998), 85, 161

[23] N. Grevesse, A. Noels, A.J. Sauval, "Atomic and molecular data in solar photospheric spectroscopy" in *Laboratory and Astronomical High Resolution Spectra* eds. A.J. Sauval, R. Blomme, N. Grevesse, ASP Conference Series (1995), 81, 74

[24] N. Grevesse, A. Noels, A.J. Sauval, "Standard Abundances", in *Cosmic Abundances* eds. S.S. Holt, G. Sonneborn, ASP Conference Series (1996), 99, 117

[25] D.B. Guenther, P. Demarque, The Astrophysical Journal (1997), 484, 937

[26] J.A. Guzik, A.N. Cox, The Astrophysical Journal (1996), 411, 394

[27] F.P. Hernandez, J. Christensen-Dalsgaard, MNRAS (1994), 269, 475

[28] A.G. Kosovichev, J. Christensen-Dalsgaard, Dappen, W.A. Dziembowski, D.O. Gough, M.J. Thompson, MNRAS (1992), 259, 536

[29] A.G. Kosovichev, AIP Conf. Proc, 385, Robotic Exploration Close to the Sun: Scientific Basis, ed. S.R.Habbal (Woodbury, NY: Amer. Inst. Phys.) 1997, 159

[30] P.Paolicchi, *Lezioni di astrofisica.*

Dispense per il corso di astrofisica I, c.d.l. in Fisica, Università degli studi di Pisa, a.a.2002-2003

[31] L. Paternò, Giornale di Astronomia (1986), 4, 2

[32] L. Paternò, Giornale di Astronomia (1987), 1-2, 2

[33] M.C. Rabello-Soares, S. Basu, J. Christensen-Dalsgaard, MNRAS (1999), 309, 35

[34] O. Richard, W.A. Dziembowski, R. Sienkiewicz, P.R. Goode, Astronomy and Astrophysics (1998), 338, 756

[35] S.C. Tripathy, J. Christensen-Dalsgaard Astronomy and Astrophysics (1998), 337, 579

[36] Vorontsov, V.A Baturin, R. Sienkiewicz, Nature (1991), 349, 49